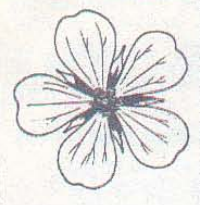
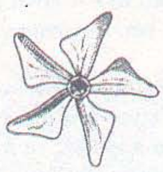
1998/06 (Ιούνιος 1998)



Κανονικά πεντάγωνα:
μια κατηγορία πολυγώνων με ενδιαφέρουσες ιδιότητες

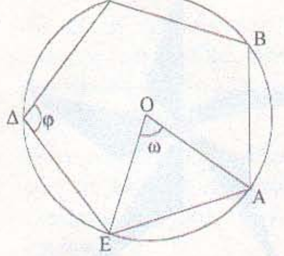
Στέργιος Κ. Τουρναβίτης



Πολλά κατώτερα είδη του ζωϊκού βασιλείου όπως ο γνωστός μας αστερίας, εχινόδερμα της τάξεως των Οφιοειδών αλλά και αμέτρητες ποικιλίες λουλουδιών έχουν το σχήμα του κανονικού πενταγώνου. Αυτά τα επίπεδα σχήματα που εμφανίζονται τόσο συχνά στη φύση τα χαρακτηρίζει η συμμετρία όπως άλλωστε και όλα τα κανονικά πολύγωνα.

Ας δούμε πώς μπορούμε να σχεδιάσουμε ένα κανονικό πεντάγωνο, να υπολογίσουμε τις γωνίες του, την περίμετρο, εμβαδόν και να βρούμε τους άξονες συμμετρίας του.

Σ' ένα κύκλο (Ο, ρ) παίρνουμε μια επίκεντρη γωνία $\omega = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$ και στη συνέχεια με το διαβήτη μετράμε το αντίστοιχο τόξο της $\overset{\frown}{ΕΑ}$ (Σχ. 1).



Σχήμα 1

Στη συνέχεια πάλι με το διαβήτη παίρνουμε άλλα τέσσερα διαδοχικά ίσα τόξα, οπότε το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ είναι κανονικό, γιατί έχει:

1) Όλες τις πλευρές του ίσες ως χορδές ίσων τόξων, που αντιστοιχούν σε επίκεντρη γωνία

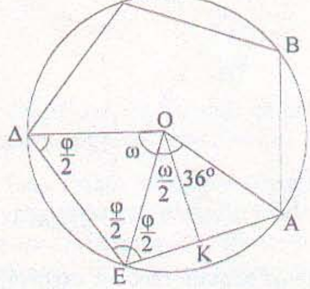
$$72^\circ = \frac{1}{5} \text{ κύκλου}$$

2) Όλες τις γωνίες του εγγεγραμμένες και ίσες, γιατί αντιστοιχεί η κάθε μια σε τόξο $3 \cdot 72^\circ = 216^\circ$

Όπως μάθαμε οι εγγεγραμμένες γωνίες έχουν μέτρα τα μέτρο το μισό του μέτρου του τόξου στο οποίο αντιστοιχούν. Άρα η κάθε μια από τις ίσες γωνίες του κανονικού πενταγώνου έχει μέτρο $\varphi = \frac{216^\circ}{2} = 108^\circ$.

Για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ΑΒΓΔΕ, πρέπει να γνωρίζουμε **το εμβαδόν του καθενός από τα 5 ίσα ισοσκελή τρίγωνα που σχηματίζονται αν ενώσουμε το κέντρο του κύκλου με τις κορυφές του**. Τα τρίγωνα αυτά είναι ίσα γιατί έχουν όλες τους τις πλευρές ίσες.

Από την ισότητα δύο οποιωνδήποτε διαδοχικών ισοσκελών τριγώνων όπως των ΟΑΕ, ΟΕΔ, (Σχ. 2), προκύπτει ότι **η ακτίνα ΟΕ διχοτομεί μια από τις ίσες γωνίες του κανονικού πενταγώνου και αυτό συμβαίνει βέβαια για όλες τις ακτίνες και σε όλα τα κανονικά ν–γωνα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο τυχαίας ακτίνας**. Φέρνοντας τώρα το ύψος ΟΚ του ισοσκελούς τριγώνου ΟΑΕ **(απόστημα του κανονικού 5–γωνου)** που είναι διάμεσος και διχοτόμος, είναι εύκολο να βρούμε τη σχέση που συνδέει την κεντρική γωνία ω = 72° με κάθε μια από τις ίσες γωνίες του φ = 108°, να βρούμε το απόστημά του και το μισό της πλευράς του, βοηθούμενοι βέβαια από την Τριγωνομετρία.



Σχήμα 2

Από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΟΚΕ έχουμε: $\frac{ω}{2}+\frac{φ}{2}+90° = 180°$ ή

$$\boxed{ω + φ = 180°}$$

Αυτή η τελευταία σχέση σύμφωνα με τα προηγούμενα, ισχύει ανεξάρτητα του πλήθους ν των πλευρών του κανονικού πολυγώνου και μας βοηθάει να υπολογίσουμε τη μια από τις δυο γωνίες, όταν γνωρίζουμε την άλλη.

Πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΟΚΕ και τους πίνακες τριγωνομετρικών αριθμών υπολογίζουμε το μήκος λ της πλευράς του ΑΒΓΔΕ και παίρνουμε: $συν\frac{φ}{2}=συν54° =\frac{\frac{λ}{2}}{ρ}=\frac{λ}{2ρ}$, $συν54° \simeq 0{,}5878$. Άρα $λ \simeq 2ρ\cdot 0{,}5878 \simeq$ **9,405cm**.

Το απόστημα α = ΟΚ από το ίδιο τρίγωνο είναι: $ημ\frac{φ}{2}=ημ54° =\frac{α}{ρ}$ επειδή δε από τους πίνακες είναι: $ημ54° \simeq 0{,}8090$ έχουμε

$α \simeq ρ\cdot 0{,}809 \simeq 8\cdot 0{,}8090 \simeq$ **6,472cm**

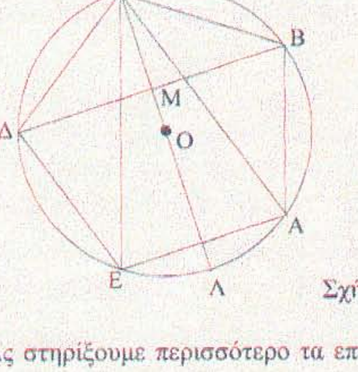
Με βάση τους παραπάνω υπολογισμούς έχουμε για την περίμετρο:

$T \simeq 5\cdot λ \simeq 5\cdot 9{,}405 \simeq 47{,}025 \simeq$ **47cm**

και για το εμβαδόν:

$E_{ΑΒΓΔΕ} = 5\cdot E_{ΑΟΕ} = 5\cdot\left(\frac{1}{2}λα\right)^2 \simeq 5\cdot\frac{1}{2}\cdot 9{,}405\cdot 6{,}472 \simeq 152{,}17 \simeq 152{,}2\ cm^2$.

Φέρνουμε τώρα την επίκεντρη γωνία ΓΟΛ, που οι πλευρές της τέμνουν τον κύκλο στην κορυφή Γ και στο Λ στο μέσο του απέναντι τόξου ΕΑ. Αν έχουμε κατασκευάσει καλά το σχήμα θα παρατηρήσουμε ότι η γωνία αυτή είναι ευθεία (180°) και ότι χωρίζει το κανονικό πεντάγωνο σε δύο άλλα ίσα σχήματα. Αν μάλιστα έχουμε σχεδιάσει το κανονικό πεντάγωνο σε ένα απλό φύλλο χαρτιού και το διπλώσουμε στη ΓΟΛ, οι απέναντι κορυφές του όπως οι Β, Δ και Ε, Α θα συμπέσουν αντίστοιχα.



Σχήμα 3

Ας στηρίξουμε περισσότερο τα επιχειρήματά μας αυτά με μια απλή διαπίστωση που βγαίνει και αυτή από το σχήμα 3.

Η $Γ\hat{Ο}Λ$ βαίνει στα τόξα $\overset{\frown}{ΓΒΛ}$ ή $\overset{\frown}{ΓΔΛ}$ που το καθένα είναι 180° (αθροίστε τα 2 διαδοχικά τόξα των 72° με το $\frac{1}{2}$ 72° και θα το βρείτε) άρα η ΓΟΛ είναι ευθεία γωνία (γιατί;) ή τα σημεία Γ, Ο, Λ βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Αυτό σημαίνει δύο πράγματα

1) ότι τα συμμετρικά των Δ, Ε ως προς τα ΓΟ (τμήμα της προηγούμενης ευθείας ΓΛ) και ΓΛ, είναι τα Β και Α από τα ισοσκελή τρίγωνα ΓΔΒ και ΓΕΑ (θυμηθείτε ότι η ΓΟ ως ακτίνα του κύκλου διχοτομεί τη γωνία της κορυφής του ισοσκελούς ...) και,
2) ότι το συμμετρικό του Γ ως προς Ο είναι το Λ μέσο του απέναντι τόξου.

Με τη βοήθεια των παραπάνω συλλογισμών διατυπώνουμε τα εξής:

1) Η ευθεία που περνά από το ΓΛ είναι ένας από τους άξονες συμμετρίας του κανονικού πενταγώνου και,

2) ότι το συμμετρικό του πενταγώνου ως προς το κέντρο του κύκλου, είναι ένα άλλο κανονικό πεντάγωνο που έχει για κορυφές τα πέντε σημεία του κύκλου που το καθένα απ' αυτά βρίσκεται στα μέσα των τόξων του ΑΒΓΔΕ.

Παρατηρείστε ότι, για το
1) το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς ΓΛ είναι το ίδιο το Γ αφού βρίσκεται πάνω στον άξονα συμμετρίας ΓΛ και για το 2) ότι τα συμμετρικά των υπολοίπων 4 κορυφών ως προς Ο, είναι και αυτά μέσα των απέναντι τόξων αντίστοιχα.

Προτεινόμενες Ασκήσεις

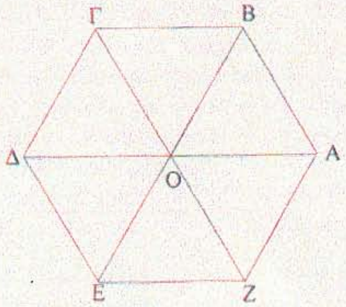
Β₄₄. Παρατηρείστε στο αστέρι της εικόνας ότι οι 5 κορυφές του απέχουν σταθερή απόσταση από το κέντρο του. Μπορείτε και εσείς να σχεδιάσετε ένα τέτοιο αστέρι δίνοντάς του και την κατάλληλη σκίαση, χρησιμοποιώντας τον παραπάνω τρόπο κατασκευής του κανονικού πενταγώνου;

Β₄₅. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρταετό που το "κεφάλι" του να είναι κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 50cm. Βρείτε:

α) Το εμβαδόν του χαρτιού που θα χρησιμοποιήσουμε.

β) Το μήκος από τα τρια πηχάκια ΓΖ, ΑΔ, ΒΕ τα οποία είναι και άξονες συμμετρίας του

γ) Βρείτε άλλους 3 άξονες συμμετρίας, ένα κέντρο συμμετρίας του ΑΒΓΔΕΖ και αιτιολογείστε την απάντησή σας.



Β$_{46}$**.** Μπορείτε να γενικεύσετε τις διαφορές αν υπάρχουν ως προς τη φύση, αριθμό αξόνων και το κέντρο συμμετρίας, ανάμεσα σε ένα κανονικό πολύγωνο με άρτιο αριθμό πλευρών και σε ένα με περιττό αριθμό πλευρών;

(**Υπόδειξη:** Σχεδιάστε σε διαφορετικούς κύκλους ένα κανονικό εξάγωνο και ένα κανονικό πεντάγωνο, βρείτε τους άξονες και το κέντρο συμμετρίας τους αν υπάρχει και σκεφτείτε τις διαφορές. Κατόπιν εξετάστε αν ισχύουν τα ίδια συμπεράσματα με ένα κανονικό ισόπλευρο τρίγωνο και ένα τετράγωνο).

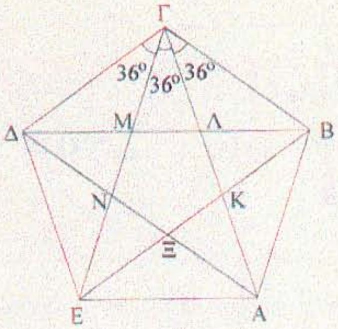
Β$_{47}$**.** Σ' ένα κύκλο με ακτίνα ρ = 4cm σχεδιάστε ένα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και φέρετε όλες τις διαγωνίους του. Διαπιστώστε με μέτρηση και κατόπιν με συλλογισμό την αλήθεια των παρακάτω.

i) Κάθε μια από τις ίσες γωνίες του ΑΒΓΔΕ χωρίστηκε με τις διαγώνιες σε 3 ίσες γωνίες των 36°.

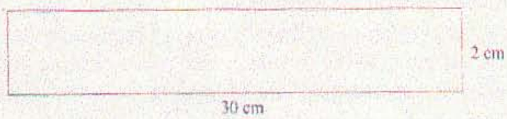
ii) Τα πέντε τρίγωνα που έχουν βάσεις τις πλευρές του ΑΒΓΔΕ, είναι ισοσκελή και ίσα. Βρείτε σ' αυτά ότι οι γωνίες των κορυφών τους είναι 108°.

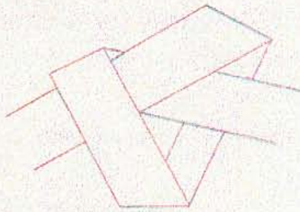
iii) Τα πέντε ισοσκελή τρίγωνα που έχουν βάσεις τις πλευρές του πενταγώνου που σχηματίζεται εσωτερικά (δηλ. του ΚΛΜΝΞ) είναι ίσα.

iv) Το πεντάγωνο ΚΛΜΝΞ που σχηματίζεται εσωτερικά είναι κανονικό.



Β$_{48}$**.** Έχουμε μια κορδέλα ή μια λεπτή λωρίδα χαρτιού πάχους 2cm και μήκους 30cm. Πιάνουμε με τα δύο χέρια τα άκρα της λωρίδας, έτσι ώστε οι καλές όψεις των δύο επιφανειών της κορδέλας, να έρθουν η μια πάνω στην άλλη. Σαν να δέναμε ένα κόμπο, περνάμε το πάνω άκρο μέσα από τον κύκλο έτσι ώστε να βγαίνει απ΄αυτόν με αλλαγμένη όψη χωρίς να διπλώσουμε ή να στρίψουμε τις πλευρές της λωρίδας. Τεντώνουμε τα άκρα της λωρίδας, προσέχοντας να μην τσαλακωθούν οι πλευρές της και οι κορυφές του πολυγώνου που σχηματίζεται, να συμπέσουν. Διπλώνουμε τέλος τα άκρα που περισσεύουν στις πλευρές του πενταγώνου και κόβουμε τόσο από τα δύο άκρα ώστε αυτά που θα μείνουν να "κρυφτούν" πίσω από το πολύγωνο.





Μετρήστε τις πλευρές σε cm και τις γωνίες σε μοίρες αυτού του πενταγώνου. Είναι κανονικό;

Β$_{49}$**.** Όσα παιδιά παρακολουθείτε Πληροφορική ή έχετε πρόσβαση σε ηλεκτρονικό υπολογιστή, μπορείτε να σχεδιάσετε στην οθόνη του ένα κανονικό πεντάγωνο σε μια γλώσσα προγραμματισμού (LOGO, Q–Basic) ή όποια άλλη εσείς θέλετε;