ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ

Η $f : A \to \mathbb{R}$ **έχει:**

1) κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = x_0$ τ.μ.τ.
όταν $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_{0^+}} f(x) = \pm\infty$ ή $\lim\limits_{x \to x_{0^-}} f(x) = \pm\infty$ (Δηλαδή η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη όταν ένα τουλάχιστον από τα δύο πλευρικά όρια είναι $+\infty$ ή $-\infty$).

2) οριζόντια ασύμπτωτη την $y = \beta$ τ.μ.τ. όταν: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \beta$ ή $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \beta$

3) πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ τ.μ.τ. όταν:

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0 \text{ ή } \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (\lambda x + \beta) \right] = 0$$

Παρατήρηση: Η πλάγια ασύμπτωτη αποτελεί γενίκευση της οριζόντιας. Για $\lambda = 0$ από την πλάγια προκύπτει η οριζόντια.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΑΣΥΜΠΤΩΤΩΝ

Η έρευνα για ύπαρξη ασύμπτωτων γίνεται στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού. Ο προσδιορισμός πλάγιας – οριζόντιας γίνεται ταυτόχρονα από τους τύπους:

$$\lambda = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - \lambda x \right]$$
$$\lambda = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \beta = \lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - \lambda x \right]$$

Όταν $\lambda = 0$ βρίσκοντας το β προκύπτει οριζόντια πιθανόν. Όταν $\lambda = \pm\infty$, βρίσκοντας το β δεν προκύπτει ούτε οριζόντια.

Στην εύρεση κατακόρυφης τα x_0 προσδιορίζονται σαν ρίζες παρονομαστή, ή άκρα διαστημάτων του Α, πραγματικοί αριθμοί ή σημεία ασυνέχειας. Τα x_0 μπορεί να είναι: 1) σημεία στα οποία η f δεν ορίζεται, αλλά είναι άκρα του πεδίου ορισμού, π.χ. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x + 1}$ με $A = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ $x_0 = -1$, 2) σημεία στα

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.ath.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

οποία η f ορίζεται αλλά είναι ασυνεχής. Παράδειγμα:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & \alpha\nu\ x\succ 1\\ \dfrac{x^2+1}{2x} & \alpha\nu\ \mathrm{x}\le 1\end{cases}$$

$x_0=1$ Προϋπόθεση αναζήτησης κατακόρυφης πλάγιας – οριζόντιας ασύμπτωτης είναι οι αντίστοιχες προϋποθέσεις για την αναζήτηση των ορίων. Έτσι για την f με $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ με $A=[2,3]$ δεν έχει νόημα η εύρεση κατακόρυφης, πλάγιας οριζόντιας ασύμπτωτης διότι δεν μπορώ να αναζητήσω όρια. Ενώ για την f με $f(x)=\dfrac{\ell nx}{x-1}$ δεν έχει νόημα η αναζήτηση πλάγιας-οριζόντιας του $x\to-\infty$

Για εύρεση πλάγιας-οριζόντιας ασύμπτωτης στις ρητές εργάζομαι του $x\to+\infty$ και γράφω ομοίως του $x\to-\infty$. Σε άλλες συναρτήσεις κλαδικές, με απόλυτα, άρρητες, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, εργάζομαι χωριστά του $x\to+\infty$ και του $x\to-\infty$ διότι τα όρια προκύπτουν διαφορετικά.

Παρατήρηση 1. Μια συνάρτηση μπορεί να έχει περισσότερες από 3 ασύμπτωτες και μαζί πλάγια, οριζόντια, κατακόρυφες

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x-1} & x<1\\ \dfrac{x^2+1\quad x^5+1}{x(x-2)(x-3)(x-4)} & x\ge 1, x\ne 2,3,4\end{cases}$$

Έχω του $x\to\infty$ $\psi=1$, του $x\to+\infty$ $\psi=x$ και κατακόρυφες τις $x=1,\ x=2,\ x=3,\ x=4$.

Παρατήρηση 2. Η πλάγια-οριζόντια ασύμπτωτη μπορεί να τέμνει τη C_f σε άπειρα σημεία.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

Παρατήρηση 3. Τα σημεία στα οποία η C_f παρουσιάζει εφαπτόμενη είναι απαραίτητα σημεία συνέχειας, άρα ανήκουν στο πεδίο ορισμού. Σε αντίθεση με την εφαπτόμενη, κατακόρυφη ασύμπτωτη έχω σε σημεία ασυνέχειας που ανήκουν στο πεδίο ορισμού η άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού που δεν ανήκουν στο πεδίο ορισμού.

Παράδειγμα 1ο δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-2}$. Να ευρεθούν ασύμπτωτες. (κατακόρυφη (ρητή) άρα ρίζες παρονομαστή $x=2$)

Παράδειγμα 2ο. Δίνεται συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{x^2}+1-x$. Να βρεθούν ασύμπτωτες ($A=\Re$, άρα δεν έχω κατακόρυφη ασύμπτωτη διότι η f συνεχής στο $\Re$.)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΙΣ ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ

1) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες:

(α) $f(x)=x-\dfrac{5x-2}{x-3}$ (β) $f(x)=x-\dfrac{3x-3}{x-2}$ (γ) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$

(δ) $f(x)\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$ (ε) $f(x)=\dfrac{3x^2+5x+1}{x+2}$ (ζ) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-4}$

(η) $f(x)=\dfrac{3x^3+x^2-3x+1}{x^2-1}$ (θ) $f(x)=\dfrac{3x^2+2x}{5x^2-3x}$

(ι) $f(x)=\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2-2x+1}$ (κ) $f(x)=\dfrac{x^5-x^2+5x-5}{x^3-1}$

2) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες:

(α) $f(x)=\sqrt{x^2}+x+3$ (β) $f(x)=\sqrt{x^2}-5x+6$ (γ) $f(x)=\sqrt{x^2}-2x+1$

(δ) $f(x)=\sqrt{x-3}$ (ε) $f(x)=\sqrt{x+1}$ (ζ) $f(x)=\sqrt{2x-3}$

3) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες:

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.att.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

(α) (β) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+2}{x-3}}$ (γ) $\sqrt{\dfrac{5x^2+3x+1}{x^2-2x+1}}$ (δ) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x+1}$

4) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες:

(α) $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2-9}+6x^2-1}{x(x-2)}$

5) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες:

(α) $f(x)=\dfrac{2x+3}{4x-8}$ (β) $f(x)=\dfrac{x(x^2+1)}{x^2-1}$ (γ) $f(x)=\dfrac{|x|^3}{(x-1)^2}$ (δ) $f(x)={\ell nx}/{x}$

(ε) $f(x)=e^{\frac{1}{2^2}}$ (ζ) $x+\dfrac{1}{x^2}$ (η) $\dfrac{x^2}{\ell nx}$ (θ) $f(x)=\dfrac{1}{\eta\mu\chi}$ (ι) $\dfrac{e^x}{e_n(x^2-1)}$

(κ) $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{x-1}$ (λ) $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x-2}$ (μ) $f(x)=\dfrac{1+2\ln x}{x}$

(ν) $f(x)\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu x^{-\frac{1}{2}}}$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{5\pi}{3}\right)$ (ο) $f(x)=xe^{-x}$

(π) $f(x)=e^{(x^2)}$, $x\in\mathbb{R}$ (ρ) $f(x)=(e^x)^2$, $x\in\mathbb{R}$

6) Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ασύμπτωτες της $f(x)=3$ και γενικότερα της $f(x)=C$.

7) Να βρεθούν οι ασύμπτωτες:

α) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^2+5x+1}{x+2} & \text{αν } x\prec -2\\[2mm] \dfrac{3x^2+2x}{5x^2-3x} & \text{αν } x\in[-2,+\infty)\end{cases}$

β) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+x+1} & \alpha\nu\ x\geq 0\\[2mm] \dfrac{x+1}{x+3} & \alpha\nu\ x\prec 0 \text{ και } x\neq -3\end{cases}$

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr

γ) $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-4}$ δ) $f(x)=\frac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$

8) α) Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η $y=\alpha x+\beta$ να είναι ασύμπτωτη

της $f(x)=\frac{3x^2+1}{x+2}$

β) Να προσδιοριστούν τα α, β ώστε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x+2}-(\alpha x+\beta)\right)=0$

9) Δίδεται η $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{x^2+\beta x+\alpha}$. Να προσδιοριστούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε το διάγραμμα της f να έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

10) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}{x^2} & \alpha\nu\ x\succ 1\\ 1-x & \alpha\nu\ x\le 1\end{cases}$

Να υπολογιστούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_o=1$ και η ευθεία $y=x-2$ να είναι ασύμπτωτη της C_f.

11) Να βρείτε τα $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση f με $f(x)=\frac{x^2+\lambda x+\mu}{\sqrt{x^2-1}}$, ορισμένη στο $(1+\infty)$ να παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x=2$ και η C_f να έχει ασύμπτωτη την $y=x-1$. Για τις τιμές των λ, μ που βρήκατε να βρείτε και τις άλλες ασύμπτωτες αν υπάρχουν. Με τα παραπάνω στοιχεία να κάνετε πρόχειρα γραφική παράσταση της f.

12) Να δείξετε ότι η $f(x)=3x-3\ell n\left|2e^x-1\right|$ έχει τρεις ασύμπτωτες, που διέρχονται από το ίδιο σημείο.

ΘΑΝΟΣ ΖΑΧΟΓΕΩΡΓΟΣ
webpage: users.ath.sch.gr/tanzak/
e-mail: tanzak@sch.gr