**ΑΣΚΗΣΗ 15**

Εφόσον η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη θα είναι και συνεχής και μια φορά παραγωγίσιμη. Δηλαδή μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\alpha,\gamma]$ και $[\gamma,\beta]$. Συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=0$. Επίσης υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (\gamma,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=0$. Τέλος, εφαρμόζοντας το Θεώρημα για την $f'$ στο $[\xi_1,\xi_2]\subset(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

---

**ΑΣΚΗΣΗ 16**

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=f(x)g(x)$ με $A=[\alpha,\beta]$. Είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. $\begin{matrix} F(\alpha)=f(\alpha)g(\beta) \\ F(\beta)=f(\beta)g(\beta) \end{matrix}$ όμως από υπόθεση είναι: $F(\alpha)g(\alpha)=f(\beta)g(\beta)=F(\alpha)=F(\beta)$. Άρα, από το Θεώρημα Rolle για την F στο $[\alpha,\beta]$ έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$$F'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0 \Leftrightarrow f'(\xi)g(\xi)=-f(\xi)g'(\xi) \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=-\frac{f(\xi)}{g(\xi)}$$

αφού από υπόθεση έχω ότι $g(x)\neq 0$ και $g'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

**ΑΣΚΗΣΗ 17** Είναι:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{1}{\alpha-\xi}+\frac{1}{\beta-\xi} \Leftrightarrow \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{\beta-\xi+\alpha-\xi}{(\alpha-\xi)(\beta-\xi)} \Leftrightarrow f'(\xi)(\alpha-\xi)(\beta-\xi)=f(\xi)[\alpha+\beta-2\xi] \Leftrightarrow$$

$f'(\xi)(\alpha-\xi)(\beta-\xi)-f(\xi)[\alpha+\beta-2\xi]$ (1) Όμως $[(\alpha-x)(\beta-x)]'=-(\beta-x)-(\alpha-x)$

$=-\beta+x-\alpha+x=2x-\alpha-\beta$ (2) Η (1) λόγω της (2) γίνεται: $[f(\xi)(\alpha-\xi)(\beta-\xi)]'=0$.



ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

Συνεπώς για να προκύψει το ζητούμενο, εφαρμόζω το Θεώρημα Rolle για την $F(x)=f(x)(\alpha-x)(\beta-x)$ στο $[\alpha,\beta]$

---

**ΑΣΚΗΣΗ 18**

$[f(x)-f'(x)]^2=2f'(x)f''(x)$ ή $f^2(x)+f'^2(x)-2f(x)f'(x)=2f'(x)f''(x)$ ή

$[f(x)]^2+[f'(x)]^2=2f(x)f'(x)+2f'(x)f''(x)$ ή $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=\left([f(x)]^2\right)+\left([f'(x)]^2\right)'$

ή $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=\left([f(x)]^2+[f'(x)]\right)'$ ή $F(x)=F'(x)$ (όπου $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$ )

ή $F(x)=ce^*$ ή $f^2(x)+[f'(x)]^2=ce^*$ Για $x=0$ έχω: $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=ce^o \Leftrightarrow$
$0+0=c \Leftrightarrow c=0.$

Άρα $[f(x)]^2+[f'(x)]^2=0$ για κάθε $x\in\Re.$ $\Leftrightarrow [f(x)]^2=0$ και $[f'(x)]^2=0$ για κάθε $x\in\Re.$ Όμως $[f(x)]^2=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ για κάθε $x\in\Re$

**ΑΣΚΗΣΗ 19(α,β,γ)**

β. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα γινομένων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με : $f(x)=e^x+\ell nx-e-1+x\frac{1}{x}=e^x+\ell nx-e$ Παρατηρώ ότι η άνιση $f'(x)>0$ δε λύνεται. Όμως $f'(1)=0$ Η $f'$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με : $f''(x)=e^x+\frac{1}{x}>0$ , αφού $x\in(0,+\infty)$ Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Αν $x>1$ έχω $f'(x)>f'(1)$ ή $f'(x)>0$ Αν $0<x<1$ έχω $f'(x)<f'(1)$ ή $f'(x)<0$ Η ρίζα $x=1$ του $f'(x)=0$ είναι μοναδική στο $(0,+\infty)$ Διότι η $f'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα. Άρα:

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

| x | 0 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'$ | | + |
| $f$ | ↘ | ↗ |
| | τ.μ. | τ.ελ. |

Για $0 < x < 1$ έχω $f(0) > f(x) > f(1)$ ή $1 > f(x)$ Δηλαδή για $x = 0$ έχω τοπικό μέγιστο το $f(0) = 1$. Ενώ, όπως φαίνεται στον πίνακα, για $x = 1$ έχω τοπικό ελάχιστο, το οποίο βέβαια είναι και ολικό. γ. Στο $[0,1]$ η $f$ είναι συνεχής με $f(0) = 1$ και $f(1) = -1$. Δηλαδή $f(0)f(1) < 0$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$ η οποία είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^x + x(\ln x - e - 1)\right] = +\infty$. Άρα, θα υπάρχει περιοχή του $+\infty$ στο πεδίο ορισμού τέτοιο ώστε $f(x) > 0$. Άρα θα υπάρχει α στο πεδίο ορισμού με $\alpha > 1$ τέτοιο ώστε $f(\alpha) > 0$. Στο $[1,\alpha]$ η $f$ είναι συνεχής με $f(\alpha)f(1) < 0$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της $f$ στο $(1,\alpha)$ η οποία τελικά είναι μοναδική λόγω της μονοτονίας της $f$. Συνεπώς η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

**<u>ΑΣΚΗΣΗ 20</u>**

α, β, γ, δ. δ). Είναι : $f(2) = \left(2^2\right)^{\frac{1}{2^2}} = \sqrt[4]{4}$, $f(3) = \left(3^2\right)^{\frac{1}{3^2}} = \sqrt[9]{9}$, $f(4) = \left(4^2\right)^{\frac{1}{4^2}} = \sqrt[16]{16}$

Όμως, όπως φαίνεται από τον πίνακα, για $x > \sqrt{e}$ η f είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα: $2 < 3 < 4$ έχω $f(2) > f(3) > f(4)$ ή $\sqrt[4]{4} > \sqrt[9]{9} > \sqrt[16]{16}$ Άλλος τρόπος: (αν δεν ήξερα τη μονοτονία) <u>στη τύχη</u>: Έστω $\sqrt[4]{4} > \sqrt[9]{9} \Leftrightarrow \left(\sqrt[4]{4}\right)^{36} > \left(\sqrt[9]{9}\right)^{36} \Leftrightarrow 4^{\frac{4}{36}} > 9^{\frac{36}{9}} \Leftrightarrow$

$4^9 > 9^4 \Leftrightarrow 2^{18} > 3^8 \Leftrightarrow$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ webpage: users.att.sch.gr/tanzak/ e-mail: tanzak@sch.gr

$\left(2^6\right)^3 > \left(3^4\right)^2 \Leftrightarrow 64^3 > 81^2$ που ισχύει. Και εφόσον έχω εργαστεί με ισοδυναμίες ισχύει και η αρχική υπόθεση. Δηλ. $\sqrt[4]{4} > \sqrt[9]{9}$.

**ΑΣΚΗΣΗ 21**

α. $f(x) = 2 - \frac{1}{2}\ell nx$. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση, με : $f(x) = -\frac{1}{2x} < 0$ γιατί $1 \le x \le 2$. Άρα η $f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

$$f(\Delta) = [f(2)\ ,\ f(1)] = \left[2 - \frac{\ell n^2}{2}\ ,\ 2\right] \begin{array}{l} 1 \le 2 - \frac{\ell n^2}{2} \Leftrightarrow 0 \le 1 - \frac{\ell n^2}{2} \Leftrightarrow 0 \le \frac{2 - \ell n_2}{2} \Leftrightarrow \\ 0 \le 2 - \ell n^2 \Leftrightarrow \ell n^2 \le 2 \Leftrightarrow \ell n^2 \le \ell ne^2 \Leftrightarrow \end{array}$$

$2 \le e^2$ που ισχύει. Άρα $f(\Delta) \subseteq \Delta$ β. Θεωρώ τη συνάρτηση $\sigma(x) = f(x) - x$ ή

$$\sigma(x) = 2 - \frac{1}{2}\ell nx - x \text{ με } A = [1,2] \quad \left.\begin{array}{l} \sigma(1) = 2 - \frac{1}{2}\ln 1 - 1 = 1 \\ \sigma(2) = 2 - \frac{1}{2}\ln 2 - 2 = -\frac{1}{2}\ln^2 \end{array}\right\} \sigma(1)\ \sigma(2) \prec 0$$

Η $\sigma(x)$ είναι συνεχής στο Α ως άθροισμα συνεχών. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano, υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της $\sigma(x)$ στο $(1,2)$. Όμως η $\sigma(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο Α ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με: $\sigma'(x) = f'(x) - 1 = -\frac{1}{2x} - 1 < 0$ για κάθε $x \in A$. Δηλαδή η $\sigma(x)$ είναι γνησίως μονότονη συνάρτηση και άρα έχει το πολύ μια ρίζα στο Α. Συνεπώς έχει ακριβώς μια ρίζα στο Α. Δηλαδή η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μοναδική λύση στο $[1,2]$.

**ΑΣΚΗΣΗ 22**

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \ell nx - x + 1$ με $A = (0,+\infty]$ Παρατηρώ ότι $f(1) = \ell n1 - 1 + 1 = 0$. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο Α ως άθροισμα παραγωγίσιμων στο Α συναρτήσεων, με : $f'(x) = \frac{1}{x} - 1$ $f'(x) => 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow 1 > x$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | |
| $f$ | ↘ | | ↗ |

τ.μ.

Όπως φαίνεται από τον πίνακα, το τοπικό μέγιστο $f(1)=0$ είναι και ολικό. Άρα με βάση τη μονοτονία καταλαβαίνω ότι η $C_f$ δεν είναι δυνατόν να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε άλλο σημείο εκτός από το $x=1$. Συνεπώς το $x=1$ είναι η μοναδική ρίζα της f, δηλαδή η μοναδική λύση της $\ell nx - x + 1 = 0$.

**ΑΣΚΗΣΗ 23**

$g(x)=\left(\dfrac{f(x)}{e^{3x}}\right)' = \dfrac{f'(x)e^{3x} - f(x)3e^{3x}}{e^{6x}} = \dfrac{f'(x)-3f(x)}{e^{3x}}$ Η $g$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με :

$$g'(x)=\left[\frac{f'(x)-3f(x)}{e^{3x}}\right]' = \frac{[f''(x)-3f'(x)]e^{3x} - 3[f'(x)-3f(x)]e^{3x}}{\left(e^{3x}\right)^2} =$$

$$= \frac{f''(x)-3f'(x)-3f'(x)+9f(x)}{e^{3x}} = \frac{2e^{3x}}{e^{3x}} = 2$$

Άρα $g'(x)=2 \Leftrightarrow g(x)=2x+c$. Για $x=0$ έχω: $g(0)=0+c \Leftrightarrow c=0$ Συνεπώς $g(x)=2x$. $g(x)=\left[\dfrac{f(x)}{e^{3x}}\right]'$ ή $2x=\left[\dfrac{f(x)}{e^{3x}}\right]'$ ή $\left(x^2\right)'=\left[\dfrac{f(x)}{e^{3x}}\right]'$ ή $\dfrac{f(x)}{e^{3x}}=x^2+c$ ή $f(x)=\left(x^2+c\right)e^{3x}$ Για $x=1$ έχω $f(1)=(1+c)e^3 \Leftrightarrow 0=(1+c)e^3 \Leftrightarrow c=-1$ Άρα $f(x)=\left(x^2-1\right)e^{3x}$

**ΑΣΚΗΣΗ 24**

α. Υπάρχει στο σχολικό βιβλίο β. Ευθύ: $f(x)=ce^{-x} \Rightarrow f'(x)=-f(x)$.Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμη συναρτήσεων, με : $f'(x)=-ce^{-x}=-f(x)$

<u>Αντίστροφο</u>: $f'(x)=-f(x) \Rightarrow f(x)=ce^{-x}$, $f'(x)=-f(x) \Leftrightarrow f'(x)+f(x)=0$

webpage: users.att.sch.gr/tanzak/ e-mail: tanzak@sch.gr ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ

Θα δείξω $\frac{f(x)}{e^{-x}} = c \Rightarrow \left[\frac{f(x)}{e^{-x}}\right]' = \frac{f'(x)e^{-x} + f(x)e^{-x}}{\left(e^{-x}\right)^2} = \frac{f'(x) + f(x)}{e^{-x}} = 0$ Άρα $\frac{f(x)}{e^{-x}} = c$ ή

$f(x) = ce^{-x}$

**ΑΣΚΗΣΗ 25**

Θεωρώ τη συνάρτηση $F(x) = f^2(x) - [f'(x)]^2$ που είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με : $\begin{aligned} F'(x) &= 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f''(x) \\ &= 2f(x)f'(x) - 2f'(x)f(x) = 0 \end{aligned}$ Άρα $F(x) = c$

Για $x = 0$ έχω: $F(0) = f^2(0) - [f'(0)]^2 = 1 - 1 = 0$ Δηλαδή $c = 0$. Άρα $F(x) = 0$ ή

$f^2(x) - [f'(x)]^2 = 0$. Ή $\{f(x) - [f'(x)]\}\ \{f(x) + f'(x)\} = 0$ Ή $\begin{Bmatrix} f(x) = f'(x) \\ f(x) = -f'(x) \end{Bmatrix}$ ή

$\begin{Bmatrix} f(x) = c_1 e^x \\ f(x) = c_2 e^{-x} \end{Bmatrix}$ (1) Για $x = 0$ η $(1\alpha)$ γίνεται $f(0) = c_1 \Leftrightarrow c_1 = 1$ Δηλαδή $f(x) = e^x$

Για $x = 0$ η $(1\beta)$ γίνεται $f(0) = c_2 \Leftrightarrow c_2 = 1$ Δηλαδή $f(x) = e^{-x}$ με $f'(x) = e^{-x}$

Όμως για $x = 0$ η $f(x) = -f'(x)$ γίνεται: $e^{-o} = -e^{-o} \Leftrightarrow 1 = -1$ που είναι άτοπο. Συνεπώς η $(1\beta)$ απορρίπτεται, ενώ η $(1\alpha)$ είναι δεκτή και έχουμε $f(x) = e^x$

**ΑΣΚΗΣΗ 26**

Έστω $P_1, P_2$ : ρίζες του $p(x)$. Δηλαδή $P(p_1) = P(p_2) = 0$. Το $P(x)$ ως πολυώνυμο, είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle για το $P(x)$ στο $[p_1, p_2]$ έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα $p \in (p_1, p_2)$ για το $P'(x)$. Έστω $\xi_1, \xi_2$ : με ρίζες του $P'(x)$ με $\xi_1 < \xi_2$. Αν $\xi_1 < p_1 < p_2 < \xi_2$ με $P(p_1) = (p_2) = 0$ , τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Rolle για την $P(x)$ στο $p_1, p_2$ προκύπτει ότι υπάρχει κι άλλη ρίζα $\xi_3$ για το $P'(x)$ που είναι άτοπο. Δηλαδή μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της $P'(x)$ υπάρχει μία το πολύ ρίζα της $P(x)$.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

**ΑΣΚΗΣΗ 27**

Έστω $p_1, p_2, p_3$ οι τρεις ρίζες του $P(x)$ με $p_1 < p_2 < p_3$ . Εφαρμόζοντας Θεώρημα Rolle για το $P(x)$ στα $[p_1, p_2]$ και $[p_2, p_3]$ έχω ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (p_1, p_2)$ τέτοιο ώστε $P'(\xi_1) = 0$ και ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (p_2, p_3)$ τέτοιο ώστε $P'(\xi_2) = 0$. Εφόσον το $P(x)$ είναι 3ου βαθμού, το $P'(x)$ είναι δεύτερου βαθμού και άρα έχει δύο ρίζες στο C. Η $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma\kappa + \delta$ είναι παραγωγίσιμη, με: $f'(x) = 4x^3 + 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$. Εφόσον έχει τρία διαφορετικά ακρότατα, η $f'$ θα έχει τρεις διαφορετικές ρίζες. Έστω $P_1, P_2, P_3$. Δηλαδή είναι:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4(x - P_1)(x - P_2)(x - P_3) \\
&= 4\left(x^2 - xp_2 - xp_1 + P_1, P_2\right)(x - p_3) \\
&= 4\left(x^3 - x^2 P_3 - x^2 P_2 + xP_2P_3 - P_1x^2 + P_1P_3x + P_1, P_2x - P_1, P_2, P_3\right) \\
&= 4x^3 + x^2\left(-4P_2 - 4P_1 - 4P_3\right) + x\left(4P_2, P_3 + 4P_1P_3 + 4P_1P_2\right) - P_1, P_2, P_3
\end{aligned}$$

Άρα εκ ταυτότητος ισχύει: $\left\{\begin{aligned} 3\alpha &= -4P_2 - 4P_1 - 4P_3 \\ 2\beta &= 4P_2P_3 + 4P_1P_3 + 4P_1P_2 \\ \gamma &= -P_1P_2P_3 \end{aligned}\right\}$ Θέλω να δείξω ότι

$3\alpha^2 > 8\beta \Leftrightarrow$

$$3\frac{16}{9}\left(P_1 + P_2 + P_3\right)^2 > 4.4\left(P_2P_3 + P_1P_3 + P_1P_2\right) \Leftrightarrow \left(P_1 + P_2 + P_3\right)^2 > 3\left(P_2P_3 + P_1P_3 + P_1P_2\right) \Leftrightarrow$$

$$P^2{}_1 + P^2{}_2 + P^2{}_3 > P_1P_2 + P_1P_3 + P_2P_3 \Leftrightarrow P^2{}_1P^2{}_2P^2{}_3 - P_1P_2 - P_1P_3 - P_2P_3 > 0 \Leftrightarrow$$

$\frac{1}{2}\left[(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2\right] > 0$ που ισχύει

**ΑΣΚΗΣΗ 28**

α. $f(x) = \frac{\ell nx}{x}$ $A = (0, +\infty)$ β. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x . \lim\limits_{x \to 0^+} x = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

Άρα έχω κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 0$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak
e-mail: tanzak@sch.gr

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\ \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = 0\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\ \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Άρα έχω οριζόντια ασύμπτωτη, την $y = 0$

---

$$f''(x) = \left[\frac{1-\ell nx}{x^2}\right]' = \frac{-\frac{1}{x}x^2 - (1-\ell nx)2x}{x^4} = \frac{2\ell nx - 3}{x^3}\quad \text{στ.}\quad f\left(\sqrt{e^3}\right) = \frac{\ell ne^{3/2}}{e^{3/2}} = \frac{2}{3e^{3/2}}$$

ζ. $e^x \ge x^e \Leftrightarrow \ell ne^x \ge \ell nx^e \Leftrightarrow x \ge e\ell nx$: ισχύει διότι από το τοπικό μέγιστο $f(x) \le f(e)$ ή $\frac{\ell nx}{x} \le \frac{1}{e}$ ή $e\ell nx \le x$.Ν. $e < 100 < 101$ ή $\frac{\ell n100}{100} > \frac{\ell n101}{101}$ ή

$101\ell n100 > 100\ell n101$ ή $\ell n100^{101} > \ell n101^{100}$ ή $100^{101} > 101^{100}$

**ΑΣΚΗΣΗ 29**

α. $f(x) = \frac{\ell nx - 1}{x - e}$ $A = (0,e)\cup(e,+\infty)$ Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη, την $\psi = 0$.

Γ. $$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x-e) - (\ell nx - 1)}{(x-e)^2} = \frac{1 - \frac{e}{x} - \ell nx + 1}{(x-e)^2} = \frac{2 - \ell nx - \frac{e}{x}}{(x-e)^2} = \frac{2x - x\ell nx - e}{x(x-e)^2}$$

Επειδή η ανίσωση $f'(x) > 0$ επιλύεται δύσκολα, θεωρώ τη συνάρτηση $\sigma(x) = 2x - x\ell nx - e$ με $A = (0,e)\cup(e,+\infty)$ που είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με : $\sigma'(x) = 2 - \ell nx - 1 = 1 - \ell nx$

$\sigma'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ell nx = 0 \Leftrightarrow \ell nx = 1 \Leftrightarrow x = e,\quad \sigma'(x) > 0 \Leftrightarrow 1 - \ell nx > 0 \Leftrightarrow x < e$

Άρα $\sigma(x)$: γ.α στο $(0,e)$ και γ.φ στο $(e,+\infty)$. Άρα για $x < e$ έχω $\sigma(x) < \sigma(e)$ ή $2x - x\ell nx - e < 0$ ή $f'(x) < 0$ ,ενώ για $x > e$ έχω $\sigma(x) < \sigma(e)$ ή $2x - x\ell nx - e < 0$ ή $f'(x) < 0$. Το πρόσημο του $f'(x)$ ταυτίζεται με το πρόσημο του $\sigma(x)$, με το πρόσημο του αριθμητή γιατί ο παρονομαστής είναι πάντα θετικός.

Συνεπώς δεν έχω ακρότατα. ε) Πρόχειρη γραφική παράσταση

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ webpage: users.att.sch.gr/tanzak/ e-mail: tanzak@sch.gr

**ΑΣΚΗΣΗ 30**

Εφαρμόζω στο $\left[\alpha\,,\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right]$ Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $f$ (οι προϋποθέσεις ισχύουν για οποιοδήποτε διάστημα $\subseteq[\alpha,\beta]$ κι αν διαλέξω, αφού η $f$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$. Δηλαδή υπάρχει $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}=\frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Ομοίως για το διάστημα $\left[\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ \beta\right]$ έχω $\xi_2$ με $\xi_2\in\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ ,\beta\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}$

Εφαρμόζω Θεώρημα Μέσης Τιμής για την $f'$ στο $[\xi_1,\xi_2]$ και έχω ότι υπάρχει $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}$

$$=\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+f(\alpha)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=0$$

**ΑΣΚΗΣΗ 31**

$f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}\quad A=[0,+\infty)$

Η $f$ είναι παραγωγίσιμη στο Α ως πηλίκο παραγωγίσιμων στο Α συναρτήσεων, με:

$f'(x)=\dfrac{e^x(x^2+1)-e^x 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1$ , δηλαδή για συγκεκριμένο σημείο του Α. Συνεπώς η $f$ είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Α. Δηλαδή για $0\leq x$ έχω $f(0)\leq f(x)$. Άρα έχω ολικό ελάχιστο στο $x_o=0$ το $f(0)=1$. Θέλω $e^x\geq x^2+1$ για $x\geq 0$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

$\Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x^2+1} \geq 1$ που ισχύει διότι στο $1 = f(0)$ έχω ολικό ελάχιστο.

**ΑΣΚΗΣΗ 32**

$f(x) = \dfrac{2+\ell nx}{x}$ με $A = (0,+\infty)$. Η $f$ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων στο Α συναρτήσεων, με : $f'(x) = \dfrac{1-2-\ell nx}{x^2} = \dfrac{-1-\ell nx}{x^2}$

$-1-\ell nx > 0 \Leftrightarrow -1 > \ell nx \Leftrightarrow \ell nx < -1 \Leftrightarrow \ell nx < \ell ne^{-1} \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{e}$

| x | 0 | 1/ε | +∞ |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | + | |
| $f$ | ↘ | | ↗ |

τ.ε.

Από τον πίνακα βλέπω ότι στο $x = 1/e$ έχω τοπικό ελάχιστο το $f(1/e)$ το οποίο τελικά είναι ολικό ελάχιστο. $f(x) \leq f(1/e)$ ή $f(x) \leq \dfrac{2+\ell n\, 1/e}{\frac{1}{e}} = e(2+\ell n1-\ell ne) = e$

ή $\dfrac{2+\ell nx}{x} \leq e$ ή $\ell nx \leq ex-2$ για κάθε $x > 0$.

**ΑΣΚΗΣΗ 33**

Η $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f'(x) = 3x^2 + 2\alpha x + \beta$. Για να έχει τοπικά ακρότατα σε δύο σημεία, δηλαδή η εξίσωση $f'(x) = 0$ να έχει δύο άνισες ρίζες

$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - 3\beta > 0 \Leftrightarrow \alpha^2 > 3\beta$

$$\left.\begin{array}{r} f'(1)=0 \\ f'(-1)=0 \\ f(-1)=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} 3+2a+\beta=0 \\ 3-2a+\beta=0 \\ -1+a-\beta+\gamma=5 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} a=0 \\ \beta=-3 \\ \gamma=3 \end{array}\right\}$$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

Επαληθεύω ότι έχω ακρότατο, αν δεν είναι δοσμένο.

$f(x)=x^3-3x+3$ ή $f'(x)=3x^2-3$ ή $f''(x)=6x$ ή $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$

Δηλαδή έχω πράγματι τοπικά ακρότατα για $x=\pm 1$. $f'(1)=6>0$ : τοπικό ελάχιστο για $x=1$. $f''(-1)=-6<0$ : τοπικό μέγιστο για $x=-1$

**ΑΣΚΗΣΗ 34**

1. $g(x)=(x+1)^2 e^x = x^2e^x+2xe^x+e^x=\left(x^2e^x\right)'+\left(e^x\right)'=\left(x^2e^x+e^x\right)'$

Άρα η παράγουσα της $g$ είναι $G(x)=x^2e^x+e^x$. 2. $f(x)f'(x)=g(x)$ ή $g(x)=\frac{1}{2}\left(f^2(x)\right)'$ ή $g(x)=\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]'$ Άρα άλλη μια παράγουσα της $g$ είναι η $\frac{1}{2}f^2(x)$ Οπότε $\frac{1}{2}f^2(x)=x^2e^x+e^x+c$ ή $f^2(x)=2\left(x^2e^x+e^x+c\right)$ Για $x=0: f^2(0)=2(0+1+c)\Leftrightarrow 2=2(1+c)\Leftrightarrow c=0$ Άρα $f(x)=\sqrt{2x^2e^x}+2e^x$ διότι $f(x)>0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

**ΑΣΚΗΣΗ 37**

$f'(x_o)=0$, διότι στο $x_o$ έχω ακρότατο. (1) Το $x_o$ είναι σημείο της $C_f$. Άρα είναι:

$x_of''(x_o)+3x_o[f'(x_o)]^2=1-e^{-x_o}$ ή λόγω της (1) $x_of''(x)=1-e^{-x_o}$ ή

$f''(x_o)=\left[1-\frac{1}{e^{x_o}}\right]\frac{1}{x_o}$ ή $f''(x_o)=\frac{e^{x_o}}{x_oe^{x_o}}$ ή $f''(x_o)=\frac{1}{e^{x_o}}\frac{e^{x_o}-1}{x_o}$

Αν $x_o>0$ τότε $e^{x_o}>e^o=1\Leftrightarrow e^{x_o}-1>0\Leftrightarrow f''(x_o)>0$

Αν $x_o<0$ τότε $e^{x_o}<e^o=1\Leftrightarrow e^{x_o}-1<0\Leftrightarrow f''(x_o)>0$

Συνεπώς για κάθε $x_o\in\Re^*$ έχω ότι $f''(x_o)>0$ Δηλαδή στο $x_o$ έχω ελάχιστο.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e.mail: tanzak@sch.gr

**ΑΣΚΗΣΗ 38**

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x^2\left(\ell n|x| - \alpha\right) & , \ x \neq 0 \\ 0 & , \ x \neq 0 \end{cases}$$

α : σταθερό. Για $x \neq 0$ η $F_\alpha$ είναι παραγωγίσιμη ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Στο $x = 0$ εργάζομαι με τον ορισμό.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr