ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ
ΘΕΩΡΗΜΑ Rolle, ΘΕΩΡΗΜΑ Μέσης Τιμής, ΘΕΩΡΗΜΑ Fermat

ΑΣΚΗΣΗ 1

Α' ΤΡΟΠΟΣ Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = x^3 + 6x + 1$, $A = \Re$ Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3x^2 + 6 > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$. Συνεπώς δεν μπορεί να έχει παραπάνω από μια πραγματική ρίζα.

Β' ΤΡΟΠΟΣ Έστω ότι έχει τρεις ρίζες: $P_1, P_2, P_3 \in \Re$ Δηλαδή είναι $f(p_1) = f(p_2) = f(p_3) = 0$ Η f είναι συνεχής στα $[P_1, P_2]$ και $[P_2, P_3]$ και παραγωγίσιμη στα (P_1, P_2) *και* (P_2, P_3). Άρα εφαρμόζοντας δύο φορές το θεώρημα Rolle, έχουμε:

Ι. Υπάρχει $x_1 \in (P_1 P_2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$ ΙΙ.Υπάρχει $x_2 \in (P_2, P_3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_2) = 0$.Όμως όπως έδειξα στον Α' ΤΡΟΠΟ είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$. Δηλαδή κατέληξα σε άτοπο. Συνεπώς η $x^3 + 6x + 1 = 0$ δε μπορεί να έχει τρεις άνισες ρίζες $\in \Re$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = x^6 + \alpha x + \beta$, $\alpha, \beta \in \Re$.Έστω ότι έχει τρεις ρίζες. $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ με $\mathrm{P}_1 < \mathrm{P}_2 < \mathrm{P}_3$. Δηλαδή ισχύει: $g(\mathrm{P}_1) = g(\mathrm{P}_2) = (\mathrm{P}_3)$. Η f είναι συνεχής στο $\Re$ ως πολυωνυμική. Άρα θα είναι συνεχής και στα υποδιαστήματα $[\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2]$ *και* $[\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3]$.

Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$ ως πολυωνυμική και συνεπώς θα είναι και στα υποδιαστήματα $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ *και* $(\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$.Άρα οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle ικανοποιούνται στα διαστήματα: $[\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2]$ *και* $[\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3]$. Συνεπώς υπάρχει

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

$x_1 \in (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ τέτοιο ώστε:(1) $g'(x_1) = 0$, υπάρχει $x_2 \in (\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3)$ τέτοιο ώστε: (2) $g'(x_2) = 0$. Όμως για κάθε $x \in \Re$ είναι: $g'(x) = 6x^5 + \alpha$ και $g''(x) = 30x^4$

Δηλαδή $g''(x) \geq 0$ με το ίσον να ισχύει για ένα μόνο σημείο. Άρα η $g'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$ και άρα έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα. Συνεπώς έχω καταλήξει σε άτοπο, γιατί μέσω των (2), (3) έχω ότι τα x_1, x_2 $\mu\varepsilon$ $x_1 \neq x_2$ εξ υποθέσεως, είναι ρίζες της g'. Δηλαδή η g και κατ' επέκταση η εξίσωση $x^6 + \alpha x + \beta = 0$ έχουν το πολύ δύο ρίζες $\in \Re$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 3</u>

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = x^6 - 2x^2 + x$ με $\mathrm{A} = [0,\ 1]$ Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης $g(0) = 0$ και $g(1) = 0$ Άρα για τη g ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σύμφωνα με το οποίο έχουμε: Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\ 1)$ (1) $g'(\xi) = 0$ Όμως για κάθε $x \in \mathrm{A}$ είναι: $g'(x) = 6x^5 - 4x + 1$ Άρα λόγω της (1) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\ 1)$ Τέτοιο ώστε η εξίσωση: $6x^5 - 4x + 1 = 0$ να επαληθεύεται.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 4</u>

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = e^x$ Ι. Με $\mathrm{A} = [0,\ x]$ Η g είναι συνεχής στο Α και παραγωγίσιμη στο $(0, x)$ ως εκθετική. Δηλαδή μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Μέσης Τιμής σύμφωνα με το οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,\ x)$ τέτοιο ώστε: (2) $g'(x_o) = \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \dfrac{e^x - e^o}{x} = \dfrac{e^x - 1}{x}$ Όμως για κάθε $x \in \Re$ ισχύει: $g'(x) = e^x$ (1) Επίσης $0 < x_o < x$ ή $e^o < e^{x_o} < xe^x$ γιατί η g είναι γνησίως

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.atl.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

αύξουσα. Λόγω των (1) και (2) η τελευταία ανισότητα γίνεται: $e^o < \frac{e^x - 1}{x} < xe^x$ ή (με x> 0) $x < e^x - 1 < xe^x$ ή $e^x > 1 + x$ ΙΙ. Με $A = [x, 0]$ Η g είναι συνεχής στο Α και παραγωγίσιμη στο $(x, 0)$ ως εκθετική. Δηλαδή μπορώ να εφαρμόζω το Θεώρημα Μέσης Τιμής σύμφωνα με το οποίο υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (x,\ 0)$ τέτοιο ώστε: $g'(x_o) = \frac{g(0) - g(x)}{0 - x}$ ή λόγω της (1) $e^{x_o} = \frac{e^o - e^x}{-x}$ ή $e^{x_o} = \frac{e^x - 1}{x}$ (3). Είναι: $x < x_o < 0$ ή $e^x < e^{x_o} < e^o$ γιατί η g είναι: $\nearrow$ και λόγω της (3) έχουμε: $e^x < \frac{e^x - 1}{x} < 1$ ή με x <0 $xe^x > e^x - 1 > x$ ή $e^x > x + 1$. Συνεπώς για κάθε $x \in \Re$ ισχύει: $e^x \geq x + 1$ όπου η ισότητα ισχύει για $x = 0$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 5</u>

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \ell nx$ Ι. Στο διάστημα $A = [1, x]$ Η f είναι συνεχής στο $[1, x]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, x)$ Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $x_o \in (1,\ \mathrm{x})$ τέτοιο ώστε:

$$f'(x_o) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\ell nx - \ell n_1}{x - 1} = \frac{\ell nx}{x - 1} (1)$$

Όμως για κάθε $x \in \Re$ ισχύει: $f'(x) = (\ell nx)' = \frac{1}{x}$ (2)Από (1) και (2) έχω:Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (1, x)$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{x_o} = \frac{\ell nx}{x - 1}$ όμως $1 < x_o < x$ ή $1 > \frac{1}{x_o} > \frac{1}{x}$ ή $1 > \frac{\ell nx}{x - 1} > \frac{1}{x}$ ή με $x > 1$ $\ell nx < x - 1$ ΙΙ. Στο διάστημα $A = [x,\ 1]$ Η f είναι συνεχής στο $[x,\ 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x, 1)$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o) = \frac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ ή λόγω της

webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr
ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ

(2) $\frac{1}{x_o}=\frac{\ell n1-\ell nx}{1-x}$ ή $\frac{1}{x_o}=\frac{\ell nx}{x-1}$ Όμως $x<x_o<1$ $\frac{1}{x}>\frac{1}{x_o}>1$ ή $\frac{1}{x}>\frac{\ell nx}{x-1}>1$ ή με $x<1$ $\ell nx<x-1$ Άρα για κάθε $x\in\Re$ ισχύει: $\ell nx\le x-1$ όπου η ισότητα ισχύει για $x=1$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Θεωρώ τη συνάρτηση $\Phi(x)=x^{\nu}$ με $A=[\beta,\alpha]$ Η Φ είναι συνεχής στο $[\beta,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο (β,α) ως πολυωνυμική. Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής σύμφωνα με το οποίο: υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(\beta,\alpha)$ τέτοιο ώστε: $\Phi'(x_o)=\frac{\Phi(\alpha)-\Phi(\beta)}{\alpha-\beta}$ Όμως για κάθε $x\in(\beta,\alpha)$ είναι: $\phi'(x)=\nu x^{\nu-1}$ είναι: $\nu x_o^{\nu-1}=\frac{\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}}{\alpha-\beta}$ (1) Όμως $\beta<x_o<\alpha$ ή (αφού $\beta,\alpha\in\Re_+^*$

$\beta^{\nu-1}<x_o^{\nu-1}<\alpha^{\nu-1}$ ή $\nu\beta^{\nu-1}<\nu x_o^{\nu-1}<\nu\alpha^{\nu-1}$ ή λόγω της (1): $\nu\beta^{\nu-1}<\frac{\alpha^{\nu}-\beta^{\nu}}{\alpha-\beta}<\nu\alpha^{\nu-1}$

ΑΣΚΗΣΗ 7

Θεωρώ ότι η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+\lambda$ έχει δύο ρίζες στο $[0,1]$ έστω ότι είναι οι P_1 ,P_2. Δηλαδή $0\le P_1<P_2\le 1$. Τότε θα είναι: $f(P_1)=f(P_2)=0$. Η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $[P_1,P_2]$ και παραγωγίσιμη στο (P_1,P_2) με $f(P_1)=f(P_2)$. συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(P_1,P_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=0$. (1)Όμως για κάθε $x\in(P_1,P_2)$ είναι: $f'(x)=3x^2-3$ Άρα από την (1): $3x_o^2-3=0\Leftrightarrow x_o=\pm1$. Όμως είναι: $0\le l_1<x_o<l_2\le 1$ Δηλαδή $x_o\ne\pm1$. Άρα κατέληξα σε άτοπο. Δηλαδή η εξίσωση $x^3-3x+\lambda=0$ δε μπορεί να έχει δύο διαφορετικές ρίζες στο $[0,1]$.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzaki
email: tanzak@sch.gr

ΑΣΚΗΣΗ 8β

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x)=\alpha_o x^{\nu}+\alpha_1 x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_{\nu-1}x$ Εφόσον η εξίσωση $\alpha_o x^{\nu}+\alpha_1 x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_{\nu-1}x=0$ έχει μια θετική ρίζα x_o , είναι: $g(x_o)=0$.Επίσης $g(0)=0$.Όμως η g ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $[0,x_o]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,x_o)$ με $g(o)=g(x_o)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ x_o)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0$ Όμως για κάθε $x\in(0,\ x_o)$ είναι: $f'\ g'(x)=\alpha_o\nu x^{\nu-2}+\cdots+\alpha_{\nu-1}$ Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\ x_o)$, δηλαδή θετικός αριθμός μικρότερος από το x_o τέτοιος ώστε η εξίσωση: $\nu\alpha_o x^{\nu-1}+(\nu-1)\alpha,\ x^{\nu-2}+\cdots\alpha_{\nu-1}=0$ να επαληθεύεται.

ΑΣΚΗΣΗ 9

Θεωρώ τη συνάρτηση $\Phi(x)=\alpha_o\dfrac{1}{\nu+1}x^{\nu+1}+\dfrac{\alpha_1}{\nu}x^{\nu}+\cdots\dfrac{\alpha_{\nu-1}}{2}x^2+\alpha_\nu x$ με $\mathrm{A}=[0,\ 1]$

Η Φ είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ ως πολυωνυμική. επίσης είναι : $\Phi(0)=0$ και $\Phi(1)=\dfrac{\alpha_o}{\nu+1}+\dfrac{\alpha_1}{\nu}+\cdots+\alpha_\nu=0$ από υπόθεση. Δηλαδή $\Phi(0)=\Phi(1)$.Συνεπώς, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε $\Phi'(x_o)=0$ Όμως για κάθε $x\in(0,\ 1)$ είναι: $\Phi'(x)=\alpha_o x^{\nu}+\alpha_1\nu^{\nu-1}+\cdots+\alpha_{\nu-1}x+\alpha_\nu$ Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,\ 1)$ τέτοιο ώστε η εξίσωση $\Phi'(x_o)=\alpha_o x_o^{\nu}+\alpha_1 x_o^{\nu-1}+\cdots+\alpha_{\nu-1}x_o+\alpha_\nu=0$ να επαληθεύεται.

ΑΣΚΗΣΗ 10α

$f(x)=1+x^{\mu}(1-x)^{\nu}$, $\mu,\ \nu$ φυσικοί. Η f είναι συνεχής στο $[0,\ 1]$ ως πολυωνυμική. Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\ 1)$ ως πολυωνυμική. Τέλος

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

ισχύει $f(0)=f(1)=1$.Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (0,\,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_o)=0$

ΑΣΚΗΣΗ 11

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=\in \varphi\chi$ στο $[\beta,\alpha]$ με $\beta<\alpha$.Η f είναι συνεχής στο $[\beta,\alpha]$ και παραγωγίσιμη στο (β,α) ως τριγωνομετρική. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (\beta,\alpha)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}$ (1) Όμως για κάθε x έχω: $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$ Άρα $f'(x_o)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi_o}$ (2) Όμως $\beta<x_o<\alpha$ και επειδή $0<\beta\le\alpha<\pi/2$ Έχω $\sigma\upsilon\nu\beta>\sigma\upsilon\nu\chi_o>\sigma\upsilon\nu\alpha$, διότι στο πρώτο τεταρτημόριο η συνάρτηση $h(x)=\sigma\upsilon\nu\chi$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα έχω: $\sigma\upsilon\nu^2\beta>\sigma\upsilon\nu^2\chi_o>\sigma\upsilon\nu^2\alpha \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\chi_o}<\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ (3)Από τις (1), (2), (3) παίρνω:

$\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\dfrac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}<\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ ή $\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{\alpha-\beta}<\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ ή με $\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}<\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta<\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$ Η σχέση που πρέπει να αποδείξουμε είναι ανισοισότητα. Το ίσον της ισχύει για $\alpha=\beta$. Άρα για $0<\beta\le\alpha<\pi/2$ είναι: $\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\beta}\le\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta\le\dfrac{\alpha-\beta}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$

ΑΣΚΗΣΗ 11α

Έστω P_1,P_2,P_3 οι τρεις διαφορετικές ρίζες της f Δηλαδή είναι $f(P_1)=f(P_2)=f(P_3)=0$ Εφόσον η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη, είναι και

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
Webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

παραγωγίσιμη είναι και συνεχής. Άρα η f είναι συνεχής και τα υποδιαστήματα : $[P_1,P_2]$ και $[P_2,P_3]$ και επίσης είναι παραγωγίσιμη στα (P_1,P_2) και (P_2,P_3) Σύμφωνα, λοιπόν, με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (P_1,P_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_1)=0$ (1)Και ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (P_2,P_3)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_2)=0$ (2) Εφόσον υπάρχει η f'', η f' είναι συνεχής. Άρα η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $f'(x_1)=f(x_2)=0$. Σύμφωνα, λοιπόν, με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (x_1,x_2)$ τέτοιο ώστε: $f''(x_o)=0$ Δηλαδή η f'' έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 11β</u>

$f(x)=(2x+1)(x+1)(x+2)(x+3)=(2x^2+3x+1)(x^2+5x+6)$

$=2x^4+10x^3+12x^2+3x^3+15x^2+18x+x^2+5x+6=2x^4+13x^3+28x^2+23x+6$

$g(x)=8x^3+39x^2+56x+23$.Παρατηρώ ότι $f'(x)=g(x)$ (1)Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική με $f\left(-\frac{1}{2}\right)=f(-1)=f(-2)=f(-3)=0$.

Άρα μπορώ να εφαρμόσω το Θεώρημα Rolle τρεις φορές και να εξάγω τα εξής συμπεράσματα: I. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (-3,-2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_1)=0$ ή λόγω της (1) $g(x_1)=0$ II. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (-2,-1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_2)=0$ ή λόγω της (1): $g(x_2)=0$. III. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3 \in \left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(x_3)=0$ ή λόγω της (1): $g(x_3)=0$ με $-3<x_1<-2<x_2<-1<x_3<-\frac{1}{2}$.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

ΑΣΚΗΣΗ 13

Εφόσον η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ θα είναι συνεχής και τα υποδιαστήματα $\left[\alpha\ ,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ \beta\right]$. Ομοίως αφού είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) θα είναι και στα $\left(\alpha\ ,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ και $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ \beta\right)$. Δηλαδή η f ικανοποιεί στα δύο παραπάνω διαστήματα τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής το οποίο εφαρμόζοντας δύο φορές έχω: Ι. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha\ ,\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_1)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}$ (1) ΙΙ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\ ,\ \beta\right)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}$ (2) Προσθέτω τις (1), (2) και έχω: $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha}+\dfrac{f(\beta)-\frac{f(\alpha+\beta)}{2}}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$=\dfrac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)+f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\frac{\beta-\alpha}{2}}=0$ αφού από υπόθεση $f(\alpha)=f(\beta)$

ΑΣΚΗΣΗ 14

$f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$ Απαιτώ $x^3-3x+2\geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -2$ Άρα $A=[-2\ ,\ +\infty]$ Η f είναι συνεχής στο Α ως πολυωνυμική. Επίσης είναι παραγωγίσιμη στο Α με $f'(x)=\left[\left(x^3-3x+2\right)^{1/3}\right]'=\frac{1}{3}\left(x^3-3x+2\right)^{-2/3}\left(x^3-3x+2\right)'$

webpage: users.at.sch.gr/tanzak
e-mail: tanzak@sch.gr
ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ

$=\frac{1}{3}\left(x^3-3x+2\right)^{-2/3}\left(3x^2-3\right)\ \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$ Με $x\in(-2,1)\cup(1,+\infty)$. Ως κρίσιμα σημεία ορίζονται: Ι. Οι ρίζες της f'. ΙΙ. Τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος.

Ι. $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 & \text{: απορρίπτεται} \\ \chi=-1 & \text{: δεκτή} \end{cases}$

ΙΙ. Βρίσκω το

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}-0}{x+2}\ \left[=\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\left(x^3-3x+2\right)^{1/3}\right)'}{(x+2)'}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-1}{\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}}$$ Όμως

$\lim_{x\to -2}\left(x^2-1\right)=3,\quad \lim_{x\to -2}\sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}=0\ \ \sqrt[3]{\left(x^3-3x+2\right)^2}\succ 0$ για $x\in(-2,1)\cup(1,+\infty)$

Από τις παραπάνω εξισώσεις έχω: $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2}=+\infty$.Δηλαδή δεν ορίζεται η f' στο $x_o=-2$. Η f είναι συνεχής στο $x_o=-2$. Όμως το $x_o=-2$ <u>δεν είναι κρίσιμο σημείο γιατί δεν είναι εσωτερικό</u>.

<u>ΣΗΜΕΙΩΣΗ</u>: Για το $x_o=-2$ γενικά, δε θα εργαζόμαστε, από τη στιγμή που το x_o δεν είναι εσωτερικό σημείο, γιατί γνωρίζουμε εξ' αρχής ότι δεν είναι δυνατόν να είναι κρίσιμο σημείο. Όμως, στην περίπτωση που μας δοθεί μια ανάλογη άσκηση αναφέρουμε ότι το τάδε σημείο (στην περίπτωσή μας το -2), στο οποίο η πρώτη παράγωγος υπάρχει περίπτωση να μην ορίζεται, δεν είναι κρίσιμο σημείο από τη στιγμή που δεν είναι εσωτερικό. Ομοίως θα εξετάσω αν υπάρχει η f' στο $x_o=1$.

Είναι: $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x^3-3x+2}-0}{x-1}=$ $=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+2}}{\sqrt[3]{|x-1|}}$

Είναι: $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{x+2}=\sqrt[3]{3}$ $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{|x-1|}=0$ Από τα $\lim_{x\to 1}\sqrt[3]{|x-1|}\succ 0$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

παραπάνω προκύπτει: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\propto$ Δηλαδή η f' δεν ορίζεται στο $x_o=1$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_o=1$, το οποίο είναι και εσωτερικό σημείο. Άρα είναι κρίσιμο σημείο. Συνεπώς η f έχει κρίσιμα σημεία τα: $x_o=-1$ και $x_o=1$

ΑΣΚΗΣΗ 17

$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)}^2-1$ $\quad$ $A=\Re$. Η f είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως άθροισμα δύο συνεχών συναρτήσεων στο $[0,2]$ της $\pi(x)=\sqrt[3]{(x-1)}^2$ που είναι σύνθεση των $\Phi(x)=\sqrt[3]{x}$, $\kappa(x)=x^2$, $\sigma(x)=(x-1)$ $\mu\varepsilon$ $\pi=\Phi\bullet\kappa\bullet\sigma$

αφού $\Phi\left(\kappa\left((\sigma)(x)\right)\right)=\Phi\left(\kappa(x-1)\right)=\Phi\left((x-1)^2\right)=\sqrt[3]{(x-1)^2}=\pi(x)$

Δηλαδή η π είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως σύνθεση συνεχώς σ' αυτό το διάστημα και της σταθερής $\lambda(x)=-1$ Επίσης η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)\cup(1,2)$ ως άθροισμα των δύο παραπάνω παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Για το σημείο $x_o=1$ θα εργαστώ με τον ορισμό:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}-1-(0-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}=+\propto$$

Άρα η f δεν παραγωγίζεται στο $x_o=1$ Συνεπώς δεν εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[0,2]$

<u>ΑΣΚΗΣΗ 25</u>

$f(x)=\dfrac{\alpha x^3}{3}+\left(\dfrac{\beta}{2}+\delta\right)x^2+(\gamma-\delta)x+\delta$ $\quad$ $A=\Re$ Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πολυωνυμική. Επίσης και

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ webpage: users.att.sch.gr/tanzak/ e-mail: tanzak@sch.gr

$f(1)=\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\delta+\gamma-\delta+\delta=\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}+\gamma+\delta=\delta$ Δηλαδή $f(0)=f(1)$. Άρα, σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=0$. Και εφόσον η πρώτη παράγωγος σε σημείο εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης στο σημείο αυτό, κατέληξα στο συμπέρασμα ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_o\ ,\ f(x_o))$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ΑΣΚΗΣΗ 26

$f(x)=\ell nx-x+1$ $\quad A=(0,+\infty)$. $f(1)=\ell n_1-1+1=0$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με $f'(x)=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$ Λύνω την εξίσωση:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1-x}{x}=0\Leftrightarrow\chi(1-x)=0\Leftrightarrow x=0\ \eta\ 1-x=0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
f'			+	-
f			↗	↘

Όπως φαίνεται στον πίνακα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty]$ και επίσης είναι $f(1=0)$. Άρα δεν υπάρχει περίπτωση η $f(x)=0$ να έχει άλλη πραγματική ρίζα εκτός από τη $x_o=1$, αφού δεν υπάρχει περίπτωση η γραφική παράσταση της f να τέμνει τον άξονα $x'x$ σε άλλο σημείο εκτός από το $x_o=1$. Η f είναι συνεχής στο $[x,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,1)$ ως άθροισμα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων αντίστοιχα, με $x>0$. Άρα,

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ webpage users.att.sch.gr/tanzak/ tanzak@sch.gr

σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (x,1)$ τέτοιο

ώστε : $f'(x_o) = \dfrac{f(1) - f(x)}{1 - x}$ ή $\dfrac{1 - x_o}{x_0} = \dfrac{f(x)}{x - 1}$ (1)

<u>ΑΣΚΗΣΗ 31</u>

$f(x) = x^5 + 4x^3 + 5x + 27$. Α = $\Re$. Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με : $f'(x) = 5x^4 + 12x^2 + 5$ Δηλαδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Re$ (1)

Έστω ότι έχει δύο πραγματικές ρίζες $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$. Δηλαδή είναι : $f(\mathrm{P}_1) = f(\mathrm{P}_2) = 0$.

Επίσης η f είναι συνεχής στο $[\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2]$ και παραγωγίσιμη στο $(\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ και σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in (\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o) = 0$

Όμως, λόγω της (1) έχω καταλήξει σε άτοπο. Άρα η f έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα. Και επειδή η f είναι περιττού βαθμού, δηλαδή έχει περιττό αριθμό ριζών, έχει το λιγότερο μια πραγματική ρίζα, αφού οι μιγαδικές πάνε κατά ζεύγη. Συνεπώς έχει μόνο μια πραγματική ρίζα. Και επειδή η f είναι πολυωνυμική 5ου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές έχει ακριβώς 5 ρίζες. Συνεπώς οι υπόλοιπες 4 είναι μιγαδικές. Όμως είναι: $x < x_o < 1$ ή $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{x_o} > 1$ (2)και $x < x_o < 1$ ή

$1 - x > 1 - x_o > 0$ (3) Πολλαπλασιάζω τις (2), (3): $\dfrac{1 - x}{x} > \dfrac{1 - x_o}{x_o} > 0$ ή λόγω της (1) :

$\dfrac{1 - x}{x} > \dfrac{f(x)}{x - 1} > 0$ και αφού $x < 1$ έχω $f(x) < 0$ Ομοίως εργάζομαι για το διάστημα $[1, x]$ και βρίσκω ότι $f(x) < 0$ ενώ για $x = 1$ είναι : $f(1) = 0$. Άρα για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x) \le 0$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ 32</u>

webpage: users.ath.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr
ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ

$f(x)=2x^3-3x-1$ Έστω ότι η f έχει 2 ρίζες $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2$ με $\mathrm{P}_1<\mathrm{P}_2$ *στο* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Δηλαδή είναι : $f(\mathrm{P}_1)=f(\mathrm{P}_2)=0$. Όμως η f ως πολυωνυμική είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Άρα, και σύμφωνα με το Θεώρημα Rolle υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$ τέτοιο ώστε: $f'(x_o)=0$ με $-\frac{\sqrt{2}}{2}<\mathrm{P}_1<x_o<\mathrm{P}_2<\frac{\sqrt{2}}{2}$ (1) Όμως για κάθε $x\in\Re$ είναι : $f'(x)=6x^2-3$ Άρα : $f'(x_o)=0\Leftrightarrow 6x^2-3=0\Leftrightarrow x_o^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x_o=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ που είναι άτοπο λόγω της (1).

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο $\left(-\sqrt{2}/2\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ Όμως επειδή

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\frac{2\sqrt{2}}{8}+3\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\sqrt{2-1>0}\quad f\left(\sqrt{2}/2\right)=2\frac{2\sqrt{2}}{8}-3\frac{\sqrt{2}}{2}-1=-\sqrt{2-1<0}$$

Δηλαδή $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f\left(\sqrt{2}/2\right)<0$ και σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano (που εφαρμόζεται, αφού όπως έχω ήδη εξηγηθεί, ισχύει η συνέχεια f), υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Συνεπώς η f έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr