ΤΙΤΛΟΣ ΤΟΥ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Εμπλεκόμενες γνωστικές περιοχές

Οι βασικές γνωστικές περιοχές που αφορούν στην υλοποίηση του σεναρίου είναι η καρτεσιανή αναπαράσταση σημείων στο επίπεδο, οι συναρτήσεις και ο διαφορικός λογισμός. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στην έννοια της παραγώγου τιμής συνάρτησης ως κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο επαφής.

Τάξεις στις οποίες απευθύνεται.

Το σενάριο απευθύνεται αποκλειστικά σε μαθητές της τελευταίας τάξης του Λυκείου. Στην τάξη αυτή η έννοα της παραγώγου τιμής και η γεωμετρική της σημασία διδάσκονται τόσο στα Μαθηματικά της Γενικής παιδείας όσο και στην Θετική και Τεχνολογική κατεύθυνση.

Συμβατότητα με το αναλυτικό πρόγραμμα.

Το θέμα το οποίο διαπραγματεύεται το σενάριο είναι πλήρως συμβατό με το αναλυτικό πρόγραμμα. Η διδασκαλία της παραγώγου και της γεωμετρικής της σημασίας γίνεται με βάση τα δύο σχολικά βιβλία τα οποία αναλύουν διεξοδικώς το θέμα. Οι οδηγίες προς τους διδάσκοντες επισημαίνουν την σημασία της γραφικής παράστασης για την κατανόηση της έννοιας της παραγώγου και της γεωμετρικής της σημασίας.

Απαιτούμενη υλικοτεχνική υποδομή

Απαιτείται ένας αριθμός Η/Υ. Στους υπολογιστές θα πρέπει να έχει εγκατασταθεί το λογισμικό Geogebra το οποίο είναι ελεύθερο λογισμικό, έχει ήδη εξελληνιστεί και δεν απαιτείται οποιαδήποτε παροχή δικαιώματος χρήσης. Επιπλέον θα πρέπει οι υπολογιστές στο δίκτυο να έχουν εγκατεστημένη την Java 1.4.2 ή μεταγενέστερη.

Γνωστικά προαπαιτούμενα

α) Ως προς τα μαθηματικά είναι απαραίτητη η γνώση της έννοιας της παραγώγου τιμής μιας συνάρτησης, σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Επιπλέον θα πρέπει να γνωρίζουν την γεωμετρική σημασία της παραγώγου ως κλίση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο μα τετμημένη x_0.

β) Ως προς την τεχνολογία απαιτείται βασική εξοικείωση με την χρήση ενός εκπαιδευτικού λογισμικού με δυνατότητες δυναμικής διαχείρισης γραφικών παραστάσεων (Cabri, Sketchpad, Function Probe, Geogebra). Προτείνεται να προηγηθεί ένα δίωρο εξοικείωσης με το λογισμικό Geogebra μέσα από μία σειρά απλών εφαρμογών πάνω στην κατασκευή και διερεύνηση γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων.

Στόχοι:

Οι επιμορφούμενοι μέσα από τις δραστηριότητες του σεναρίου:

- Θα δημιουργήσουν ένα υπολογιστικό εργαλείο εύρεσης της γραφικής παράστασης της παραγώγου οποιασδήποτε συνάρτησης.
- Θα αποκτήσουν εμπειρίες σχετικές με την δημιουργική αξιοποίηση των δυνατοτήτων του λογισμικού, όσον αφορά στην δυναμική συμπεριφορά παραμετρικών συναρτήσεων.

Εκτιμώμενη διάρκεια:

Η ενδεικτική διάρκεια για την υλοποίηση του σεναρίου είναι 2 ώρες. Οι επιμορφούμενοι έχουν την δυνατότητα να επεκτείνουν τις δραστηριότητες ή να εντοπίσουν την υλοποίηση σε ένα μέρος μόνο των δραστηριοτήτων του σεναρίου. Αυτό σημαίνει ότι η διάρκεια επιμηκύνεται ή περιορίζεται ανάλογα με την διδακτική ατζέντα των επιμορφωτών και των επιμορφούμενων.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΕΝΟΤΗΤΑΣ

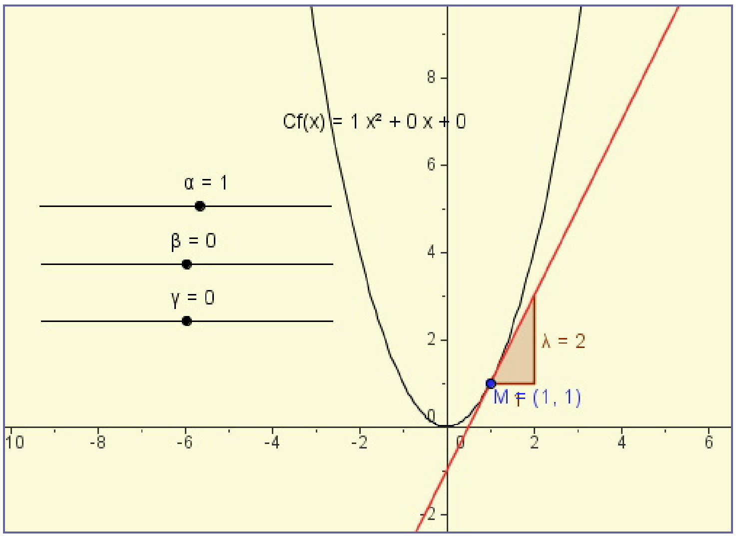
Αναφορά στα πλεονεκτήματα της χρήσης των ΤΠΕ

Η διδακτική αξιοποίηση τεχνολογικών εργαλείων δίνει νέες ευκαιρίες για δημιουργία μαθησιακών περιβαλλόντων τα οποία βελτιώνουν τις παραδοσιακές διδακτικές προσεγγίσεις, αλλά κυρίως εισάγουν νέες μορφές και ευκαιρίες μάθησης. Θα εστιάσουμε στην δεύτερη επισήμανση.
Η εισαγωγή της τεχνολογίας στην μαθησιακή διαδικασία μετασχηματίζει τόσο τις διδακτικές πρακτικές όσο και τα ίδια τα μαθηματικά ως γνωστικό αντικείμενο.
α) Δυναμικό μαθηματικό αντικείμενο vs στατικό μαθηματικό αντικείμενο.
Όταν στην οθόνη του υπολογιστή κατασκευάσουμε ένα μαθηματικό παραμετρικό αντικείμενο τότε το σύρσιμο(dragging) του αντικειμένου, είτε απ ευθείας είτε μέσω ενός μεταβολέα, δημιουργεί ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται με βάση την κίνηση του αντικειμένου. Αυτό σημαίνει ότι ο χρήστης μπορεί να θεωρεί τα αντικείμενα της οθόνης ως γεννήτορες μαθηματικών φαινομένων, μέσα στα οποία φαινόμενα μπορεί να αναζητηθούν αναλλοίωτες σχέσεις μεγεθών, δηλαδή θεωρήματα.
Τα μαθηματικά αντικείμενα που αναπαρίστανται με τα στατικά αναπαραστασιακά εργαλεία (χαρτί, πίνακας, διαφάνεια) αποτελούν στιγμιότυπα και η συσχέτισή τους μπορεί να γίνει μέσα από μία καθαρά νοητική επεξεργασία η οποία συχνά προϋποθέτει ιδιαίτερες δεξιότητες.
β) Επιπλέον δυνατότητες διερευνητικής μάθησης.
Η δυναμική οπτικοποίηση αλγεβρικών ποσοτήτων προκαλούν την διερευνητική διάθεση των χρηστών. Η δυνατότητα κίνησης των αντικειμένων και η εισαγωγή παραμέτρων στην κατασκευή, δίνουν την ευκαιρία στον διδάσκοντα να σχεδιάσει ανοικτές καταστάσεις προβλήματος οι οποίες απαιτούν επιτρέπουν την διατύπωση εικασιών και τον έλεγχό τους. Επιπλέον μπορούμε να δημιουργήσουμε δραστηριότητες οι οποίες καταργούν τα στεγανά μεταξύ των διαφόρων αλγεβρικών περιοχών και αναδεικνύουν ένα ενιαίο γενικό πλαίσιο μαθηματικής δράσης.
γ) Επιπλέον ευκαιρίες διαπραγμάτευσης.
Οι ανοικτές καταστάσεις προβλήματος και η δυναμική φύση των μαθηματικών αντικειμένων δημιουργούν νέους πυρήνες διαπραγμάτευσης και επικοινωνίας μεταξύ των επιμορφούμενων.

Αναλυτική και βηματική περιγραφή – ανάπτυξη – εργαστηριακή εκτέλεση της δραστηριότητας

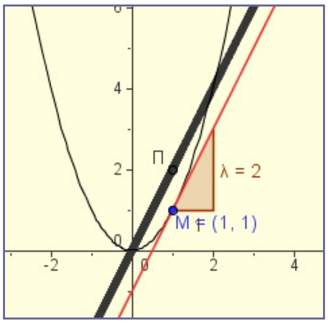
1. Εισαγωγικά

Ο επιμορφωτής παρουσιάζει τον μικρόκοσμο που έχει κατασκευάσει σε ένα αρχείο του λογισμικού Geogebra. Το αρχείο αυτό αρχικά εμφανίζει την γραφική παράσταση ενός παραμετρικού τριωνύμου $αx^2+βx+γ$ του οποίου οι τιμές των συντελεστών αλλάζουν από τους μεταβολείς α, β, γ. Επιπλέον εμφανίζεται η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ το οποίο κινείται επάνω στην γραφική παράσταση. Αυτό σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του σημείου Μ ικανοποιούν την σχέση $y= αx^2+βx+γ$. Τέλος εμφανίζεται η κλίση της εφαπτομένης μέσα από 2 αναπαραστάσεις, την αριθμητική και την γεωμετρική(ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετη πλευρά ίση με 1) (Διάρκεια 5 λεπτά)



2. Η εξοικείωση με τον μικρόκοσμο και την διερεύνηση.

Οι επιμορφούμενοι χειρίζονται τόσο το δυναμικό σημείο Μ πάνω στην γραφική παράσταση όσο και τους μεταβολείς. Παρατηρούν τις θέσεις της εφαπτομένης και ιδιαίτερα τις οριακές, τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές της κλίσης. Στην συνέχεια εμφανίζουν το σημείο Π από το παράθυρο της Άλγεβρας. Το σημείο Π επιτρέπει στον χρήστη να δημιουργήσει την γραφική παράστασης της σχέσης που συνδέει την τετμημένη του σημείου Μ με την κλίση της εφαπτομένης. Επιπλέον το σημείο Π αφήνει το ίχνος του και αυτό θα αποτελέσει εστία διαπραγμάτευσης μεταξύ των επιμορφούμενων για την σημασία της γραφικής παράστασης η οποία εμφανίζεται. (20 λεπτά)



Η φάση αυτή θα κλείσει με μία συζήτηση γύρω από την διαφορά που υπάρχει μεταξύ της παραδοσιακής παρουσίασης της έννοιας της παραγώγου συνάρτησης και των διδακτικών δυνατοτήτων που προσφέρει ο μικρόκοσμος στο ίδιο θέμα.

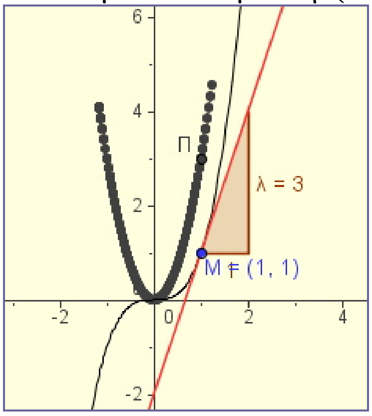
Διδακτικές υποδείξεις 1 και 2

Διδακτική υπόδειξη 1 προς τους επιμορφούμενους: Η διερευνητική στάση των μαθητών δεν είναι δεδομένη. Συχνά καταγράφουν μία μόνο τυχαία τιμή για κάθε ένα από τα μεταβαλλόμενα μεγέθη και καθώς δεν υπάρχει φανερή σχέση μεταξύ των τιμών εγκαταλείπουν την διερεύνηση. Υποδείξτε στους μαθητές σας να σύρουν το σημείο Μ σε ακέραιες και χαρακτηριστικές τιμές όπως (2, 4) (-1, 1) και να παρατηρήσουν την σχέση της τετμημένης του σημείου επαφής με την κλίση της εφαπτομένης. Ζητήστε να διατυπώσουν έναν κανόνα που φαίνεται να ισχύει και να τον επαληθεύσουν και για σημεία με μη ακέραιες τετμημένες.
Ζητήστε τώρα να εμφανίσουν το σημείο Π και να κινήσουν το σημείο Μ ώστε να γράψει μία ευθεία. Ζητείστε από τους μαθητές να διαπραγματευτούν την γραφική παράσταση που προέκυψε και στην συνέχεια να την συνδέσουν με τα άτυπα συμπεράσματα που είχαν προκύψει από απλή καταγραφή των αριθμητικών δεδομένων.

Διδακτική υπόδειξη 2 προς τους επιμορφούμενους: Ζητήστε από τους μαθητές να επιβεβαιώσουν τον κανόνα που ήδη έχουν εντοπίσει με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, δηλαδή με την χρήση του ορισμού της παραγώγου τιμής. Η διαδικασία αυτή είναι απαραίτητη καθώς όλες οι προηγούμενες δραστηριότητες στηρίχτηκαν στις υπολογιστικές δυνατότητες του εργαλείου. Στην ουσία οι μαθητές θα αποδείξουν ότι η παράγωγος της συνάρτησης $y=x^2$ είναι η $y=2x$. Ζητείστε από τους μαθητές να κατασκευάσουν με την βοήθεια που λογισμικού την γραφική παράσταση της ευθείας $y=2x$ και να παρατηρήσουν ότι αυτή συμπίπτει με την ευθεία που δημιούργησε το ίχνος του σημείου Π.
Παρατηρείστε ότι η όλη διαδικασία προχωρά ως εξής:
Πειράματα με τον μικρόκοσμο → εικασία → επαλήθευση με μαθηματικό τρόπο → επαλήθευση με γραφική παράσταση στον μικρόκοσμο.

3. Πρώτη επέκταση της διερεύνησης.

Τα υπολογιστικά εργαλεία επιτρέπουν νέες διδακτικές προσεγγίσεις στα μαθηματικά και οι επιμορφούμενοι θα πρέπει να δομήσουν την αντίληψη αυτή σταδιακά και μέσα από την προσωπική τους εμπειρία. Η διαδικασία την οποία έχουν εφαρμόσει, σε μία συγκεκριμένη περίπτωση συνάρτησης, θα μετασχηματιστεί σε ένα εργαλείο διερεύνησης μέσα από μία κλιμακούμενη επέκταση της εφαρμογής της.
Οι επιμορφούμενοι θα επιχειρήσουν επέκταση της διερεύνησης και αξιοποίηση της προσέγγισης της παραγώγου σε νέες συναρτήσεις οι οποίες όμως έχουν πολυωνυμική μορφή.
Θα μετασχηματίσουν την συνάρτηση σε τριτοβάθμια πολυωνυμική της απλούστερης μορφής, δηλαδή σε $y=x^3$. Στην συνέχεια θα επαναλάβουν την διερεύνηση με το ίχνος του σημείου Π οπότε θα εμφανιστεί μία νέα καμπύλη. (25 λεπτά)

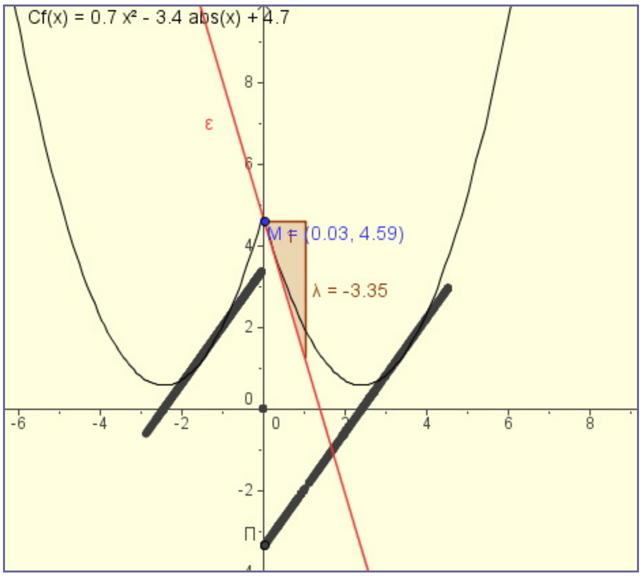


Διδακτική υπόδειξη 3

Διδακτική υπόδειξη 3 προς τους επιμορφούμενους: Η διαδικασία που εφαρμόσαμε προηγουμένως είναι ανάγκη να μετουσιωθεί σε διδακτική πρόταση. Θα πρέπει να θέσουμε διδακτικούς και μαθησιακούς στόχους, να κατασκευάσουμε ένα ή περισσότερα φύλλα εργασίας, να σχεδιάσουμε φάσεις της υλοποίησης μέσα στην τάξη και να περιγράψουμε μία αναμενόμενη διδακτική πορεία.
Θα πρέπει να έχουμε υπ όψιν ότι η διδακτική αξιοποίηση ενός εργαλείου αρχίζει από την στιγμή που υποχωρεί η γοητεία που ασκεί επάνω στον διδάσκοντα το εργαλείο και μετασχηματίζεται σε όργανο διδασκαλίας. Πολλές φορές η προσοχή μας στρέφεται στην κατασκευή αρχείων τα οποία ενώ παρουσιάζουν εξαιρετικό ενδιαφέρον από άποψη τεχνολογικής αξιοποίησης εν τούτοις δεν είναι δυνατόν να ενταχθούν αρμονικά μέσα στην διδακτική διαδικασία. Είναι σημαντικό να έχει διευκρινιστεί, με αρκετή ακρίβεια και διδακτικό ρεαλισμό, ποιο κομμάτι της κατασκευής των μικρόκοσμων θα έχουν έτοιμο οι μαθητές, ποιο κομμάτι ενδεχομένως θα μείνει κρυφό και ποιο κομμάτι θα κατασκευάσουν οι ίδιοι οι μαθητές.
Ας ετοιμάσουμε λοιπόν ένα βασικό φύλλο εργασίας και ένα απλό σχέδιο διδακτικής χρήσης του μικρόκοσμου για την διερεύνηση της παραγώγου της συνάρτησης $f(x)=x^{\nu}$.

4. Δεύτερη επέκταση της διερεύνησης.

Ο τρόπος με τον οποίο εισάγεται η έννοια της μη παραγωγίσιμης συνάρτησης στα σχολικά εγχειρίδια είναι απολύτως αναλυτικός και στηρίζεται αποκλειστικά στον αυστηρό ορισμό της παραγώγου τιμής ως όριο. Η γεωμετρική προσέγγιση της έννοιας της μη παραγωγίσιμης συνάρτησης είναι προβληματική όταν τα αναπαραστασιακά εργαλεία που διαθέτουμε είναι στατικά. Ο έλεγχος βέβαια μπορεί να πραγματοποιηθεί οπτικά και μέσω της γραφικής της παράστασης όταν αυτή παρουσιάζει γωνιακά σημεία. Η δυναμική προσέγγιση της μη παραγωγισιμότητας μιας συνάρτησης μπορεί να πραγματοποιηθεί με το νέο διερευνητικό εργαλείο που ήδη έχουμε γνωρίσει.
Οι επιμορφούμενοι θα επιχειρήσουν επέκταση της διερεύνησης και αξιοποίηση της προσέγγισης της παραγώγου σε συναρτήσεις οι οποίες παρουσιάζουν γωνιακά σημεία. Ένας απλός τρόπος να δημιουργηθεί μία τέτοια συνάρτηση είναι και η εισαγωγή της απολύτου τιμής σε έναν όρο μιας πολυωνυμικής.
Θα μετασχηματίσουν την ήδη υπάρχουσα συνάρτηση σε $y=\alpha x^2+\beta|x|+\gamma$. Στην συνέχεια θα επαναλάβουν την διερεύνηση με το ίχνος του σημείου Π οπότε θα εμφανιστεί η ασυνέχεια της γραφικής παράστασης στο σημείο 0. (25 λεπτά)

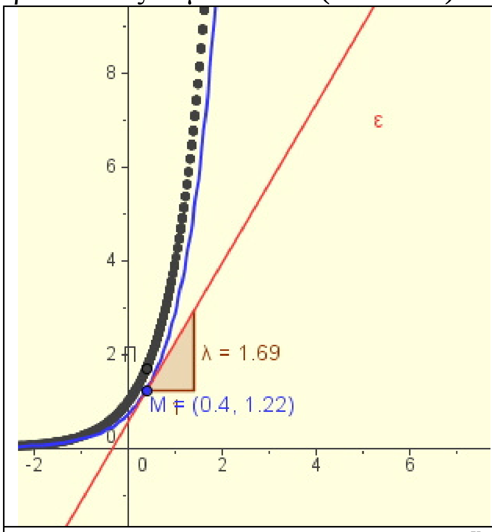


Διδακτική υπόδειξη 4

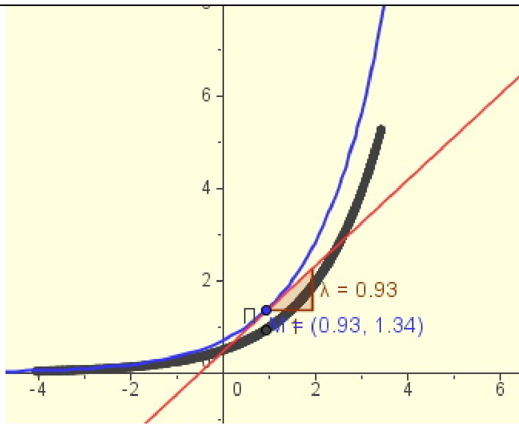
<u>*Διδακτική υπόδειξη 4 προς τους επιμορφούμενους*</u>: Μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να διερευνήσουν την γραφική παράσταση της συγκεκριμένης συνάρτησης η οποία περιέχει απόλυτο και όταν εμφανιστεί η γραφική παράσταση να ζητήσουμε να κάνουν μία εικασία για την μορφή της γραφικής παράστασης της παραγώγου, δηλαδή την γραμμή του ίχνους του σημείου Π.
Η γραφική παράσταση που θα προκύψει αναμένεται σε πρώτη φάση να δημιουργήσει μία έκπληξη στους μαθητές η οποία θα αποτελέσει έναν νέο πυρήνα διαπραγμάτευσης. Εδώ είναι ευκαιρία ο διδάσκων να προτείνει στους μαθητές να χαρακτηρίζουν λείες τις καμπύλες στις οποίες σε κάθε σημείο μπορούμε να φέρουμε εφαπτομένη οπότε θα συνδέσουν την έννοια της μη λείας συνάρτησης με την μη συνέχεια της παραγώγου.
Τέλος είναι ευκαιρία να ζητήσουμε από τους μαθητές να διερευνήσουν και άλλες συναρτήσεις οι οποίες περιέχουν στον τύπο τους απόλυτο.

5. Τρίτη επέκταση της διερεύνησης.

Η παράγωγος των εκθετικών συναρτήσεων αποτελεί ένα νέο πεδίο για την επέκταση των δραστηριοτήτων. Οι επιμορφούμενοι κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις διαφόρων εκθετικών συναρτήσεων και μελετούν την γραφική παράσταση της παραγώγου τους με την βοήθεια του ίχνους του σημείου Π.
Το σημαντικό δεν είναι η συνεχής επέκταση των δραστηριοτήτων αλλά η μετατροπή του μικρόκοσμου σε ένα νέο, δυναμικό εργαλείο διερεύνησης συναρτήσεων. Αυτό ακριβώς είναι ένα κομβικό σημείο κατά την υλοποίηση του σεναρίου και στο σημείο αυτό οι επιμορφούμενοι αναμένεται να έχουν ήδη αποκτήσει την συγκεκριμένη αντίληψη.
Εδώ μπορεί να τεθεί το εξής ρητορικό ερώτημα: Υπάρχει άραγε εκθετική συνάρτηση για την οποία συμπίπτει η γραφική παράστασής με την καμπύλη που γράφει το ίχνος του σημείου Π; Το ερώτημα είναι ρητορικό καθώς αναμένεται οι επιμορφούμενοι να γνωρίζουν ότι η συνάρτηση αυτή είναι η $y=e^x$.
Η προσέγγιση στο συγκεκριμένο ερώτημα μπορεί να γίνει όταν πειραματιστούν με τιμές για την βάση της εκθετικής τόσο μεγαλύτερες όσο και μικρότερες από τον αριθμό 2,71. Εδώ διαισθητικά μπορεί να βγει το συμπέρασμα ότι ίσως για κάποια τιμή της βάσης μεταξύ 2 και 4 υπάρχει αριθμός για τον οποίο οι δύο γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν. (25 λεπτά)



Η γραφική παράσταση της $y=\alpha.4^x$



Η γραφική παράσταση της $y=\alpha.2^x$

Διδακτική υπόδειξη 5

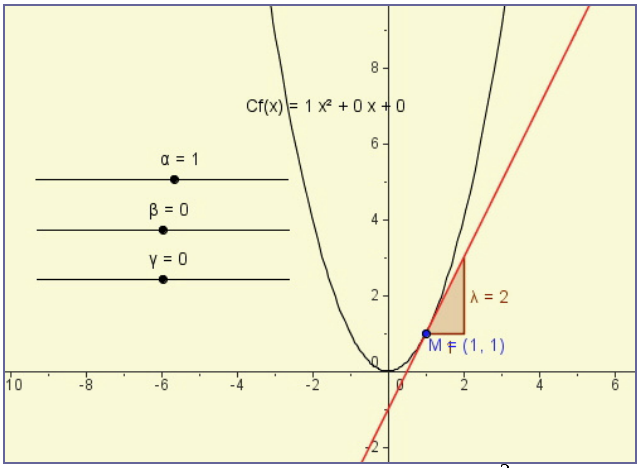
Διδακτική υπόδειξη 5 προς τους επιμορφούμενους: Μία ενδεχόμενη αφόρμιση για τους μαθητές θα ήταν το ερώτημα αν υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις είναι όμοιες με τις γραφικές παραστάσεις των παραγώγων. Η διαπραγμάτευση αυτή μπορεί να εξελιχθεί σε μία γόνιμη παράθεση εικασιών και υποθέσεων από τους μαθητές. Συγκεκριμένα ο διδάσκων μπορεί να ζητήσει να διερευνήσουν μία προς μία τις βασικές συναρτήσεις που έχουν γνωρίσει στο Λύκειο στην απλούστερη μορφή. Οι ομάδες των συναρτήσεων δεν είναι πολλές οπότε αναμένεται οι μαθητές να αναγνωρίσουν στην εκθετικές συναρτήσεις την συγκεκριμένη ιδιότητα. Στο σημείο αυτό ο διδάσκων θα επεκτείνει το ερώτημα αν υπάρχουν συναρτήσεις των οποίων οι γραφικές παραστάσεις όχι απλά μοιάζουν αλλά συμπίπτουν με τις γραφικές παραστάσεις των παραγώγων τους.
Έτσι αρχίζει ένας νέος κύκλος διερευνήσεων.

Προτεινόμενα φύλλα εργασίας.

Φύλλο εργασίας 1

Η κατασκευή

Στην οθόνη προβάλλονται:



Η γραφική παράσταση ενός παραμετρικού τριωνύμου $αx^2+βx+γ$ του οποίου οι τιμές των συντελεστών αλλάζουν από τους μεταβολείς α, β, γ.
Η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης στο σημείο Μ
Η κλίση της εφαπτομένης μέσα από 2 αναπαραστάσεις, την αριθμητική και την γεωμετρική

Ερωτήματα για διερεύνηση

1) Να εμφανίσετε το δυναμικό σημείο Π και να παρατηρήσετε τις συντεταγμένες του. Τι παρατηρείτε; Πως ορίζεται το σημείο αυτό; Πως σχετίζεται με την συνάρτηση;

2) Να σύρετε το σημείο Μ πάνω στην γραφική παράσταση. Να ερμηνεύσετε την καμπύλη που γράφει το σημείο Π. Να συζητήσετε σε τι διαφέρει η προσέγγιση αυτή της παραγώγου συνάρτησης από την παραδοσιακή-σχολική.

3) Να αλλάξετε την δύναμη του x και να επαναλάβετε. Να σχεδιάσετε μία διδακτική πορεία αξιοποίησης του μικρόκοσμου ενταγμένη στα πλαίσια της διδασκαλίας της έννοιας.

Φύλλο εργασίας 2

Ερωτήματα για διερεύνηση

1) Να κατασκευάσετε την γραφική παράσταση μιας συνάρτησης η οποία έχει γωνιακά σημεία. Ένας απλός τρόπος είναι η εισαγωγή του απολύτου στον τύπο της συνάρτησης (π.χ πολυωνυμικής)

2) Να σύρετε το σημείο Μ πάνω στην γραφική παράσταση. Να ερμηνεύσετε την γραφική παράσταση του ίχνους του σημείου Π και την μορφή της. Να συζητήσετε σε τι διαφέρει η προσέγγιση αυτή της μη παραγωγίσιμης συνάρτησης από την παραδοσιακή-σχολική. Να σχεδιάσετε μία διδακτική πορεία αξιοποίησης του μικρόκοσμου ενταγμένη στα πλαίσια της διδασκαλίας της έννοιας.

3) Να αναζητήσετε συναρτήσεις των οποίων η γραφική παράσταση είναι όμοια με την γραφική παράσταση της παραγώγου της. Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση στην οποία οι δύο γραφικές παραστάσεις να συμπίπτουν. Να σχεδιάσετε μία διδακτική πορεία αξιοποίησης των αποτελεσμάτων της διερεύνησής σας.

Συζήτηση με τους επιμορφούμενους.

Όταν ολοκληρωθεί η διερεύνηση οι επιμορφούμενοι θα διαπραγματευτούν συνολικά πλέον την όλη επιμορφωτική δραστηριότητα. Προτείνεται να εστιαστεί η συζήτηση στα παρακάτω ερωτήματα.

- Υπάρχει διαφορά στα μαθηματικά που διδάσκονται στην σχολική τάξη και στα μαθηματικά που διδάσκονται με τον συγκεκριμένο μικρόκοσμο; Τι παραμένει αναλλοίωτο και τι μεταβάλλεται στην μαθησιακή διαδικασία που προκύπτει με τους δύο τρόπους διδασκαλίας;
- Με ποιους τρόπους μπορεί να ενταχθεί ο μικρόκοσμος στην διδασκαλία της παραγώγου; Μπορεί να αντικαταστήσει την σχολική προσέγγιση; Πρέπει να αντικαταστάσει την σχολική προσέγγιση;
- Ποιες άλλες γνωστικές περιοχές των μαθηματικών θα μπορούσαν να υποστηριχτούν με όμοιους μικρόκοσμους οι οποίοι στηρίζονται στο ίχνος ενός δυναμικού σημείου Π;
- Ποιος είναι ο ρόλος του διδάσκοντα και ποιος των μαθητών όταν υλοποιείται η συγκεκριμένη δραστηριότητα;

Αξιολόγηση της επιμορφωτικής δραστηριότητας.

Η αξιολόγηση της επιμορφωτικής δραστηριότητας θα υλοποιηθεί με την εκπόνηση από τους επιμορφούμενους εργασίας (που θα συνοδεύεται από γραπτό κείμενο) η οποία ενδεικτικά θα περιγράφει τα ακόλουθα:

- Το σχεδιασμό ενός ολοκληρωμένου σχεδίου μαθήματος που θα αξιοποιεί το συγκεκριμένο εκπαιδευτικό εργαλείο για τη διδασκαλία ενός συγκεκριμένου θέματος. Το θέμα θα μπορεί να εντάσσεται μέσα στο μαθηματικό πλαίσιο των παραγώγων.

- Την υλοποίηση μιας μικροδιδασκαλίας στο πλαίσιο ομάδας εργασίας.

- Υλοποίηση σχεδίου μαθήματος σε επιλεγμένο από τον επιμορφούμενο θέμα το οποίο όμως δεν εντάσσεται στο πλαίσιο των παραγώγων. Εδώ ελέγχεται κατά πόσο ο μικρόκοσμος έχει μετεξελιχθεί για τους επιμορφούμενους σε διδακτικό εργαλείο με διευρυμένη εμβέλεια.

Επεκτάσεις

Μία δυνατή επέκταση της επιμορφωτικής δραστηριότητας θα μπορούσε να στηριχτεί στην αντιστροφή των μαθηματικών δεδομένων και στην αλλαγή λογισμικού.
Συγκεκριμένα στην παρούσα δραστηριότητα ο επιμορφούμενοι χρησιμοποίησαν τον τύπο της συνάρτησης και την γραφική παράσταση για να διερευνήσουν την γραφική παράσταση και επομένως και τον τύπο της παραγώγου.
Αν αντιστρέψουμε την διαδικασία τότε θα πρέπει με δεδομένη την παράγωγο μιας συνάρτησης να σχεδιάσουμε την γραφική παράσταση της συνάρτησης.
Δραστηριότητες αυτής της μορφής αντιστοιχούν στην θεματική ενότητα των διαφορικών εξισώσεων και δεν είναι εύκολο να υλοποιηθούν με ένα από τα γνωστά λογισμικά (Cabri, Sketchpad, Geogebra).
Η χρήση ενός άλλου λογισμικού στο οποίο οι γεωμετρικές κατασκευές στηρίζονται στην διαφορική μετατόπιση των σημείων (στροφές και ευθύγραμμες μετακινήσεις) δημιουργεί ένα περισσότερο κατάλληλο μαθησιακό περιβάλλον. Ένα λογισμικό με αυτήν την δυνατότητα σε συνδυασμό με δυνατότητα προγραμματισμού (Χελωνόκοσμος) μπορεί να υποστηρίξει αυτής της μορφής δραστηριότητες. Η βασική ιδέα των δραστηριοτήτων θα μπορούσε να στηριχτεί στο γεγονός ότι γνωρίζοντας την παράγωγο τιμή $f'(x_0)$ μιας συνάρτησης σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε γνωρίζουμε και την γωνία ω της εφαπτόμενης με την οριζόντια. Η γωνία αυτή είναι ίση με $\omega=\arctan(f'(x_0)$ και επομένως είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο θα κινηθεί η χελώνα ώστε να γράφει μικρές εφαπτόμενες πάνω σε μία μη ορατή καμπύλη. Το σύνολο των εφαπτόμενων αυτών θα προσεγγίζει την γραφική παράσταση της συνάρτησης.