Παράδοξα στη Φιλοσοφία της Λογικής και των Μαθηματικών

Αριστείδης Αραγεώργης
Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

1. «Παράδοξο» και «λύση» παραδόξου

Ως *παράδοξο* νοείται ένα (εκτεταμένο) επιχείρημα που εξάγει ένα φαινομενικά μη αποδεκτό συμπέρασμα από φαινομενικά αποδεκτές προκείμενες με φαινομενικά αποδεκτούς κανόνες συναγωγής / συμπερασμού / συλλογισμού. Το συμπέρασμα φαίνεται μη αποδεκτό είτε γιατί αποτελεί λογική αντίφαση είτε γιατί συγκρούεται με το συμπέρασμα κάποιου άλλου φαινομενικά αποδεκτού επιχειρήματος είτε γιατί αντιβαίνει σε αποδεκτές θεωρίες ή διαισθήσεις.

Επομένως μια ολοκληρωμένη αντιμετώπιση («λύση») ενός παραδόξου έχει δυο συνιστώσες:

- Εντοπισμός των φαινομενικά αποδεκτών προκείμενων, κανόνων συναγωγής, θεωριών ή διαισθήσεων που πρέπει να εγκαταλειφθούν και υπόδειξη του τρόπου αντικατάστασής τους.
- Εξήγηση του *γιατί* οι εν λόγω προκείμενες, κανόνες συναγωγής, θεωρίες ή διαισθήσεις δεν πρέπει, παρά «τα φαινόμενα», να θεωρούνται αποδεκτές ή αποδεκτοί.

Πολλά παράδοξα δεν είναι απλώς «γρίφοι», «νοητικά παιχνίδια», που προκαλούν τη σκέψη. Θέτουν φιλοσοφικά ή επιστημονικά προβλήματα τα οποία

- Δημιουργούν *κρίσεις* στα θεμέλια της λογικής, των μαθηματικών ή των επιστημών
- Απαιτούν, για την αντιμετώπισή τους, *επαναστατικές* αλλαγές στους τρόπους με τους οποίους σκεφτόμαστε λογικούς κανόνες, τα μαθηματικά αντικείμενα ή τον φυσικό κόσμο.

2. Παράδοξα στη λογική

2.1. Τι θα πει «συνεπάγεται»;

Σύγχρονη κλασική λογική, περίπου 1879 - 1928

(G. Frege, B. Russell, A. N. Whitehead, D. Hilbert, W. Ackermann, κ.ά.)

Αν p, τότε q ≡ *Δεν ισχύει ότι* η p είναι αληθής *και* η q ψευδής

$$p \to q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q) \equiv p \to q$
Α	Α	Ψ	Ψ	Α
Α	Ψ	Α	Α	Ψ
Ψ	Α	Ψ	Ψ	Α
Ψ	Ψ	Α	Ψ	Α

Αλλά τότε …

Καθένας από τους παρακάτω τύπους θα είναι μια *ταυτολογία*:

$p \to (q \to p)$	*«Αν μια πρόταση είναι αληθής, τότε έπεται από οποιαδήποτε πρόταση»* (;)
$\neg p \to (p \to q)$	*«Αν μια πρόταση είναι ψευδής, τότε συνεπάγεται οποιαδήποτε πρόταση»* (;)
$(p \to q) \vee (q \to p)$	*Για οποιεσδήποτε δυο προτάσεις, ή η πρώτη συνεπάγεται τη δεύτερη ή η δεύτερη συνεπάγεται την πρώτη ή και τα δυο»* (;)

Η κλασική αληθοσυναρτησιακή προτασιακή λογική δεν μπορεί να ενσωματώσει μια έννοια *συνάφειας νοήματος* – το μοναδικό νόημα είναι η αληθοτιμή (Α, Ψ). Αν θέλουμε να ενσωματώσουμε σε ένα τυπικό σύστημα προτασιακής λογικής μια έννοια συνάφειας νοήματος, τότε πρέπει να κατασκευάσουμε ένα *εναλλακτικό* τυπικό σύστημα προτασιακής λογικής με ένα *μη αληθοσυναρτησιακό* ορισμό της συνεπαγωγής.

Λογικές της συνάφειας (Relevance / Relevant Logics)

Alan R. Anderson και Nuel D. Belnap (1959 -)

Entailment: The Logic of Relevance and Necessity,

vol. 1 (1975), vol. 2 (1992, with J. M. Dunn).

2.2. Ο ψεύτης και η αυτο-αναφορά

p: «Η πρόταση p δεν είναι αληθής»

Έπεται ότι:

Η p είναι αληθής αν και μόνο αν η p δεν είναι αληθής

$$p \leftrightarrow \neg p$$

Αντίφαση!

Μήπως πρέπει να απαγορευθούν όλες οι *αυτο-αναφορές*;

Διάκριση γλώσσας / μεταγλώσσας

Θεωρία τύπων του Russell (1903 -):

Το κατηγόρημα ‘είναι αληθής’ που αποδίδεται σε προτάσεις της γλώσσας L («προτάσεις τύπου n») *δεν* ανήκει στη γλώσσα L, αλλά στη *μεταγλώσσα* που χρησιμοποιείται για να μελετηθεί η γλώσσα L (είναι «τύπου $n+1$»). Επομένως η παραπάνω πρόταση p δεν είναι καλώς σχηματισμένη.

Όμως μερικές «αυτο-αναφορικές» προτάσεις παίζουν κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη σημαντικών θεωρημάτων!

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω T μια αξιωματικοποιημένη μαθηματική θεωρία τέτοια ώστε:

(1) κάθε πρόταση που μπορεί να αποδείξει η T είναι αληθής

(2) στη γλώσσα της T μπορεί να εκφραστεί η πρόταση

g_T: «Η g_T δεν μπορεί να αποδειχθεί στην T»

ΛΗΜΜΑ. Η g_T είναι αληθής.

Απόδειξη.

1. Η g_T είναι ή αληθής ή ψευδής.
2. Ας υποθέσουμε ότι η g_T είναι ψευδής.
3. Τότε αυτό που λέει η g_T είναι ψευδές.
4. Επομένως η g_T μπορεί να αποδειχθεί στην T.
5. Όμως κάθε πρόταση που μπορεί να αποδείξει η T είναι αληθής.
6. Άρα η g_T θα είναι αληθής – ΑΤΟΠΟ από 2-6 (καμία πρόταση δεν είναι και αληθής και ψευδής).
7. Συνεπώς η g_T δεν είναι ψευδής.
8. Άρα η g_T είναι αληθής. ♦

ΘΕΩΡΗΜΑ. Η T δεν μπορεί να αποδείξει ούτε την g_T ούτε την άρνηση της g_T.

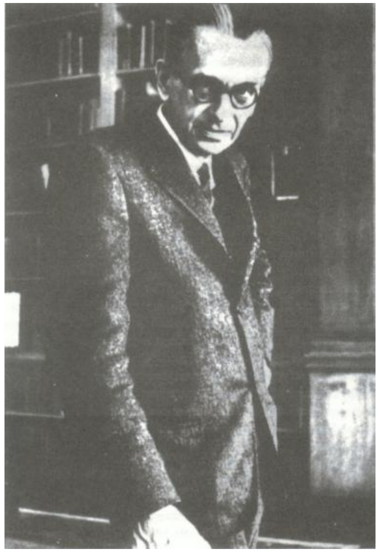
Απόδειξη.

Αφού η g_T είναι αληθής, η T δεν μπορεί να αποδείξει την g_T γιατί αυτό ακριβώς λέει η g_T. Από την άλλη, αφού η g_T είναι αληθής, η άρνηση της g_T θα είναι ψευδής. Έπεται ότι η T δεν μπορεί να αποδείξει ούτε την άρνηση της g_T γιατί η T μπορεί να αποδείξει μόνο αληθείς προτάσεις.

♦

Υπάρχουν μαθηματικές θεωρίες που δεν μπορούν να «αποφασίσουν» για προτάσεις που διατυπώνονται στη γλώσσα τους!

Kurt Gödel: Θεωρήματα μη πληρότητας (1931)



3. Παράδοξα στα μαθηματικά

3.1. Τα «μεγέθη» των απείρων

Είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών $\mathbb{N}=\{0,1,2,3,\ldots\}$

«μεγαλύτερο» από το σύνολο των άρτιων φυσικών αριθμών

$\mathbb{A}=\{0,2,4,6,\ldots\}$;

► *Είναι!* Το $\mathbb{A}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$.

► *Δεν είναι!* Υπάρχει μια 1-1 και επί αντιστοιχία μεταξύ των στοιχείων του $\mathbb{N}$ και των στοιχείων του $\mathbb{A}$.

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots & n & & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & & \cdots \end{array}$$

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{A}:n\mapsto f(n)=2n$$

G. Cantor: Το παράδοξο δείχνει απλώς ότι δυο κριτήρια για τη σύγκριση συνόλων (το *κριτήριο της 1-1 και επί αντιστοιχίας* και το *κριτήριο του γνήσιου υποσυνόλου*) δεν συμπίπτουν στην περίπτωση των απειροσυνόλων.

ΟΡΙΣΜΟΣ. Η πληθικότητα ενός συνόλου A είναι *αυστηρά μικρότερη* από την πληθικότητα ενός συνόλου B ($\mathrm{card}A < \mathrm{card}B$) αν και μόνο αν υπάρχει 1-1 συνάρτηση από το A στο B αλλά δεν υπάρχει 1-1 συνάρτηση από το B στο A.

ΘΕΩΡΗΜΑ. Για κάθε σύνολο A, $\mathrm{card}A < \mathrm{card}P(A)$, όπου $P(A)$ το *δυναμοσύνολο* του A, το σύνολο όλων των υποσυνόλων του A.

Παράδειγμα. Αν $A = \{\alpha, \beta\}$ (2 στοιχεία), τότε $P(A) = \{\varnothing, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\alpha, \beta\}\}$ ($2^2 = 4$ στοιχεία).

Απόδειξη. Για κάθε A, η $f : A \to P(A) : x \mapsto f(x) = \{x\}$ είναι 1-1. Υποθέτουμε, για *reductio*, ότι για κάποιο A υπάρχει 1-1 συνάρτηση $g : P(A) \to A : X \mapsto g(X)$. Θεωρούμε το

$$B = \{g(X) : X \subseteq A \text{ και } g(X) \notin X\} .$$

$B \subseteq A$ και $B \neq \varnothing$ αφού $g(\varnothing) \in B$ ($\varnothing \subseteq A$ και $g(\varnothing) \notin \varnothing$).

Αλλά $g(B) \in B$ αν και μόνο αν $g(B) \notin B$ - ΑΤΟΠΟ. ♦

Παράδοξο του Cantor (1899). Έστω $\mathfrak{A}$ το σύνολο όλων των συνόλων. Αφού το $\mathfrak{A}$ είναι το σύνολο όλων των συνόλων, η πληθικότητα του $\mathfrak{A}$ δεν μπορεί να είναι αυστηρά μικρότερη από την πληθικότητα οποιουδήποτε συνόλου. Αλλά, σύμφωνα με το θεώρημα του Cantor, η πληθικότητα του $\mathfrak{A}$ είναι αυστηρά μικρότερη από την πληθικότητα του δυναμοσυνόλου $P(\mathfrak{A})$ του $\mathfrak{A}$. *Αντίφαση!*

Δεν υπάρχει σύνολο όλων των συνόλων!

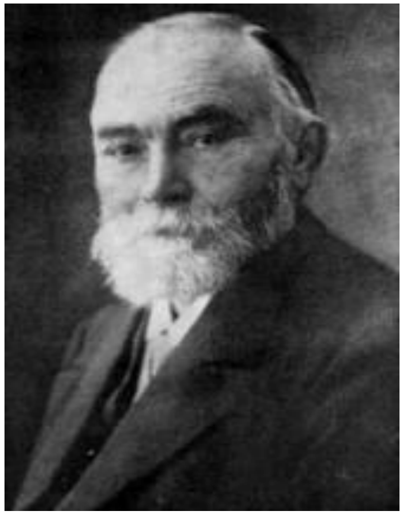
Το *σύμπαν* της θεωρίας συνόλων, η «συνολοθεωρητική ιεραρχία», δεν είναι *αντικείμενο* που μπορεί να πραγματευθεί η *ίδια* η θεωρία συνόλων. Και αυτό συνιστά ένα παράδοξο για το άπειρο που παραμένει ακόμη και στον «παράδεισο του απείρου» που μάς αποκάλυψε ο Cantor: *φαίνεται να είμαστε υποχρεωμένοι* ***και*** *να αναγνωρίζουμε ενότητα σε μια αληθώς άπειρη πολλαπλότητα* ***και*** *να μην αναγνωρίζουμε ενότητα σε αυτήν!*

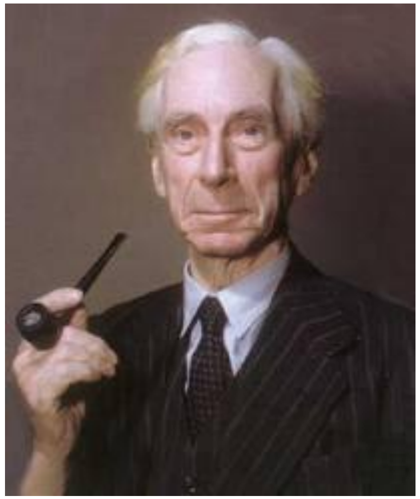
3.2. Ο Russell και το σφάλμα του Frege

Λογικισμός: αναγωγή των μαθηματικών στη λογική

G. Frege, *Τα Θεμέλια της Αριθμητικής*, 1884

G. Frege, *Οι Βασικοί Νόμοι της Αριθμητικής*, τόμος 1 (1893), τόμος 2 (1903)





[BN5]. Για οποιεσδήποτε δυο έννοιες («ιδιότητες») φ και ψ, η έκταση της έννοιας φ ταυτίζεται με την έκταση της έννοιας ψ αν και μόνο αν για κάθε αντικείμενο x, το x υπάγεται στην έννοια φ («έχει την ιδιότητα φ») ακριβώς στην περίπτωση που υπάγεται στην έννοια ψ («έχει την ιδιότητα ψ»).

(*) $\{x:\varphi(x)\}=\{x:\psi(x)\}$ αν και μόνο αν $\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$

Εύλογο;

Ο δρόμος προς την Κόλαση είναι στρωμένος με «εύλογες» ιδέες!

Ο [ΒΝ5] «εμπεριέχει» την παραδοχή:

Κάθε έννοια («ιδιότητα») ψ έχει έκταση («ορίζει καλώς ένα σύνολο»), $\hat{\Psi} = \{x : \psi(x)\}$.

Πράγματι, αν εφαρμόσουμε τον [BN5],

(*) $\{x:\varphi(x)\}=\{x:\psi(x)\}$ αν και μόνο αν $\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\psi(x))$,

για ψ *ίδια* έννοια με την φ, το δεξιό μέλος της (*) γίνεται $\forall x(\varphi(x)\leftrightarrow\varphi(x))$ και είναι λογικώς αληθές. Άρα θα είναι αληθές και το αριστερό μέλος της (*), $\{x:\varphi(x)\}=\{x:\psi(x)\}$. Από αυτό συνάγουμε ότι $\exists y(y=\{x:\psi(x)\})$, αφού από κάθε πρόταση της μορφής $a=b$ συνάγεται η πρόταση $\exists y(y=b)$. Επομένως, για κάθε ψ, υπάρχει το σύνολο $\hat{\Psi}=\{x:\psi(x)\}$.

Και ποιο το πρόβλημα;

► Αν $\psi(x)$: «x είναι σύνολο», τότε το $\hat{\Psi} = \{x : \psi(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των συνόλων – *Παράδοξο Cantor!*

► Αν $\psi(x)$: «x είναι σύνολο και $x \notin x$», τότε το $\hat{\Psi} = \{x : \psi(x)\}$ είναι το σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους – *Παράδοξο Russell!*

(Αν $\hat{\Psi} = \{x : x$ σύνολο και $x \notin x\}$, τότε $\hat{\Psi} \in \hat{\Psi} \leftrightarrow \hat{\Psi} \notin \hat{\Psi}$)

Έστω w το κατηγόρημα: είναι κατηγόρημα που δεν μπορεί να αποδοθεί στον εαυτό του. Μπορεί το w να αποδοθεί στον εαυτό του; Από κάθε απάντηση έπεται η αντίθετή της. Επομένως πρέπει να συμπεράνουμε ότι το w δεν είναι κατηγόρημα. Παρόμοια δεν υπάρχει κλάση (ως ολότητα) εκείνων των κλάσεων που, με την καθεμιά θεωρούμενη ως ολότητα, δεν ανήκουν στον εαυτό τους.

Russell, Επιστολή προς τον Frege, 16 Ιουνίου 1902

Λύση από τον E. Zermelo (1908). Για να χρησιμοποιήσουμε μια ιδιότητα προκειμένου να ορίσουμε ένα σύνολο πρέπει (α) να έχουμε *ήδη* ένα σύνολο από το οποίο θα διαχωρίσουμε τα στοιχεία που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα και (β) η ιδιότητα πρέπει να είναι «καλώς ορισμένη» (να μπορεί να εκφραστεί σε μια πρωτοβάθμια γλώσσα με μοναδικό μη λογικό σύμβολο το ‘$\in$’).

Αξιωματικό σχήμα διαχωρισμού

Για κάθε τύπο $\varphi(x)$, με ελεύθερη μεταβλητή x, της γλώσσας της θεωρίας ZFC ισχύει $\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow (x \in z \wedge \varphi(x)))$.

4. Παράδοξα στις εφαρμογές

4.1. Δύσκολες αποφάσεις

Πρόβλημα απόφασης

► Δυνατές *πράξεις*: $A_1, A_2, \ldots, A_n$

► Δυνατές *καταστάσεις* (του κόσμου): $S_1, S_2, \ldots, S_m$

► *Πιθανότητα* p_k για τη δυνατή κατάσταση S_k $(k = 1, 2, \ldots, m)$

► *Ωφελιμότητα* u_{jk} για το δυνατό *αποτέλεσμα* (A_j, S_k), όπου

$j = 1, 2, \ldots, n$ και $k = 1, 2, \ldots, m$.

Πίνακας απόφασης

	S_1 $\Pr(S_1) = p_1$	S_2 $\Pr(S_2) = p_2$	$\cdots$	S_m $\Pr(S_m) = p_m$
A_1	u_{11}	u_{12}	$\cdots$	u_{1m}
A_2	u_{21}	u_{22}	$\cdots$	u_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
A_n	u_{n1}	u_{n2}	$\cdots$	u_{nm}

► *Αναμενόμενη* ή *προσδοκώμενη ωφελιμότητα* από την πράξη A_j $(j = 1,2,...,n)$:

$$EU(A_j) = p_1 u_{j1} + p_2 u_{j2} + ... + p_m u_{jm} = \sum_{k=1}^{m} p_k u_{jk}$$

► *Ορθολογικότητα*: το υποκείμενο πρέπει να επιλέξει εκείνη την πράξη (αν υπάρχει) που έχει τη *μέγιστη* προσδοκώμενη ωφελιμότητα.

ΑΠΛΗ ΑΠΟΦΑΣΗ

Σε μια ιπποδρομία, τρέχουν δυο μόνο άλογα, ο Άνεμος και ο Αστραχάν. Ένας «Φίλιππος» διαθέτει €100 για να στοιχηματίσει σε οποιοδήποτε από τα δυο άλογα και αποδίδει πιθανότητα 4/5 να κερδίσει ο Άνεμος και 1/5 να κερδίσει ο Αστραχάν. Ο «Φίλιππος» θα πάρει €500 αν κερδίσει ο Άνεμος, αλλά €2100 αν κερδίσει ο Αστραχάν. Σε ποιο από τα δυο άλογα πρέπει να στοιχηματίσει;

	Κερδίζει ο Άνεμος $(4/5) = 0,8$	Κερδίζει ο Αστραχάν $(1/5) = 0,2$
Στοιχηματίζει στον Άνεμο	400	- 100
Στοιχηματίζει στον Αστραχάν	- 100	2000

$$EU(\text{Στοιχηματίζει στον Άνεμο}) = \frac{4}{5} \cdot 400 + \frac{1}{5} \cdot (-100) = 300$$

$$EU(\text{Στοιχηματίζει στον Αστραχάν}) = \frac{4}{5} \cdot (-100) + \frac{1}{5} \cdot 2000 = 320$$

Άρα ... Αστραχάν!

ΔΥΣΚΟΛΗ ΑΠΟΦΑΣΗ

Σε ένα παιχνίδι, έχετε να επιλέξετε ανάμεσα σε δυο σφραγισμένους φακέλους, τον A και τον B. Καθένας περιέχει ένα χρηματικό ποσό και ο ένας περιέχει ακριβώς τα διπλάσια χρήματα από τον άλλο. Επιλέγετε τον A, αλλά αμέσως μετά σας δίνεται η ευκαιρία να αλλάξετε επιλογή. Πρέπει άραγε να αλλάξετε;

Αν x είναι το ποσό που περιέχεται στον A, τότε ο B περιέχει ή $x/2$ ή $2x$. Και οι δυο δυνατότητες είναι εξίσου πιθανές. Έτσι, η προσδοκώμενη ωφελιμότητα από την αλλαγή επιλογής φακέλου είναι

$$EU(\text{Αλλαγή}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cdot 2x = \frac{5x}{4} = 1{,}25x \ ,$$

που είναι *μεγαλύτερη* της προσδοκώμενης ωφελιμότητας από το να επιμείνετε στην αρχική επιλογή του $A\ (= x)$.

Συνεπώς, φαίνεται ότι η ορθολογικότητα επιβάλλει να αλλάξετε επιλογή φακέλου. *Αν όμως το κάνατε αυτό και διαλέγατε τον φάκελο Β, θα μπορούσατε να χρησιμοποιήσετε το ίδιο («συμμετρικό») επιχείρημα για να δείξετε ότι πρέπει να επιστρέψετε στην επιλογή του φακέλου Α!*

Οπότε;;;

(«Το παράδοξο των δυο φακέλων» - “The two envelope paradox”,1995)

4.2. Συνεχής χρόνος και λάμπες που αναβοσβήνουν

Φανταστείτε μια λάμπα συνδεδεμένη με ένα διακόπτη πάνω σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα. Ο διακόπτης μπορεί να βρίσκεται σε κάθε χρονική στιγμή σε ακριβώς μια από δυο δυνατές θέσεις που αντιστοιχούν στις καταστάσεις «λάμπα αναμμένη» και «λάμπα σβηστή». Υποθέστε ότι αρχικά –ας πούμε, την ώρα $0:00:00$ μιας βροχερής νύχτας– η λάμπα είναι σβηστή.

Στη συνέχεια, η λάμπα υποβάλλεται στην ακόλουθη λειτουργία: όταν έχει περάσει το $1/2$ του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή $\tau^* = 1:00:00$ (δηλ., κατά την $t = 0:30:00$) κλείνουμε τον διακόπτη και ανάβει η λάμπα, όταν έχει περάσει το $1/2 + 1/4$ του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή $\tau^* = 1:00:00$ (δηλ., κατά την $t = 0:45:00$) ανοίγουμε τον διακόπτη και σβήνει η λάμπα, όταν έχει περάσει το $1/2 + 1/4 + 1/8$ του χρόνου μέχρι τη χρονική στιγμή

$\tau^* = 1:00:00$ (δηλ., κατά την $t = 0:52:30$) κλείνουμε τον διακόπτη και ανάβει η λάμπα, κ.ο.κ. Έτσι, μέχρι τη χρονική στιγμή $\tau^* = 1:00:00$, θα έχουμε εκτελέσει ένα άπειρο πλήθος πράξεων – έναν *υπερστόχο* [supertask].

Ποια θα είναι η κατάσταση της λάμπας κατά τη χρονική στιγμή τ^*;

► Δεν θα είναι αναμμένη γιατί δεν υπάρχει χρονική στιγμή t μεταξύ $0:00:00$ και $1:00:00$ κατά την οποία ανάβουμε τη λάμπα χωρίς να τη σβήσουμε αργότερα (σε κάποια χρονική στιγμή t' μεταξύ t και $1:00:00$).

► Δεν θα είναι σβηστή γιατί δεν υπάρχει χρονική στιγμή t μεταξύ $0:00:00$ και $1:00:00$ κατά την οποία σβήνουμε τη λάμπα χωρίς να την ανάψουμε αργότερα (σε κάποια χρονική στιγμή t' μεταξύ t και $1:00:00$).

Αλλά, εκ κατασκευής, η λάμπα πρέπει να είναι ή αναμμένη ή σβηστή κατά τη χρονική στιγμή τ^*.

Οπότε;;;

(«Η λυχνία του Thomson», 1970)

5. Επίλογος: Τα «άτομα» της φιλοσοφίας

Olin, D. ([2003] 2007): *Το Παράδοξο*. Μετάφραση: Α. Σπανάκη. Επιστημονική επιμέλεια: Δ. Πορτίδης. Αθήνα: Εκδόσεις ΟΚΤΩ.

Sainsbury, R. M. (1988): *Paradoxes*. Cambridge: Cambridge University Press.

Sorensen, R. (2003): *A Brief History of the Paradox: Philosophy and the Labyrinths of the Mind*. Oxford: Oxford University Press.

Οι μαθηματικοί χαρακτηρίζουν τους πρώτους αριθμούς ως άτομα γιατί κάθε αριθμός μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Θεωρώ τα παράδοξα ως τα άτομα της φιλοσοφίας γιατί συγκροτούν τις βασικές αφετηρίες για πειθαρχημένη σκέψη.

R. Sorensen, *A Brief History of the Paradox*, 2003 (ελεύθερη μετάφραση)