ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

(1) Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_o$ με $\alpha_o,\alpha_1,\ldots,$ αν $\in\Re$ και $\alpha_\nu\neq 0$. Να δειχθεί ότι η $f^{(x)}\left(x\right)=\nu\,!$ αν για κάθε $\nu\in$

(2) Να βρεθεί η πολυωνυμική συνάρτηση P(x) αν $P\left(0\right)=4$ και $\left(P'\left(x\right)\right)^2 P''\left(x\right)=8P\left(x\right)$ για κάθε $x\in\Re$.

(3) Αν $\left|f\left(x\right)-2\right|\leq x^2$ για κάθε $x\in\Re$, να δειχθεί ότι $f'\left(x\right)=0$

(4) Αν $f\left(x\right)\geq\sqrt{\left(x-1\right)}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f\left(1\right)=0$ να δειχθεί ότι η f δεν παραγωγίζεται στο $x_o=1$

(5) Αν f,g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $x_o\in\Re$ και $f\left(x_o\right)=g\left(x_o\right)$ και $f\left(x\right)\geq g\left(x\right)$ για κάθε $x\in\Re$ να δειχθεί ότι $f'\left(x_o\right)=g'\left(x_o\right)$

(6) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g\left(0\right)=e-1$, $g\left(x\right)>0$ για κάθε $x\in\Re$. Αν $f\left(x\right)=\left(1+g\left(x\right)\right)^x$ να δειχθεί ότι η γραφική παράσταση της f έχει στο $M\left(0,f\left(0\right)\right)$ εφαπτομένη που σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

(7) Αν $\left|f\left(\alpha\right)-f\left(\beta\right)\right|\leq\left(\alpha-\beta\right)^2$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Re$ να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή στο $\Re$.

(8) Να δειχθεί ότι η ευθεία $\psi=x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της παραγωγίσιμης συνάρτησης f που ορίζεται στο $\Re_+^*$ και έχει την ιδιότητα $x^3+\left[f\left(x\right)\right]^3=xf\left(x\right)$, για κάθε $x\in\Re$.

(9) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,1]\to\Re$ με τις ιδιότητες, α) δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,1]$, β) $f(0)=f(1)$, γ) $f''(x)\neq 6$ για κάθε $x\in[0,1]$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)-6x+3=0$ έχει μία μόνο ρίζα στο $(0,1)$

10) Να βρεθεί πολυώνυμο P(x) αν $P(x)-P'(x)=\dfrac{x^{\nu}}{\nu!}$ γκ$x\in\Re$. Να δειχθεί ότι το P(x) δεν έχει ρίζα ρ με πολλαπλότητα $\kappa\geq 2$.

(11) Αν $f(x)=x+2+\ell n(x^2+1)$ να δειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ και η $f(x)=0$ έχει μία μόνο πραγματική ρίζα.

(12) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,2]\to\Re$ με τις ιδιότητες : (α) Παραγωγίσιμη στο $[0,2]$ (β) $f(0)=2$, $f(2)=3$ (γ) Δεν υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3\xi^2+1$. Να δειχθεί ότι υπάρχει ένα μόνο $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\xi^3+\xi+1$.

(13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^7+2x^3+x+3$, να δειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα πραγματική και έξι ρίζες μιγαδικές.

(14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+x+1$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\Re$ αν γνωρίζουμε ότι υπάρχει ευθεία που εφάπτεται στο διάγραμμα της f στα σημεία $A(1,f(1))$ και $B(2,f(2))$.

(15) Δίνεται η συνάρτηση είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν $f(\alpha)=f(\beta)=f(\gamma)$ με $\gamma\in(\alpha,\beta)$ να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ έτσι ώστε $f''(\xi)=0$.

(16) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στο (α,β) και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε και $f(\alpha)g(\alpha)=f(\beta)g(\beta)=0$.

(17) Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να δειχτεί ότι υπάρχει τέτοιο ώστε

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi}$$

(18) Αν $f:\Re\to\Re$ με $f(0)=f'(0)=0$ και

$\left(f(x)-f'(x)\right)^2=2f'(x)f''(x)$ $\gamma\kappa x\in\Re$, να δειχτεί ότι $f(x)=0$ $\gamma\kappa$ $x\in\Re$.

(19) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x+x(\ell nx-e-1), & x>0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

i) Να δειχτεί ότι είναι συνεχής στο 0 και μαζί παραγωγίσιμη. ii) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της f .iii) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

(20) Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty]\to\Re$ με $f(x)=\left(x^2\right)^{\frac{1}{x^2}}$ αν $x\neq 0$ και $f(0)=0$

i) Να δειχτεί ότι η f είναι συνεχής. ii) Να βρεθούν τα ακρότατα. iii) Να βρεθεί το σύνολο τιμών της f . iv) Να συγκριθούν οι αριθμοί $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[9]{9}$,$\sqrt[16]{16}$.

(21) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Delta\to\Re$ με $\Delta=[1,2]$ και $f(x)=2-\frac{1}{2}\ell nx$. α) Να δειχτεί ότι η f στο Δ είναι γνησίως φθίνουσα, να προσδιοριστεί ότι το $f(\Delta)$ είναι υποσύνολο του Δ. β) Να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=x$ έχει μοναδική λύση στο $[1,2]$.

(22) Να λυθεί η εξίσωση $\ell nx-x+1=0$

(23) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με τις ιδιότητες: α) Δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, β) $f''(x)-6f'(x)+9f(x)=2e^{3x}$, γ) $f(1)=0$.

(23a) Αν $g(x)=\left(\dfrac{f(x)}{e^{3x}}\right)$ να βρεθούν οι συναρτήσεις g και f όταν $g(0)=0$

(24) Αν f παραγωγίσιμη στο $\Re$ να δειχτούν οι ισοδυναμίες:

α) $f'(x)=f(x) \quad \gamma \kappa x \in \Re \leftrightarrow f(x)=ce^{x}$ β) $f'(x)=-f(x) \gamma \kappa x \in \Re \Leftrightarrow f(x) ce^{-x}$

(25) Αν f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$ και $f''(x)=f(x) \gamma \kappa x \in \Re$ και να δειχτεί ότι $f^{2}(x)-\left(f'(x)\right)^{2}=0$ και ότι $f(x)=e^{x}$

(26) Μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών του πολυωνύμου $P(x)$ να δειχτεί ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $P'(x)=0$ και μεταξύ δύο ριζών της $P'(x)=0$ να δειχτεί ότι υπάρχει μια το πολύ ρίζα της $P(x)=0$.

(27) Αν το $P(x)$ είναι πολυώνυμο $3^{ου}$ βαθμού με τρεις άνισες πραγματικές ρίζες να δειχτεί ότι το $P'(x)$ έχει δύο ακριβώς άνισες πραγματικές ρίζες. Μετά να δειχτεί ότι αν η f με $f(x)=x^{4}+\alpha x^{3}+\beta x^{2}+\gamma x+\delta$ έχει τρία διαφορετικά ακρότατα τότε $3\alpha^{2}>8\beta$.

(28) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ell n x}{x}$. Να βρεθούν: πεδίο ορισμού, ασύμπτωτες, Μονοτονία, Ακρότατα, Κοίλα, Σημεία καμπής, Το σύνολο τιμών πρόχειρη γραφική παράσταση. Να δειχτεί $e^{x} \geq x^{e}$ για κάθε $x \in \Re_{+}^{*}$. Να δειχτεί ότι $100^{101}>101^{100}$.

(29) Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{\ell n x-1}{x-e}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού, ασύμπτωτες, Μονοτονία, ακρότατα, το σύνολο τιμών. Πρόχειρη γραφική παράσταση.

(30) Αν $f:[\alpha, \beta] \rightarrow \Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη και $f(\alpha)+f(\beta)=2 f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, να δειχτεί ότι υπάρχει $\xi \in(\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

(31) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$ στο $[0,+\infty)$ και να δειχτεί ότι $e^x \geq x^2+1$ για κάθε $x \geq 0$

(32) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x)=\dfrac{2+\ell nx}{x}$ στο $(0,+\infty)$ και να δειχτεί ότι $\ell nx \leq ex-2$ για κάθε $x>0$

(33) Να δειχτεί ότι μόνο αν $\alpha^2>3\beta$ η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ θα έχει τοπικά ακρότατα σε δύο σημεία. Να υπολογισθούν τότε τα α, β, γ ώστε τα ακρότατα να παρουσιάζονται για $x=1$ και $x=-1$ και η ακρότατη τιμή για $x=-1$ να είναι 5.

(34) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με τις ιδιότητες: α) παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, β) $f(x)f'(x)=(x+1)^2 e^x=g(x)$ $\gamma\kappa x\in\Re$ γ) $f(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$

δ) $f(0)=\sqrt{2}$. Να βρεθεί μια παράγουσα της g και ο τύπος της f. Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

(35) Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} 6-\sqrt{-x^2+4x-2}\ , & \alpha\nu \quad 1\leq x\leq 3 \\ 3+\sqrt{3}+\sqrt{-x^2+8x-4\left(2+\sqrt{3}\right)}\ , & \alpha\nu \quad 3<x\leq 5 \end{cases}$

α) Να δειχτεί ότι η f είναι συνεχής. β) Να δειχτεί ότι το σημείο $M(3,5)$ της C_f είναι γωνιακό σημείο.

γ) Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι δύο ημιεφαπτόμενες (αριστερά-δεξιά) στο $M(3,5)$.

(36) Για τη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δεχόμαστε ότι είναι παραγωγίσιμη στο μηδέν. Να δειχτεί ότι για να 'ναι παραγωγίσιμη η $g:(-1,1)\to\Re$ με $g(x)=f(|x|)$ στο $x=0$ πρέπει και αρκεί $f'(0)=0$.

(37) Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν οι f', f'' ικανοποιούν την $xf''(x)+3x\left(f'(x)\right)^2=1-e^{-x}$ και στο $x_o\in\Re$ παρουσιάζει η f ακρότατα τότε το ακρότατο αυτό είναι ελάχιστο.

(38) Θεωρούμε τη συνάρτηση f_α με $f(x)=\begin{cases} x^2\left(\ell n|x|-\alpha\right) & \alpha\nu \quad x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \quad x=0 \end{cases}$ $,\alpha\in\Re$ σταθερά.

Να δείξετε ότι η f_α είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ και να βρείτε την $f'_\alpha(x)$.

Να ευρεθεί ο γεωμετρικός τύπος των σημείων $\left(x_o, f_\alpha(x_o)\right)$ όπου x_o οι ρίζες της $f'_\alpha(x)=0$ (Απάντηση: $\psi=\frac{1}{2}x^2$)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΙΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

$f(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_o \qquad \alpha_o\alpha_1,\ldots\alpha_\nu\in\Re$ και $\alpha_\nu\neq 0$

$f^{(\nu)}(x)=\nu!\alpha_\nu$ για κάθε $\nu\in$ (1)

Για $\nu=1$ έχω $\alpha_1 x+\alpha_o$. Άρα $f'(x)=\alpha_1$ Δηλαδή $f'(x)=1\alpha_1$ και συνεπώς ισχύει η (1).

Υποθέτω ότι η (1) ισχύει για $\nu=\kappa$. Δηλαδή υποθέτω ότι ισχύει: $f^{(\kappa)}(x)=\kappa!\alpha_\kappa$ με $f(x)=\alpha_\kappa x^\kappa+\ldots\alpha_1\kappa+\alpha_o$ Τότε θα δείξω ότι η (1) ισχύει για $\nu=\kappa+1$. Δηλαδή θα δείξω ότι ισχύει : $f^{(\kappa+1)}(x)=(\kappa+1)!\alpha_{\kappa+1}$ με $f(x)=\alpha_{\kappa+1}x^{\kappa+1}+\alpha_\kappa x^\kappa\ldots+\alpha_1 x+\alpha_o$

Όμως $f^{(\kappa+1)}(x)=\left[f^{(\kappa)}(x)\right]'=\left[f'(x)=\right]^{(\kappa)}=(\kappa+1)\alpha_{\kappa+1}\kappa!=(\kappa+1)\alpha_{\kappa+1}$

Άρα, και σύμφωνα με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής η (1) ισχύει για κάθε $x\in$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω ότι το $P(x)$ είναι ν-οστού βαθμού. Τότε το $P'(x)$ θα είναι $(\nu-1)-$οστού βαθμού και το $P''(x) =: (\nu-2)$οστού βαθμού. Άρα το $\left[P'(x)\right]^2 P''(x)$ έχει $\left[2(\nu-1)+\nu-2\right]$ βαθμό και το $8P(x)$ έχει ν βαθμό. Συνεπώς ισχύει:

$z(\nu-1)+\nu-2=\nu \Leftrightarrow 2\nu-2 = \Leftrightarrow \nu=2$ (1) Οπότε: $P(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, έχω $\gamma=4$ (2)

Όμως $P(0)=4 \quad P'(x)=2\alpha x+\beta$ και Οπότε :

$$(2\alpha x+\beta)^2 \quad 2\alpha = 8\left(\alpha x^2+\beta x+4\right) \Leftrightarrow \left(4\alpha^2+x^2+\beta^2+4\alpha x\beta\right)2\alpha = 8\alpha x^2+8\beta x+32 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha^3x^2+\alpha\beta^2+4\alpha^2\beta x = 4\alpha x^2+4\beta x+16 \Leftrightarrow 4\alpha^3x^2+\alpha\beta^2+4\alpha^2\beta x-4\alpha x^2-4\beta x-16=0 \Leftrightarrow$$
$$4\alpha x^2\left(\alpha^2-1\right)+\left(4\alpha^2\beta-4\beta\right)x+\alpha\beta^2-16=0 \Leftrightarrow 4\alpha\left(\alpha^2-1\right)x^2+4\beta\left(\alpha^2-1\right)x+\alpha\beta^2-16=0$$

Όμως για να επαληθεύεται η τελευταία εξίσωση για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Πρέπει: $$\left.\begin{array}{r} 4\alpha\left(\alpha^2-1\right)=0 \\ \kappa\alpha\iota\ 4\beta\left(\alpha^2-1\right)=0 \\ \kappa\alpha\iota\ \ \alpha\beta^2-16=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \alpha=0 \quad \text{ή} \quad \alpha=1 \quad \text{ή} \quad \alpha=-1 \\ \kappa\alpha\iota\ \beta=0 \quad \text{ή} \quad \alpha=1 \quad \text{ή} \quad \alpha=-1 \\ \kappa\alpha\iota \qquad \alpha\beta^2=16 \end{array}$$

Οι λύσεις $\alpha=0$ και $\alpha=-1$ και $\beta=0$ απορρίπτονται γιατί δεν επαληθεύουν την τρίτη εξίσωση. Συνεπώς είναι $\alpha=1$ και από την τρίτη εξίσωση έχω: $\alpha\beta^2=16 \Leftrightarrow \beta^2=16 \Leftrightarrow \beta=\pm 4$ Συνεπώς έχω τα : $(\alpha,\ \beta,\ \chi)=(1,\ 4,\ 4)$ και $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=(1,\ -4,\ 4)$ Δηλαδή υπάρχουν δύο πολυωνυμικές συναρτήσεις που επαληθεύουν την αρχική εξίσωση οι οποίες είναι: $P(x)=x^2+4x+4$ και $P(x)=x^2-4x+4$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

$\left|f(x)-2\right| \le x^2$ για κάθε $x \in \Re$ (1) Η (1) για $x=0$ γίνεται: $\left|f(0)-2\right| \le 0 \Leftrightarrow \left|f(0)-2\right| = 0 \Leftrightarrow f(0)=2$ Άρα από (1) έχω: $\left|f(x)-f(0)\right| \le x^2$ ή $(\mu\varepsilon\ x \ne 0)$

$$\frac{|f(x)-f(0)|}{|x|} \le \frac{x^2}{|x|} \quad \text{ή} \quad \left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le |x|$$ Όμως: $\lim\limits_{x\to 0}|x| = \lim\limits_{x\to 0^-}(-x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x = 0$

και συνεπώς, σύμφωνα με το γνωστό θεώρημα έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 \Leftrightarrow f'(0)0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

$f(x) \ge \sqrt{|x-1|}$ για κάθε $x \in \Re$. (1) $f(1)=0$ Από την (1) έχουμε: $f(x) \ge \sqrt{|x-1|}$

ή $f(x)-f(1) \ge \sqrt{|x-1|} \Leftrightarrow x>1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} \Leftrightarrow \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \ge \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^+} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{x-1} = 0 \\ \sqrt{x-1} \succ 0 \ \forall x \succ 1 \end{array}\right\} \text{έχουμε: } \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

Συνεπώς: $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = +\infty$

Άρα εφόσον δεν ορίζεται το παραπάνω όριο του πηλίκου διαφορών για $x \to 1^+$, η f δεν παραγωγίζεται στο $x_o = 1$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u>

Στην $x > x_o$ ή $x - x_o > 0$. Τότε: $g(x)-g(x_o) \le f(x)-f(x_o)$

ή $\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \le \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}$ ή $g'_\delta(x_o) \le f'_\delta(x_o)$ ή (αφού οι g, f: παρ. στο x_o) : $g'(x_o) \le f'(x_o)$ (1). Στην $x < x_o$ ή $x - x_o < 0$. Τότε:

$g(x)-g(x_o) \le f(x)-f(x_o)$ ή $\frac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \ge \frac{f(x-f(x_o)}{x-x_o}$

ή $g'_\alpha(x_o) \ge f'_\alpha(x_o)$ ή (αφού οι g, f : παρ. στο x_o): $g'(x_o) \ge f'(x_o)$ (1)

Στην $x < x_o$ ή $x - x_o < 0$. Τότε: $g(x) - g(x_o) \le f(x) - f(x_o)$ ή

$\dfrac{g(x)-g(x_o)}{x-x_o} \ge \dfrac{f(x-f(x_o)}{x-x_o}$ ή $g'_{\alpha}(x_o) \le f'_{\alpha}(x_o)$ ή (αφού οι g, f : παρ. στο x_o) :

$g'(x_o) \ge f'(x_o)$ (2) Από τις (1) και (2) παίρνω : $g'(x_o) = f'(x_o)$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Αρκεί να δείξω ότι $f'(0) = 1$ Για κάθε $x \in \Re$ είναι: $f(x) = \left[1 + g(x)\right]^x$

Η f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \Re$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με :

$$f'(x) = \left\{\left[1+g(x)\right]^x\right\}' = \left\{e^{x\ell n}\left[1+g(x)\right]\right\}' = \left[1+g(x)\right]^x \left\{\ell n\left[1+g(x)\right] + x\frac{g'(x)}{1+g(x)}\right\}$$

Για $x = 0$ έχουμε:

$$f'(0) = \left[1+g(0)\right]^o \left\{\ell n\left[1+g(0)\right] + 0\frac{g'(0)}{1+g(0)}\right\} = \left\{1\ell n\left[1+e-1\right]+0\right\} = \ell ne = 1$$

Δηλαδή η εφαπτόμενη στη C_f στο $M(0, f(0))$ υπάρχει και σχηματίζει γωνία $\widehat{\Phi}$ με τον

άξονα $x'x$, με: $\varepsilon\varphi\widehat{\phi} = 1 \Leftrightarrow \widehat{\phi} = \dfrac{\pi}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

$\left|f(\alpha) - f(\beta)\right| \le \left|\alpha - \beta\right|^2$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Re$ (1) Στην (1) θεωρώ σαν α το χ και σαν

β το x_o και έχω: $\left|f(x) - f(x_o)\right| \le \left|x - x_o\right|^2$ ή $\dfrac{\left|f(x)-f(x_o)\right|}{x-x_o} \le \dfrac{\left|x-x_o\right|^2}{\left|x-x_o\right|}$

ή $\left|\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right| \le \left|x - x_o\right|$ για κάθε $x \ne x_o$ Όμως:

$\lim\limits_{x \to x_o}\left|x - x_o\right| = \lim\limits_{x \to x_o^-}\left(-x + x_o\right) = \lim\limits_{x \to x_o^+}\left(x - x_o\right) = 0$ Άρα:

$\lim\limits_{x \to x_o}\dfrac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) = 0 \quad \forall x_o \in \mathbb{R}$ Συνεπώς η $f(x)$: είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 8</u>

Έστω (x_o, ψ_o) το σημείο επαφής. Η C_f φυσικά το επαληθεύει. Δηλαδή είναι : $x_o^3 + \left[f(x_o)\right]^3 = x_o f(x_o)$ ή $x_o^3 + \psi_o^3 = x_o \psi_o$ (1) Εάν η δοσμένη ευθεία είναι εφαπτομένη της C_f , θα την επαληθεύει. Δηλαδή είναι : $\psi_o = -x_o + 1$ (2) Έχω το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) , από όπου παίρνουμε:

$$x_o^3 + (1 - x_o)^3 = x_o(1 - x_o) \Leftrightarrow x_o^3 + 1 - 3x_o + 3x_o^2 - x_o^3 = x_o - x_o^2 \Leftrightarrow 4x_o^2 - 4x_o + 1 = 0$$

$\Delta = 16 - 16 = 0$ Άρα το παραπάνω σύστημα έχει διπλή ρίζα. Συνεπώς η ευθεία με εξίσωση $\psi = -x + 1$ είναι εφαπτομένη της C_f

<u>ΑΣΚΗΣΗ 9</u>

Θεωρώ τη συνάρτηση $\sigma(x) = f(x) - 3x^2 + 3x$ Με

$$\left.\begin{array}{l} \sigma(0) = f(0) - 0 + 0 = f(0) \\ \sigma(1) = f(1) - 3 + 3 = f(1) \end{array}\right\} \Delta\eta\lambda \quad \sigma(0) = \sigma(1)$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Rolle για τη $\sigma(x)$ στο $[0,1]$ έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\sigma'(x_o) = 0 = f'(x_o) - 6x_o + 3 = 0$. Έστω ότι υπάρχει και $x_1 \in (0,1)$ με $x_1 \neq x_o$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) - 6x_1 + 3 = 0$. Εφαρμόζω θεώρημα Rolle για τη $\sigma'(x)$ στο $[x_1, x_o]$ και έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (x_1, x_o)$ τέτοιο ώστε $\sigma''(x_2) = 0 \Leftrightarrow f''(x_2) - 6 = 0$ που είναι άτοπο λόγω της εκφώνησης. Όμοια δουλεύω για το διάστημα $[x_o, x_1]$. Συνεπώς η εξίσωση $f'(x) - 6x + 3 = 0$ έχει μόνο μια ρίζα στο $(0,1)$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 10</u>

Α. Επειδή στη διαφορά υπάρχει το x^ν συμπεραίνω ότι το $P(x)$ θα είναι ν-οστού βαθμού. Έστω $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \cdots \alpha_1 x + \alpha_o$ Τότε <u>από παράδειγμα του σχολικού βιβλίου</u> έχω:

$p^{(\nu)}(x) = \nu!\alpha_\nu$: σταθερός. Άρα $p^{(\nu+1)}(x) = 0$

Άρα $P(x)-p^{(\nu+1)}(x)=\dfrac{x^{\nu}}{\nu!}+\dfrac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+\cdots+\dfrac{x^{1}}{1!}+\dfrac{x^{o}}{0!}$

Άρα $P(x)=\dfrac{x^{\nu}}{\nu!}+\dfrac{x^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+\cdots+\dfrac{x}{1!}+1$

B. Έστω ότι το $P(x)$ έχει ρίζα p με πολλαπλότητα τουλάχιστον 2. Τότε το p θα είναι τουλάχιστον απλή ρίζα του $P'(x)$.* Άρα η διαφορά $P(x)-P'(x)$ θα έχει ρίζα το p. Δηλαδή $P(p)-P'(p)=0 \Leftrightarrow \dfrac{p^{\nu}}{\nu!}=0 \Leftrightarrow p=0$. Αλλά p είναι ρίζα του $P(x)$. Δηλαδή $P(p)=0$ ή $P(0)=0$. Όμως $P(0)=\dfrac{0^{\nu}}{\nu!}+\dfrac{0^{\nu-1}}{(\nu-1)!}+\cdots+\dfrac{0}{1!}+1=1$. Συνεπώς $1=0$ που είναι και άτοπο. Άρα το $P(x)$ δεν έχει ρίζα p με πολλαπλότητα $\kappa \geq 2$

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u> Αν $\kappa=2$ είναι : $\begin{array}{l} P(x)=(x-p)^{2}\sigma(x) \\ P'(x)=(x-p)\left[2\sigma(x)+(x-p)\sigma'(x)\right] \end{array}$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 11</u>

$f(x)=x+2+\ell n\left(x^{2}+1\right)$ $\quad A=\mathbb{R}$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με:

$$f'(x)=1+\frac{2x}{x^{2}+1}=\frac{x^{2}+1+2x}{x^{2}+1}=\frac{(x+1)^{2}}{x^{2}+1}\geq 0$$

Η ισότητα στην παραπάνω ανισοισότητα ισχύει για $x=-1$. Δηλαδή για διακεκριμένο σημείο του πεδίου ορισμού της f. Συνεπώς η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το πεδίο ορισμού της. Εφόσον είναι στο $\mathbb{R}$, είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+2+\ln\left(x^{2}+1\right)\right)=\lim_{x\to-\infty} x\left[1+\frac{2}{x}+\frac{\ln\left(x^{2}+1\right)}{x}\right]$$

Όμως: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{\ln\left(x^{2}+1\right)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\ln\left(x^{2}+1\right)\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x^{2}+1}=0$

Άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty[1+0+0] = -\infty$ Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ θα υπάρχει περιοχή του $-\infty$ τέτοια ώστε το $f(x)$ να έχει το πρόσημο του ορίου. Δηλαδή $f(x) \prec 0$. Άρα υπάρχει $\alpha \in \Pi -\infty$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) < 0$. Ομοίως επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ θα υπάρχει $\beta > 0$ τέτοιο ώστε $f(\beta) > 0$. Δηλαδή η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) f(\beta) < 0$. Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_o) = 0$. Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα (όπως αποδείξαμε), η ρίζα είναι μοναδική.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 12</u>

Θεωρώ τη συνάρτηση $\sigma(x) = f(x) - x^3 - x - 1$ με $A = [0,2]$ Είναι:

$$\left.\begin{aligned} \sigma(0) &= f(0) - 0 - 0 - 1 = 1 \\ \sigma(2) &= f(2) - 8 - 2 - 1 = -8 \end{aligned}\right\} \varepsilon\chi\omega \ \ \sigma(0)\sigma(2) < 0$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[0,2]$. Άρα είναι και συνεχής. Άρα η $\sigma(x)$ είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $\sigma(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = \xi^3 + \xi + 1$. Έστω ότι το ξ δεν είναι μοναδικό, αλλά υπάρχει και το p με $p < \xi$ ή $\xi < p$. Έστω $p < \xi$. Η σ είναι συνεχής στο $[p, \xi]$ και παραγωγίσιμη στο (p, ξ) με $\sigma(p) = 0$ και $\sigma(\xi) = 0$. Από το Θεώρημα Rolle για τη $\sigma(x)$ έχουμε: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (p, \xi)$ τέτοιο ώστε

$\sigma'(x_o) = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) - 3x_o^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x_o) = 3x_o^2 - 1$: ΑΤΟΠΟ.

Ομοίως στο διάστημα $[\xi, p]$ Άρα υπάρχει μόνο ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \xi^3 + \xi + 1$.

ΑΣΚΗΣΗ 13

$f(x)=x^7+2x^3+x+3$ Η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα $\in \Re$ διότι είναι πολυώνυμο περιττού βαθμού. Θα δείξω ότι δεν έχει δύο διαφορετικές. Έστω ότι P_1, P_2 με $P_1<P_2$ είναι δύο ρίζες $\in \Re$. Δηλαδή $f(P_1)=f(P_2)=0$. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $[P_1,P_2]$ και παραγωγίσιμη στο (P_1,P_2). Σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle στο $[P_1,P_2]$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (P_1,P_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o=0)$ που είναι άτοπο διότι $f'(x_o)=7x_o^6+6x_o^2+1>0$ για κάθε $x_o \in \Re$. Θα δείξω ότι η f δεν έχει διπλή ρίζα (ή πολλαπλή). Έστω p τουλάχιστον διπλή ρίζα. Τότε $f(x)=(x-p)^2 Q(x)$

Με $f'(x)=2(x-p)Q(x)+(x-p)^2 Q'(x)=(x-p)\left[2Q(x)+(x-p)Q'(x)\right]$

Δηλαδή το $f'(x)$ έχει ρίζα το p που ομοίως είναι άτοπο. Η f είναι 7^{ου} βαθμού. Άρα στο C έχει 7 ρίζες εκ των οποίων η μία είναι πραγματική. Άρα έχει 6 μιγαδικές.

ΑΣΚΗΣΗ 14

$f(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2+x+1$ $A=\Re$ Είναι : $f'(1)=f'(2)=\lambda_{AB}$ (1)

$$\lambda_{AB}=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{16+8\alpha+4\beta+3-1-\alpha-\beta-2}{1}=7\alpha+3\beta+16$$

Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με : $f'(x)=4x^3+3\alpha x^2+2\beta x+1$

Δηλαδή
$$\begin{aligned} f'(1)&=4+3\alpha+2\beta+1=3\alpha+2\beta+5\\ f'(2)&=32+12\alpha+4\beta+1=12\alpha+4\beta+33\end{aligned}$$

Άρα λόγω της (1):
$$\left.\begin{aligned}3\alpha+2\beta+5&=7\alpha+3\beta+16\\ 12\alpha+4\beta+33&=7\alpha+3\beta+16\end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned}\beta&=+13\\ \alpha&=-6\end{aligned}\right\}$$

Δηλαδή $f(x)=x^4-6x^3+13x^2+x+1$