ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ- ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ
ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

(1) Μονοτονία

i) Για την εύρεση μονοτονίας μιας συνάρτησης υπολογίζω την $f'(x)$ και βρίσκω το πρόσημό της ii) Αν προκύψει να είναι αύξουσα ή φθίνουσα, δεν αποκλείεται να είναι ή (όταν $f'(x)\geq 0$ δεν συνεπάγεται ότι υποχρεωτικά θα ισχύει για κάποια x το =). Το κριτήριο το οποίο μας προσανατολίζει ότι η ↑ ή ↓ είναι αντίστοιχα γ.α ή γ.φ , είναι η $f'(x)$ να μην είναι 0 σε διάστημα, αλλά σε διακεκριμένα σημεία.

Παρατήρηση:

Αν $f'(x_o)=0$ και $f'(x)>0,\ x\in(\alpha,x_o)\cup(x_o,\beta)\Rightarrow f$ (Δηλαδή, αν ισχύει $f'(x)\geq 0$ και ρίζες της $f'(x)=0$ είναι σημεία διακεκριμένα τότε η f είναι γνησίως αύξουσα). Δες παρατήρηση Σ.Β. ii) Για κάθε f , ↗ αντίστοιχα↘.

- Με τα Θεωρήματα των παραγώγων απαντώ για μονοτονία κατά διαστήματα και όχι για όλο το πεδίο ορισμού.
- Τη μονοτονία συνάρτησης μπορώ να την χρησιμοποιώ όταν η f είναι γνησίως μονότονη για να αποδεικνύω ότι η f είναι 1:1.
- Τη μονοτονία μπορώ να τη χρησιμοποιώ για να δείχνω ότι η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα. (Δεν έχει δύο διαφορετικές). Αν η f, με $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$.
- Αν x_1,x_2 ρίζες της f με $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x\ \ )=0$ άτοπο.

(2) Ακρότατα

i) Πιθανά τοπικά ακρότατα μιας συνάρτησης έχω

Ι) στις ρίζες της πρώτης παραγώγου

II) Στα σημεία που δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος, αλλά ορίζεται η συνάρτηση.

III) στα κλειστά άκρα του διαστήματος του πεδίου ορισμού.

ii) Όταν ζητείται να υπολογισθεί μόνο ακρότατο βολεύει να εργάζομαι με το 2ο θεώρημα, ενώ όταν επιπλέον ζητείται και μονοτονία χρησιμοποιώ το πρώτο.

iii) Για ασκήσεις στις οποίες ζητείται μέγιστο ή ελάχιστο (όγκος, εμβαδόν, μήκος, διατομή, κόστος, πλάτος, ύψος) εκφράζω το ζητούμενο μέγεθος βάσει κάποιου τύπου, συναρτήσει κάποιων γραμμάτων, μεταβλητών. Αντικαθιστώ τα γνωστά με νούμερα και τα υπόλοιπα τα εκφράζω συναρτήσει ενός, χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα ή εξισώσεις κωνικών τομών. Έτσι έχω εκφράσει το ζητούμενο μέγεθος σαν συνάρτηση μίας μεταβλητής. Βρίσκω το Π.Ο. της λαμβάνοντας υπ' όψιν, ότι όλα τα παραπάνω μεγέθη, είναι μέτρα, άρα θετικά καθώς και άλλες δεσμεύσεις της εκφώνησης. Με παραγώγους βρίσκω τοπικό ακρότατο. Δικαιολογώ ότι το τοπικό ακρότατο είναι ολικό, λέγοντας ότι η προαναφερόμενη συνάρτηση είναι συνεχής στο Π.Ο. της και παράγωγός της έχει μοναδική ρίζα στο Π.Ο. της. το ακρότατο είναι το ζητούμενο. (Η δικαιολόγηση ότι το τοπικό ακρότατο είναι ολικό ακρότατο μπορεί να γίνει με τους εξής τρόπους:

α) Δείχνω ότι $f(x) \le f(x_o),\ x \in \mathrm{A}$ ή $f(x) \ge f(x_o),\ x \in \mathrm{A}$ χρησιμοποιώντας τη μονοτονία.

β) Η f' έχει μία μόνο ρίζα, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο, είναι συνεχής στο Π.Ο. (αν δεν είναι συνεχής, μπορεί να έχει μόνο μια ρίζα και το τοπικό ακρότατο να μην είναι ολικό. Η συνέχεια εξασφαλίζεται από την παραγωγισιμότητα (τον τρόπο αυτό χρησιμοποιεί το βιβλίο).

γ) Λύνω την $f(x) \le ή \ge f(x_o)$ και προκύπτει $x \in A$ ή σε υπερσύνολο του Α, άρα το τοπικό είναι ολικό. Χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις πολλών ακρότατων.

- Με τα θεωρήματα των παραγώγων προσδιορίζω τοπικά ακρότατα. Αλλά αν η ανισοτική σχέση $f(x) \le ή \ge f(x_o)$ισχύει με $x \in A$ τότε έχω ολικό. Όταν λοιπόν έχω διαπιστώσει ότι έχω τοπικό ακρότατο και θέλω να εξετάσω αν είναι ολικό, εργάζομαι με έναν από τους προηγούμενους τρεις τρόπους.

Η μέθοδος αυτή ισχύει, όχι μόνο όταν τα x_o είναι ρίζες της $f'(x)=0$, αλλά και όταν τα x_o είναι σημεία στα οποία δεν ορίζεται η $f'(x)$ και ορίζεται η συνάρτηση.

- Η συνθήκη $f''(x_o) \neq 0$ που έχει το 2ο Θεώρημα για τα ακρότατα, είναι ικανή αλλά όχι αναγκαία, (π.χ. $f(x)=x^4$, $f''(x)=12x^2$, $f''(0)=0$, έχει ελάχιστο στο 0 το $f(0)=0$ διότι $\in \Re$ έχω $f(x)=x^4 \ge 0 = f(0)$.

- Το τοπικό ακρότατο δεν μπορεί να είναι άκρο διαστήματος $(x_o \in (\alpha,\beta))$ εκτός από την περίπτωση όπου η f ορίζεται στο x_o και δεν ορίζεται η δεξιά ή αριστερά από το x_o.

- Αν x_o είναι ρίζα των $f'(x)$, $f''(x)$, … , $f^{(\nu-1)}(x)$ και $f^{(\nu)}(x_o) \neq 0$ *και* $f^{(\nu)}(x)$ συνεχής στο (α, β) με $x_o \in (\alpha,\beta)$ τότε: Ι) αν η ν άρτιος είναι: τ.μ. όταν $f^{(\nu)}(x_o) < 0$, τ.ε. όταν $f^{(\nu)}(x_o) > 0$ ΙΙ) αν ν περιττός στο x_o δεν έχω τοπικό ακρότατο.

(3) Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων

Όταν ζητείται να αποδειχθεί $\sigma(x) \le t(x)$ για $x \in A$ τότε: το

$\sigma(x) \le t(x) \Leftrightarrow \sigma(x) - t(x) \le 0$. Θεωρώ τη συνάρτηση: Με παραγώγους βρίσκω μονοτονία-ακρότατο. Έστω

x		x_o
$f'(x)$	+	-
$f(x)$		

Ερμηνεύω τη μονοτονία σε ανισοτική σχέση. Έτσι έχω:

$$\left.\begin{array}{l} x < x_o \Rightarrow f(x) < f(x_o) \\ x = x_o \Rightarrow f(x) = f(x_o) \\ x > x_o \Rightarrow f(x) < f(x_o) \end{array}\right\} \text{ Άρα για } x \in A \text{ έχω:}$$

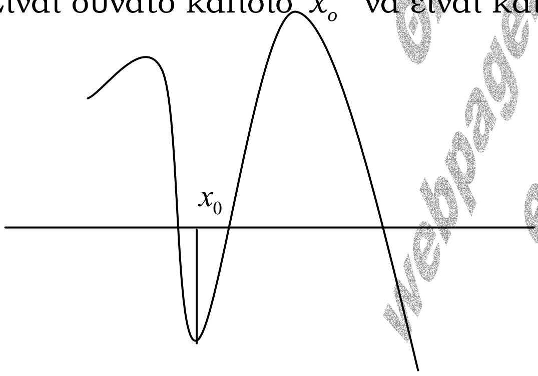
$f(x) \le f(x_o) \Leftrightarrow f(x) - f(x_o) \le 0 \;\; \text{για} \;\; x \in A.$ Αυτό είναι το ζητούμενο.

(4) Σημεία καμπής-κοιλότητα

Υπολογίζονται με βάση το πρόσημο και τις ρίζες της δεύτερης παραγώγου.

Πιθανά σημεία καμπής είναι οι ρίζες της $f''(x) = 0$, καθώς και τα σημεία στα οποία δεν ορίζεται η f'', αλλά ορίζεται η $f(x)$ είναι συνεχής σ' αυτά και η $f''(x)$ δεξιά-αριστερά απ' αυτά αλλάζει πρόσημο.

Είναι δυνατό κάποιο x_o να είναι και ακρότατο και σημείο καμπής.



(5) Παραμετρικές

Εκφωνήσεις δύο: α) Δίνεται ότι η f παρουσιάζει τα σ.κ. και ζητάμε παραμέτρους, β) Να βρεθούν οι παράμετροι <u>ώστε</u> να παρουσιάζει τα σ.κ. Και στις δύο μετατρέπω τα δεδομένα σε εξισώσεις, λύνω σύστημα και υπολογίζω παραμέτρους. Στη β) επιπλέον επαληθεύω τα τ.α., σ.κ.

Δεδομένα (Υπόθεση: Για ακρότατα, σημεία καμπής, η f παρ.1, 2 φορές στο A αντίστοιχα).

1) η f παρουσιάζει τ.α. στο $x_o \Rightarrow f'(x_o)=0$

2) η f παρουσιάζει τ.α. στο $(x_o, y_o) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f'(x_o)=0 \\ f(x_o)=y_o \end{array} \right.$

3) η f παρουσιάζει σ.κ. στο $x_o \Rightarrow f''(x_o)=0$

4) η f παρουσιάζει σ.κ. στο $(x_o, y_o) \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f''(x_o)=0 \\ f(x_o)=y_o \end{array} \right.$

5) η f μηδενίζεται στο $x_o \Leftrightarrow f(x_o)=0$

6) η f διέρχεται από το $(x_o, y_o) \Leftrightarrow f(x_o)=y_o$

7) η f διέρχεται από την αρχή των αξόνων $\Leftrightarrow f(0)=0$

8) η f τέμνει τον $x'x$ στο $x_o \Leftrightarrow f(x_o)=0$

9) η f τέμνει τον $\psi'\psi$ στο $\psi_o \Leftrightarrow f(0)=\psi_o$

10) η f τέμνει τη g στο σημείο με τετμημένη $x_o \Leftrightarrow f(x_o)=g(x_o)$

11) οι f, g τέμνονται σε σημείο με τεταγμένη z_o.

Η τετμημένη του σημείου τομής με τεταγμένη z_o προκύπτει από τη λύση του συστήματος $\begin{Bmatrix} f(x_o)=z_o \\ g(x_o)=z_o \end{Bmatrix}$ ως προς x_o

12) Η C_f έχει εφαπτόμενη στο x_o με συν. διεύθυνσης $z_o \Leftrightarrow f'(x_o)=z_o$

13) Η εφαπτόμενη της f στο (x_o,ψ_o) έχει συντ. διεύθ.

$\Leftrightarrow f'(x_o)=z_o$ και $f(x_0)=\psi_0$

14) Η εφαπτόμενη της f στο x_o $\varepsilon\iota\nu\alpha\iota$ $\parallel n$ στο $x'x$ (οριζόντια) $\Leftrightarrow f'(x_o)=0$

15) Η εφαπτόμενη της f στο x_o $\varepsilon\iota\nu\alpha\iota$ $\parallel n$ στην ευθεία $\varepsilon \Leftrightarrow f'(x_o)=\lambda_\varepsilon$

16) Η εφαπτόμενη της f στο x_o $\varepsilon\iota\nu\alpha\iota$ $\perp n$ στην ευθεία $\varepsilon \Leftrightarrow f'(x_o)\lambda_\varepsilon=-1$

ΕΙΔΙΚΕΣ ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

1) Η f να μην έχει εφαπτόμενη $\parallel n$ στον $x'x$ (οριζόντια) $\Leftrightarrow f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$

2) Η f να μην έχει εφαπτόμενη $\parallel n$ στον $\varepsilon \Leftrightarrow f'(x)\neq \lambda\varepsilon$ για κάθε $x\in A$

3) Η f να μην έχει εφαπτόμενη $\perp n$ στην $\varepsilon \Leftrightarrow f'(x)\lambda_\varepsilon+1\neq 0$ για κάθε

4) Η f να μην έχει ακρότατο $\Leftrightarrow f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$ η ($f'(x)=0$ $\gamma\iota\alpha$ $x=x_o$ και αριστερά-δεξιά από το x_o η $f'(x)$ να έχει σταθερό πρόσημο).

5) Η f να μην έχει σημείο καμπής $\Leftrightarrow f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$ η ($f''(x)=0$ για $x=x_o$ και αριστερά-δεξιά από το x_o η $f''(x)$ να μην αλλάζει πρόσημο)

6) Η f στο $A \Leftrightarrow f'(x)>0\left(f'(x)<0\right)$ για κάθε $x\in A$

$\left[\mathrm{nf}'(\mathrm{x})=0 \quad \gamma\iota\alpha\ x=x_o \quad \kappa\alpha\iota\ f'(x)>0(<0) \quad \gamma\iota\alpha\ x\neq x_o \quad \mu\varepsilon\ x\in A\right]$

7) Η f σ.κ.α. (σ.κ.κ.) στο $A \Leftrightarrow f''(x)>0\left(f''(x)<0\right)$για κάθε $x\in A$

$\left[nf''(x)=0 \quad \gamma\iota\alpha\ x=x_o \quad \kappa\alpha\iota\ f''(x)>0\left(f''(x)<0\right) \quad \gamma\iota\alpha\ x\neq x_o \quad \mu\varepsilon\ x\in A\right]$

(6) Εύρεση συνόλου τιμών

Να διαβαστούν τα σχετικά που περιέχονται στη συνέχεια στο κλειστό διάστημα. Όταν το άκρο α είναι ανοικτό διάστημα τότε το $f(\alpha)$ αντικαθίσταται στο $(\alpha,\beta\ ]$ με $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ ενώ στο $[\beta,\alpha)$ με $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$.

Κατά τα άλλα ισχύει η ίδια μεθοδολογία. Τα άκρα στην περίπτωση των ανοικτών διανυσμάτων, μπορεί να είναι αντίστοιχα $-\infty,\ +\infty$

(7) Για να δείξω ότι μια παράσταση f δεν έχει ρίζα με μονοτονία και ακρότατα δείχνω ότι $f(x)\geq\alpha>0$ $\quad\eta\quad$ $f(x)\leq\beta<0$

ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

(Α) Εύρεση μονοτονίας –ακρότατων- κοιλότητας- σημείων καμπής (δες 1-2-4)

Ειδικές περιπτώσεις.

Ι) Πότε η ↑ (↓) και πώς γίνεται γνησίως

2) Πώς εξετάζω μονοτονία της f με $A=[\alpha,+\infty]$ και με f' που ορίζεται στο $A=(\alpha,+\infty)$ $\quad\left(f(x)=\sqrt{x}\right)$

3) Ακρότατα σε σημεία που δεν ορίζεται η f'

4) Ακρότατα σε σημεία που είναι άκρα κλειστού διαστήματος = πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

5) Πότε και πώς το τοπικό γίνεται ολικό ακρότατο (δες 2 το ιιι)

6) Σημεία καμπής σε x_o όπου δεν ορίζεται η f'' (δες το 4)

(Β) Παραμετρικές (δες 5)

(Γ) Απόδειξη ανισοτικών σχέσεων με μονοτονία (δες 3)

(Δ) Εύρεση ελάχιστου-μέγιστου : μήκους, πλάτους, ύψους, εμβαδού, όγκου, κόστους κ.τ.λ. (δες 2 το ιιι)

(Ε) Εύρεση συνόλου τιμών

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ:
ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ – ΑΚΡΟΤΑΤΑ – ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ – ΚΟΙΛΟΤΗΤΑ – ΣΗΜΕΙΑ ΚΑΜΠΗΣ

1) Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις

(α) $f(x) = x^2 - 5x + 6 / \Re$ (β) $f(x) = \ell nx / \Re_+^*$ (γ) $f(x) = e^x / \Re$

(δ) $f(x) = \eta\mu\chi / [0, 2\pi]$

2) Να βρεθούν τα ακρότατα των συναρτήσεων με τύπους

(α) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ (β) $f(x) = 2e^x + e^{-x}$ (γ) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(δ) $f(x) = x(\ell nx)^2$ (ε) $f(x) = x\ell nx$ (στ) $f(x) = \frac{x}{\ell nx}$

3) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η $f(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\chi}$

4) Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & , x \in (-\infty, 1\ ] \\ 4 - x & , x \in (1, +\infty\ ] \end{cases}$

5) Να εξεταστούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι συναρτήσεις

(α) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ (β) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ (γ) $f(x) = xe^x$ (δ) $f(x) = \frac{1}{\ell nx}$

(ε) $f(x) = x + \eta\mu\chi$ (στ) $f(x)\ell n\left(\sqrt{x + \frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$

6) Να εξεταστεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η $f(x) = \frac{1}{\eta\mu\chi} / \Re\text{-}\{\kappa\pi\}$, $\kappa \in$

7) Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε $f(x) = x^2 + \kappa\ell nx - \lambda x$ να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία 1 και 2. Να δείξετε στη συνέχεια, ότι για τις προσδιορισμένες τιμές των κ και λ το 2 είναι θέση τοπικού ελάχιστου και το 1 θέση τοπικού μέγιστου.

8) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{\ell nx}{x}/\Re_*^+$. Χρησιμοποιείστε τη μονοτονία και τα ακρότατα για να συγκρίνετε τους αριθμούς $\pi^e \quad \kappa\alpha\iota \quad e^\pi$

9) Να δειχτεί ότι απ' όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 2τ το τετράγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

10) Σε σφαίρα ακτίνας R να εγγραφεί κώνος με μέγιστο όγκο

(Υπόδ: $V=\dfrac{1}{3}\pi\left(\text{BK}\right)^2\left(\text{AK}\right)=\dfrac{1}{3}\pi\left(R^2-x^2\right)\left(R+x\right)$

11) Να βρεθεί ποιος από τους κυλίνδρους με σταθερή ολική επιφάνεια $\text{E}_{o\lambda}=2\pi\alpha^2$ έχει το μεγαλύτερο όγκο $\left(\alpha>0\right)$

Υπόδειξη: Αν h Το ύψος και x η ακτίνα της βάσης τότε $\text{E}_{o\lambda}=2\pi x^2+2\pi\bullet x\bullet h\Rightarrow h=\dfrac{\alpha^2-x^2}{x}$

αλλά $V=\pi x^2 h\Rightarrow V\left(x\right)=\pi x^2\,\dfrac{\alpha^2-x^2}{x}$

12) Να βρεθεί το μέγιστο εμβαδόν ενός ορθογωνίου που μπορεί να εγγραφεί στην έλλειψη $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1$

Υπόδειξη: $M\left(x,\psi\right)$ Ε ορθογωνίου$=\left(2_x 2_\psi\right)=4x\psi$ Για το $M\left(x,\psi\right)\in$ έλλειψη έχω

$\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{\psi^2}{\beta^2}=1\Rightarrow\psi=\dfrac{\beta}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$ Άρα $\text{E}\left(x\right)=\dfrac{4\beta x}{\alpha}\sqrt{\alpha^2-x^2}$

(13) Να βρεθεί το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο μέγιστου εμβαδού που μπορεί να εγγραφεί σε μια παραβολή (υπόδ: $\text{E}\left(x\right)=2x\sqrt{2p\left(\alpha-x\right)}$)

(14) Να αποδειχθεί ότι από όλα τα τρίγωνα που έχουν σταθερή περίμετρο και σταθερή βάση το ισοσκελές τρίγωνο έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν.

(υπόδ: $\text{E}=\sqrt{\tau\left(\tau-\alpha\right)}\left[\tau\left(\alpha-\tau\right)+\left(2\tau-\alpha\right)x-x^2\right]$

Θεωρώ την Ε με $\mathrm{E}(x)=\tau(\tau-\alpha)\left[\tau(\alpha-\tau)+(2\tau-\alpha)x-x^2\right]$ που εκφράζει το τετράγωνο της τιμής του εμβαδού του τριγώνου που έχει σταθερή περίμετρο 2τ, σταθερή βάση μήκους α και μια πλευρά μήκους x)(15) Θεωρούμε ΑΒΓΔ με βάση $\mathrm{B\Gamma}=\alpha$ και ύψος $\mathrm{A\Delta}=h$ Να βρεθεί το μέγιστου εμβαδού ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που να έχει τη βάση του στη ΒΓ και τις άλλες δύο κορυφές στις άλλες πλευρές του τριγώνου. (υπόδ: $\mathrm{E}=\frac{\alpha}{h}(h-x)x=\frac{-\alpha}{h}x^2+\alpha x$

(16) Να μελετηθούν οι συναρτήσεις ως προς την κοιλότητα και τα σημεία καμπής.

(α) $f(x)=\frac{1}{x}\big|\Re-\{0\}$ (β) $f(x)=x^2\ell nx\big|(0,+\infty)$ (γ) $f(x)=x^3-1\big|\Re$

(δ) $f(x)=-\ell n(\ell nx)$ (ε) $f(x)=(x+5)^2(x^3-10)$

(17) Να προσδιοριστούν τα κ, λ ώστε το σημείο $M(1,2)$ να είναι σημείο καμπής της συνάρτησης f με $f(x)=\kappa x^3-\lambda x^2$

(18) Για την $f(x)=\frac{x+1}{x^2+1}$ δείξτε ότι έχει τρία σημεία καμπής που είναι συνευθειακά.

(19) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\Re$ ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+x+1 & ,x\geq 1\\ 2\alpha x+1 \;, & x<1\end{cases}$$

(20) Να ευρεθούν τα τοπικά ακρότατα της $f(x)=\eta\mu\chi+2\sigma\upsilon\nu^2\chi-1$

(21) Στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ να βρεθεί το μέγιστο της $f(x)\eta\mu^2 2x(1+\sigma\upsilon\nu 2x)$

(22) Έστω $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\alpha x^3+2x^2+3$. Να βρεθεί το $\alpha\in\Re$ να στρέφει τα κοίλα άνω για κάθε $x\in\Re$

(23) Για τον $f\left(x\right)=x^{3}+\alpha x^{2}+\beta x+\gamma$ να δείξετε ότι η f δεν παρουσιάζει τοπικό ακρότατο τότε και μόνο τότε αν $\alpha^{2}\leq 3\beta$

(24) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β με $-3\alpha^{4}+\beta>0$ και η εξίσωση $x^{4}+4\alpha^{3}x+\beta=0$. Να δείξετε ότι δεν έχει πραγματική λύση ως προς x.

(25) Για ποια τιμή θετικού αριθμού α μέγιστη τιμή της συνάρτησης f με $f\left(x\right)=x^{\alpha}e^{2\alpha-x}$ γίνεται ελάχιστο;

(26) α) Να βρείτε τα ακρότατα της f με $f\left(x\right)=x^{x}\left(1-x\right)^{1-x}$

β) Αν $\alpha,\beta\in\Re_{+}^{*}$ με α+β=1 να αποδείξετε ότι $\alpha^{2}\beta^{2}\geq\frac{1}{2}$

(35) Αν $f\left(x\right)=\left(x-\alpha_{1}\right)^{2}+\left(x-\alpha_{2}\right)^{2}+\cdots+\left(x-\alpha_{\nu}\right)^{2}$ να δειχτεί ότι υπάρχει μια μόνο τιμή του x για την οποία η f παίρνει ελάχιστη τιμή. Να βρεθεί η τιμή αυτή του x.

(36) Για την $f\left(x\right)=x^{3}-9x^{2}+24x+2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο καμπής, και να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο αυτό.

(37) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{4}-4x+4=0$ δεν έχει πραγματική ρίζα.

(38) Δίνεται $f\left(x\right)=2x-e^{3x=1}$. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία κατά διαστήματα και να βρεθεί το μέγιστο αν υπάρχει

(39) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{3}+x=\sigma\upsilon\nu\chi$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα x.

(40) Να μελετηθεί η $f\left(x\right)=xe^{2x+1}$

(41) Να βρεθούν τα $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$ έτσι ώστε η $f\left(x\right)=x^{3}+\alpha x^{2}+\beta x+\gamma$ με $f\left(0\right)=3$ να έχει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x=1$, $x=\frac{1}{3}$

(42) Να ευρεθεί η συνθήκη ώστε η $f\left(x\right)=x^{3}+\alpha x^{2}+\beta x+\gamma$ να έχει 2 τοπικά ακρότατα.

(43) Να ευρεθεί η σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \Re$ ώστε η $f(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + 2$ να έχει σημεία καμπής.

(44) Δίνεται η $f(x) = \kappa x^3 + 2x^2 - x + \kappa^2$. Να βρεθούν τα $\kappa \in \Re$ ώστε η f να μην έχει ακρότατα.

(45) Να προσδιοριστούν τα $\kappa, \lambda \in \Re$ ώστε η f με $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + \lambda x$ να έχει ακρότατα στα $x = 0$, $x = 1$.

(46) Δίνεται $f(x) = x + 1 + \dfrac{1}{x+1}$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και ακρότατα

Θ.Α.Δ 88$\left(2,5/2\,/20\right)$

(47) Έστω η συνάρτηση f με

$f(x) = \left(\alpha - \dfrac{2}{3}\right)x^3 - \left(\alpha + \dfrac{1}{2}\right)x^2 - 10x + 7$, $x \in \Re$. Να βρείτε το $\alpha \in \Re$ ώστε η f να παρουσιάζει καμπή στο $x = \dfrac{3}{2}$. Μετά για την τιμή αυτή του α να σχηματίσετε τον πίνακα-μεταβολών της f. Θ.Α.Δ.87 $(2,5/20)$.

(48) Δίνεται $f(x) = x^2(x-3) + 4$, $x \in \Re$. Έστω x_1, x_2 είναι τα σημεία στα οποία η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και x_3 το σημείο στο οποίο παρουσιάζει καμπή. Να αποδειχθεί ότι τα σημεία του επιπέδου $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), (x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά. Θ.Α.Δ.85 $(2,5/20)$

(49) Δίνεται $f(x) = x^2 - |x| - 2$. Να βρεθεί η μονοτονία και τα ακρότατά της. Στη συνέχεια να χαράξετε πρόχειρη γραφική παράσταση και να βρείτε το σύνολο τιμών.

(50) α) Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει $\ell n x \le x - 1$

β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο $[0, +\infty)$ με:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{xenx}{1-x} & \alpha\nu \quad 0\prec x\neq 1 \\ 0 & \alpha\nu \quad x=0 \\ -1 & \alpha\nu \quad x=1 \end{cases}$$ Να αποδειχθεί ότι i) η f είναι συνεχής στο πεδίο

ορισμού της ii) είναι φθίνουσα στο $(0,1)$ iii) $f'(1)=-\frac{1}{2}$. Θ.Α.Δ. 83 $(5/20)$

(51) Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x)=\begin{cases} -x^2+3x-2 & \alpha\nu \quad 1\leq x\leq 2 \\ 2x-4 & \alpha\nu \quad 2\prec x\leq 3 \\ -2x+8 & \alpha\nu \quad 3\prec x\leq 4 \end{cases}$

(52) Δίνεται $f:\Re\to\Re$ με $f(x)=x^{20}-20x+1 \quad \forall x\in\Re$.

i) Να εξετάσετε μονοτονία κατά διαστήματα

ii) Δείξτε ότι $x^{20}-20x+19\geq 0 \quad x\in\Re$.

(53) Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+36x+5$ να έχει τοπικό ακρότατο στο $x_o=3$ και σημείο καμπής στο $x_o=\frac{1}{2}$

(54) Να προσδιοριστούν τα κ , λ ώστε το σημείο $M(1,2)$ να είναι σημείο καμπής της $f(x)=\kappa x^3-\lambda x^2$

(55) Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\alpha,\beta\in\Re$ έτσι ώστε η $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+36x^2+2x+1$ να παρουσιάζει σημεία καμπής στα $x_1=2$ και $x_2=3(\alpha=1\ ,\ \beta=-10)$

56) Δίνεται $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+18\gamma x^2+2x+1$, όπου $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$. Να βρεθούν τα α, β , γ ώστε η f να παρουσιάζει σημεία καμπής στα $x_1=2$ και $x_2=3$ και

$f(1)=40.(\alpha=1,\beta=-10,\gamma=2)$

(57) Έστω $f(x)=\alpha x^4+\beta x^3+18\gamma x^2+2x+1$, $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$. Να βρεθούν τα α, β, γ ώστε η f να παρουσιάζει σημεία καμπής στα $x_1=2$ και $x_2=3$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $x_3=0$ να έχει συντελεστή διευθύνσεως τον αριθμό 2. $(\alpha=1,\beta=-10,\gamma=2)$

(58) α) Να αποδείξετε ότι $\forall x\in\Re$ έχω $e^x\geq x+1$

β) Θεωρώ τη συνάρτηση f στο $[0,+\infty)$

$$f(x)=\begin{cases} e^x-\dfrac{x^2}{2}-x+3 & \alpha\nu \quad 0\prec x\neq 2 \\ 4 & \alpha\nu \quad x=0 \\ 2 & \alpha\nu \quad x=2 \end{cases}$$ i) Να μελετηθεί ως προς τη συνέχεια

ii) Να δείξετε ότι είναι αύξουσα, $x\in(0,2)$ iii) Να εξετάσετε αν υπάρχει η $f'(2)$

(59) Να δείξετε ότι αν $\alpha,\beta,\in\Re_+^*$ τότε $\left(8\alpha^2+\beta^2\right)^2>16\alpha^3\beta$

(60) Έστω α πραγματικός αριθμός και f η συνάρτηση με

$$f(x)=\frac{x^4}{3}+\frac{2\alpha x^3}{3}+\left(\alpha^2-2\alpha+\frac{5}{2}\right)x^2+\left(\alpha^3+7\right)x-5\alpha^2.$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει σημεία καμπής.

(61) Δίνεται η $f(x)=x^7+2x+\alpha$. Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και ότι έχει μια μόνο πραγματική ρίζα.

(62) Να δείξετε ότι η f με $f(x)=\ell n\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ παίρνει θετικές τιμές και με τη βοήθεια αυτού να δειχτεί ότι η συνάρτηση $\phi(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ είναι γνήσια αύξουσα στο $(0,+\infty)$

(63) Να προσδιορίσετε το ορθογώνιο με πλευρές $\|\varepsilon\varsigma$ προς τους άξονες και μέγιστο εμβαδόν που είναι εγγεγραμμένο στην έλλειψη $\frac{x^2}{9}+\frac{\psi^2}{4}=1$. Να βρείτε ποιο από τα ορθογώνια με το ίδιο εμβαδόν έχει την ελάχιστη περίμετρο.

(64) Από το σημείο $M(1,1)$ να αχθεί ευθεία (ε) που να σχηματίζει με τους θετικούς ημιάξονες, καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων, τρίγωνο με ελάχιστο εμβαδόν.

(65) Να βρεθούν τα μήκη των πλευρών ορθογώνιου παραλληλογράμμου μεγίστου εμβαδού, που δύο πλευρές του να βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες ορθογώνιου συστήματος και μια από τις κορυφές του πάνω στην ευθεία $x+\psi=2$

(66) Δίνεται η f με $f(x)=\frac{1}{3}\alpha x^3+\frac{1}{2}\alpha x^2+(\alpha-1)x-1$. α)Να βρεθούν οι τιμές του $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\alpha x^3+2x^2+3$ για τις οποίες η f είναι αύξουσα στο $\Re$

β) Για τη μικρότερη από τις τιμές αυτές του *α,* να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f'(x)=x^3-3\alpha x^2+4x$ έχει μόνο μια ρίζα στο διάστημα f'

(67) Δίνονται τα σημεία $\Re$ και $f''(x)=3x^2-6\alpha x+4$ της έλλειψης $x\in\Re$ Να βρεθεί σημείο Γ πάνω στην έλλειψη τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ να είναι μέγιστο.

(68) Δίνεται η συνάρτηση f με $f''(x)>0$ αν $x\in\Re$ και $3x^2-6\alpha x+4>0$. Να δειχτεί ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Delta<0\Leftrightarrow 36\alpha^2-48<0\Leftrightarrow \alpha<4/3$

(69) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $\alpha\varepsilon\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$. ορισμένη για $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (η) του διαγράμματος της f στο σημείο $f'(x)3x^2+24x+\beta$, β) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\Re$. η εφαπτομένη (η) βρίσκεται πάνω από το διάγραμμα της f

(70) Να βρεθούν τα $\Delta\le 0\Leftrightarrow 4\alpha^2-12\beta\le 0\Leftrightarrow \alpha^2\le 3\beta$. για τα οποία η συνάρτηση $\Delta=0$. είναι γνησίως φθίνουσα στο $x=-\frac{2\alpha}{6}-\frac{\alpha}{3}$. Όταν η παραπάνω συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$ να δειχτεί ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια πραγματική και δύο μιγαδικές ρίζες.

(71) Για τη συνάρτηση f με $f(x)=\ln x-x+1$ να δείξετε ότι η $f(x)=0$ δεν έχει άλλη πραγματική ρίζα εκτός της $x=1$. Με το Θεώρημα Μέσης Τιμής να δείξετε ότι $f(x)\le 0$ για κάθε $x\in A$ της f .

ΑΣΚΗΣΗ 22

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\alpha x^3+2x^2+3$.Η f ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με:

$f'(x)=x^3-3\alpha x^2+4x$.Η f' ως πολυωνυμική είναι παραγωγίσιμη στο $\Re$, με:

$f''(x)=3x^2-6\alpha x+4$.Για να στρέφει η f τα κοίλα άνω για κάθε $x\in\Re$, απαιτώ $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\Re$.Δηλαδή $3x^2-6\alpha x+4>0$. Πρέπει $\Delta<0\Leftrightarrow 36\alpha^2-48<0\Leftrightarrow \alpha<4/3$. Άρα $\alpha\varepsilon\left(-\infty,\frac{4}{3}\right)$.

ΑΣΚΗΣΗ 23

$f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ Η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, με:

$f'(x) 3x^2 + 24x + \beta$ Για να μην έχει η f τοπικό ακρότατο, θέλουμε να μην αλλάζει πρόσημο για κάθε $x \in \Re$. Άρα $\Delta \le 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 - 12\beta \le 0 \Leftrightarrow \alpha^2 \le 3\beta$. Η ισότητα ισχύει για $\Delta = 0$. Δηλαδή για $x = -\frac{2\alpha}{6} - \frac{\alpha}{3}$. Και επειδή δούλεψα με ισοδυναμίες, έχω αποδείξει και το αντίστροφο.