Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Τουρναβίτης Στέργιος

1. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση πάνω σ' έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από την συνάρτηση: $s = x(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 45$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα, το x σε μέτρα και $t \in [0,5]$. Να βρείτε την ταχύτητα v(t), την επιτάχυνση a(t) του υλικού σημείου και στην συνέχεια να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

α) Πότε το σημείο η ταχύτητά του μηδενίζεται;

β) Πότε το σημείο κινείται προς την αρνητική και πότε προς την θετική κατεύθυνση;

γ) Να βρείτε το συνολικό διάστημα που το υλικό σημείο έχει διανύσει στην διάρκεια των πρώτων 5s και την μέση ταχύτητα $\bar{v}$ στο διάστημα αυτό.

δ) Πότε η ταχύτητα του σημείου αυξάνεται και πότε μειώνεται;

Λύση:

Η ταχύτητα του σημείου είναι

$v(t) = x'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t - 16$

ενώ η επιτάχυνση είναι:

$a(t) = x''(t) = v'(t) = 12t^2 - 48t + 36$

α) Η ταχύτητα του σημείου με την βοήθεια του σχήματος του Horner, γράφεται $v(t) = 4(t-1)^2(t-4)$. Άρα το σημείο μένει στιγμιαία ακίνητο για $t = 1,\ t = 4$.

β) Επειδή όπως γνωρίζουμε $x'(t) = v(t)$, το πρόσημο της v(t) καθορίζει την μονοτονία της x(t), επομένως και την φορά της κίνησης. Οι ρίζες όπως και το πρόσημο της v(t), φαίνονται στον πίνακα

t	0		1		4		5
x'(t)		-	0	-	0	+	

Άρα στο διάστημα $[0,4)$ το σημείο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση και στο διάστημα $(4,5]$ προς την θετική κατεύθυνση.

γ) Είναι $x(0) = 45,\ x(4) = 13$ και $x(5) = 40$.

Για $t \in [0,4]$, $[4,5]$ το σημείο έχει διανύσει τις αποστάσεις

$S_1 = |x(4) - x(0)| = 32$, $S_2 = |x(5) - x(4)| = 27$ αντίστοιχα.

Το συνολικό διάστημα είναι $S = S_1 + S_2 = 32 + 27 = 59$.

Η μέση ταχύτητα είναι $\bar{v} = \dfrac{x(5) - x(0)}{5 - 0} = \dfrac{40 - 45}{5 - 0} = -1\ m/s$. Το πρόσημο « - », σημαίνει ότι το υλικό σημείο κινείται προς την αρνητική κατεύθυνση (προς τα κάτω), όπως φαίνεται και από τη γραφική παράσταση s της συνάρτησης θέσης του.

Σημείωση: Με τον παραπάνω τύπο ουσιαστικά υπολογίζουμε την αλγεβρική τιμή του διανύσματος της μέσης ταχύτητας, η οποία διαφέρει από την μέση ταχύτητα που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή ζωή.

δ) **α΄τρόπος**

Η επιτάχυνση a(t) γράφεται:

$$a(t) = 12t^2 - 48t + 36 \Leftrightarrow a(t) = 12(t^2 - 4t + 3) \Leftrightarrow$$
$$a(t) = 12(t-1)(t-3)$$

Για να μελετήσουμε πότε η ταχύτητα αυξάνεται και πότε μειώνεται, θα πρέπει να δούμε στους δύο πίνακες προσήμων της v(t) και a(t) σε ποια διαστήματα του χρόνου, αυτές είναι ομόσημες και σε ποια είναι ετερόσημες, αντίστοιχα.

t	0		1		3		4		5
v(t)		-	0	-		-	0	+	
a(t)		+	0	-	0	+		+	

Άρα η ταχύτητα του σημείου, αυξάνεται στα διαστήματα $[1,3]$ και $[4,5]$ και μειώνεται στα διαστήματα $[0,1]$ και $[3,4]$.

β΄ τρόπος

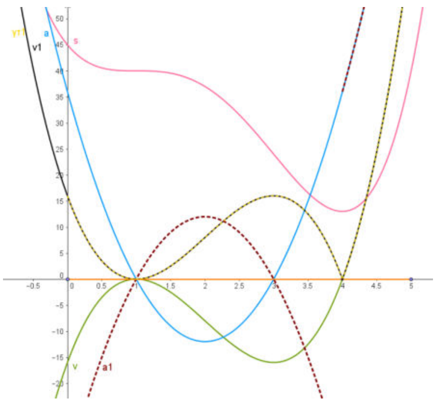
Αρκεί να μελετήσουμε την μονοτονία της συνάρτησης

$v_1(t) = |4t^3 - 24t^2 + 36t - 16|$

Για τον σκοπό αυτό την χωρίζουμε σε δύο κλάδους και βρίσκουμε τις παραγώγους κάθε κλάδου της χωριστά. Το πρόσημο αυτών των παραγώγων δίνει την μονοτονία της $v_1(t)$, στα διαστήματα $[0,4]$ και $[4,5]$.

Αν κάνουμε σωστά τους υπολογισμούς μας τα αποτελέσματά μας, θα «συμβαδίζουν» με αυτά του α΄ τρόπου.

Στο παρακάτω σχήμα, για να επαληθεύσουμε τους συλλογισμούς μας (ιδιαίτερα για το τελευταίο ερώτημα) έχουμε κατασκευάσει στο Geogebra, εκτός από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων s, v, a και τις v_1, $a_1(t) = v_1'(t)$.



Σχήμα 1

2. Έστω Α, Β και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, $A\bigcap B$ και $A\bigcup B$ ανήκουν στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $\left(2x-1\right)\cdot\left(12x^2-7x+1\right)$ ενώ η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο των λύσεων της εξίσωσης $15x^2-x-6$.

α) Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}, P(A\bigcap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\bigcup B)=\frac{1}{2}$.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

β) Δ: «πραγματοποιείται ένα μόνο από τα ενδεχόμενα Α και Β».

γ) Ε: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β» καθώς επίσης και την πιθανότητα $P(B'-A')$.

δ) Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα Β και Γ είναι ασυμβίβαστα.

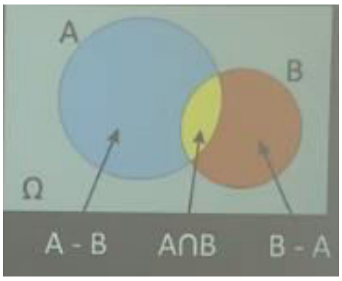
<u>Λύση</u>:

α) Έχουμε: $\left(2x-1\right)\cdot\left(12x^2-7x+1\right)=0\Leftrightarrow...$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ή $x=\frac{1}{4}$ ή $x=\frac{1}{3}$.

Επειδή ισχύει $A\bigcap B\subseteq A\subseteq A\bigcup B$, από την ιδιότητα 4 του λογισμού πιθανοτήτων, παίρνουμε $P(A\bigcap B)\le P(A)\le P(A\bigcup B)$. Όμως για τις προηγούμενες λύσεις ισχύει $\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, οπότε προκύπτει ότι $P(A\bigcap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(A\bigcup B)=\frac{1}{2}$.

β) **<u>α΄τρόπος</u>** Όπως παρατηρούμε και από το διάγραμμα Venn του σχήματος 2, το ενδεχόμενο Δ μπορεί να εκφραστεί ως **η ένωση των δύο ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων**, του $\mathbf{A-B}$ και του $\mathbf{B-A}$.



Από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η συμπληρωματική διαφορά του Β από το Α (γαλάζια περιοχή) εκφράζει ότι πραγματοποιείται το Α και όχι το Β.

Σχήμα 2

Η πορτοκαλί περιοχή αντίστοιχα εκφράζει το Β-Α, δηλαδή ότι πραγματοποιείται το Β και όχι το Α. Επομένως $\Delta=(A-B)\bigcup(B-A)$. Επειδή όπως είπαμε $A-B$, $B-A$ ασυμβίβαστα θα ισχύει για τον υπολογισμό της $P(\Delta)$ ο απλός προσθετικός νόμος (simply additive law) που αναφέρεται ως η 1η ιδιότητα των Κανόνων Λογισμού των Πιθανοτήτων του σχολικού βιβλίου.

Έχουμε:

$P(\Delta)=P[(A-B)\bigcup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=$

$=P(A)-P(A\bigcap B)+P(B)-P(A\bigcap B)$ [5η ιδιότητα Κανόνων Λογισμού των Πιθανοτήτων]

Η μόνη πιθανότητα που μένει να υπολογίσουμε, είναι η $P(B)$, η οποία «συνδέεται» με αυτές που υπολογίσαμε από το α) ερώτημα με τον προσθετικό νόμο.

$P(B)=P(A\bigcup B)-P(A)+P(A\bigcap B)\Rightarrow...\Rightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Τελικά $P(\Delta)=...=\frac{1}{4}$.

<u>β΄ τρόπος</u> Τα δύο ενδεχόμενα $A-B$, $B-A$ εκτός του ότι είναι ξένα μεταξύ τους, είναι επίσης το καθένα από αυτά ξένα και ως προς την τομή $A\bigcap B$. Παρατηρώντας ξανά το διάγραμμα Venn, εύκολα συμπεραίνουμε ότι όλες μαζί οι τρεις διαφορετικά χρωματισμένες περιοχές (γαλάζια, κίτρινη, πορτοκαλί) δίνουν το $A\bigcup B$. Μπορούμε επομένως να πούμε ότι

$A\bigcup B=(A-B)\bigcup(A\bigcap B)\bigcup(B-A)\Rightarrow...$

$\Rightarrow P(\Delta)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

γ) **<u>α΄ τρόπος</u>**

Το Ε μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η ένωση του Δ και του ενδεχομένου **«να μην πραγματοποιείται κανένα από τα Α και Β»** τα οποία όπως εύκολα διαπιστώνουμε είναι ασυμβίβαστα. Άρα $P(E)=P[\Delta\bigcup(A\bigcup B)']\Rightarrow$

$\Rightarrow...P(E)=\frac{1}{4}+1-\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

<u>β΄ τρόπος</u> Το Ε συμβαίνει αν αποκλείσουμε την περίπτωση να πραγματοποιηθούν τα Α και Β αμφότερα.

Έχουμε: $P(E)=P[(A\bigcap B)']\Rightarrow P(E)=1-P(A\bigcap B)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(E)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Για το 2ο σκέλος του ερωτήματος, έχουμε:

$P(B'-A')=P[B'\bigcap(A')']=P[B'\bigcap A]=$

$=P(A-B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

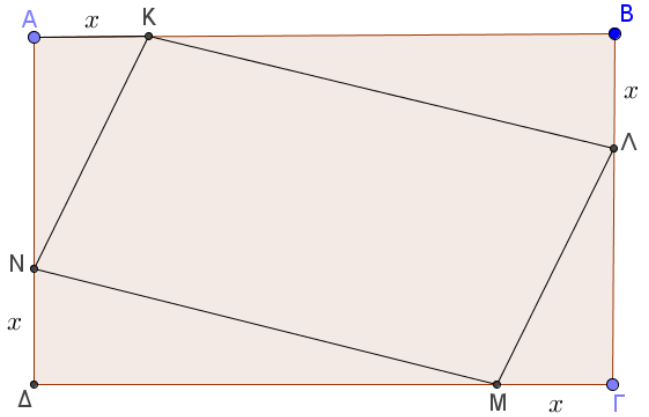
δ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$15x^2-x-6=0\Leftrightarrow...\Leftrightarrow x_1=-\frac{3}{5}$ ή $x_2=\frac{2}{3}$

Επειδή για την πιθανότητα $P(\Delta)$ ισχύει $0 \le P(\Gamma) \le 1$, αποκλείουμε την αρνητική λύση και δεχόμαστε μόνο ότι $P(\Gamma) = \frac{2}{3}$. Αν τα Β και Γ ήταν ασυμβίβαστα θα έπρεπε να ισχύει για αυτά ο απλός προσθετικός νόμος, επομένως θα ίσχυε η ισότητα:

$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{8}{12} = \frac{13}{12}$ άτοπο, γιατί η πιθανότητα ενός ενδεχομένου δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερη του 1.

3. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ=5 και ΒΓ=3. Θεωρούμε τα εσωτερικά σημεία Κ, Λ, Μ και Ν των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα, έτσι ώστε
ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ = x, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Σχήμα 3

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ΚΛΜΝ, ως συνάρτηση του x, είναι:

$$E(x) = 2x^2 - 8x + 15, \quad x \in (0, 3).$$

β) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν Ε(x) γίνεται ελάχιστο.
γ) Θεωρούμε τις τιμές $y_i = E(x_i)$, $x_i \in (0, 4)$ έτσι ώστε:
Τα x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$, να είναι διαφορετικά ανά δύο μεταξύ τους.

- **Η μέση τιμή των x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$, και η διάμεσός τους είναι ίσες με 2.**
- **Η μέση τιμή των y_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$, είναι ίση με 7,02.**

γ_1) Να βρείτε τη μέση τιμή, των x_i^2, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$.
γ_2) Να βρείτε την τυπική απόκλιση των x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$, και να εξετάσετε αν το δείγμα τους είναι ομοιογενές.
Δίνεται ότι:

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$$

όπου t_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$, είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής.

δ) Επιλέγουμε τυχαία μία από τις τιμές x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$.
Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

$A = \{x_i, i = 1, 2, 3, ..., 21, \quad \text{έτσι ώστε } x_i^2 < 4\}$,

$B = \{x_i, i = 1, 2, 3, ..., 21, \quad \text{έτσι ώστε } E(x_i) \le 7\}$

Γ: «Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

<u>Λύση</u>:

α) Είναι $E(x) = (AB\Gamma\Delta) - 2(AKN) - 2(BK\Lambda) \Rightarrow \dots$
$\dots \Rightarrow E(x) = 2x^2 - 8x + 15, \quad x \in (0, 3)$.

β) Είναι $E'(x) = 4(x-2), \quad x \in (0, 3)$.

Η τιμή x=2 που μηδενίζει την $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x-2) = 0$ είναι η ζητούμενη όπως φαίνεται και από τον πίνακα.

x	0		2		3
E'		-	0	+	
E		↘		↗	
			min		

γ_1) Επειδή $\bar{y}$=**7,02** έχουμε:

$$\frac{\sum_{i=1}^{21} y_i}{21} = 7{,}02 \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{21}(2x_i^2 - 8x_i + 15)}{21} = 7{,}02 \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{21} x_i^2}{21} = 4{,}01$$

γ_2) Βρίσκουμε πρώτα την διασπορά s_x^2 των x_i, $i = 1, 2, 3, \dots, 21$, χρησιμοποιώντας τον τύπο που μας δίνεται.

$$s_x^2 = \frac{1}{21}\left\{\sum_{i=1}^{21} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{21} x_i\right)^2}{21}\right\} \Rightarrow \dots$$

$$\ldots \Rightarrow s_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^{21} x_i^2}{21} - (\bar{x})^2 \Rightarrow s_x^2 = 4{,}01 - 4 = \frac{1}{100}$$

Επομένως η τυπική απόκλιση s_x είναι $s_x = \frac{1}{10}$

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι: $CV = \frac{s_x}{\bar{x}} = \frac{0{,}1}{2} = 0{,}05 < 0{,}1$ και επομένως το δείγμα είναι ομοιογενές.

δ) Αν διατάξουμε τις τιμές x_i $i = 1, 2, 3, ..., 21$, κατά αύξουσα σειρά, επειδή το πλήθος τους είναι 21 περιττός αριθμός, η διάμεσος δ=2, θα αντιστοιχεί στην $x_{\frac{21+1}{2}} = x_{11}$ τιμή. Επειδή επιπλέον οι τιμές αυτές είναι ανά δύο διαφορετικές μεταξύ τους, εύκολα διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν 10 τιμές αριστερά - μικρότερες της διαμέσου δ=2 (το 50% των παρατηρήσεων του δείγματος) και 10 τιμές δεξιά - μεγαλύτερες της δ.

Από την ανίσωση $x_i^2 < 4 \Leftrightarrow x_i < 2$, αφού $x_i > 0$, σύμφωνα και με τον προηγούμενο συλλογισμό, έχουμε ότι το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του ενδεχομένου Α, είναι $N(A) = 10$ και η $P(A)$ θα είναι $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{21}$, σύμφωνα με τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας του ενδεχομένου Α, υποσύνολο του δειγματικού χώρου Ω.

Για να βρούμε το πλήθος των $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots, 21}$, που είναι στοιχεία του ενδεχομένου Β, θα πρέπει να εξετάσουμε πόσα $\boldsymbol{x_i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, 3, \ldots, 21}$, ικανοποιούν την ανίσωση:

$E(x_i) \le 7$ ή την ισοδύναμη που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις τιμές $E(x_i)$.

$2x_i^2 - 8x_i + 15 \le 7 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (x_i - 2)^2 \le 0$.

Η τελευταία όμως ανισοϊσότητα, αληθεύει μόνο ως ισότητα. Άρα το $B = \{x_{11}\}$ έχει ένα μόνο στοιχείο την διάμεσο δ, που ταυτίζεται όπως γνωρίζουμε με την μεσαία τιμή $x_{11} = 2$, του δείγματος. Άρα βρίσκουμε, $P(B) = \frac{1}{21}$.

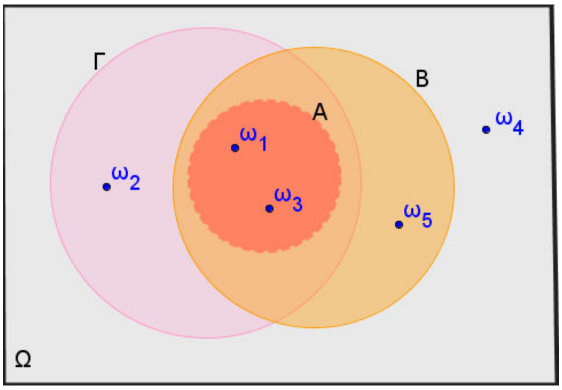
Για την $P(\Gamma)$ έχουμε:

$$P(\Gamma) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{11}{21} = \frac{10}{21}.$$

Οι ευνοϊκές περιπτώσεις του $A \cup B$, είναι οι πρώτες 10 τιμές αριστερά της διαμέσου (στοιχεία του ενδεχομένου Α) μαζί με την μεσαία τιμή $x_{11} = 2$, που ανήκει στο Β. δηλαδή $N(A \cup B) = 11$ και φυσικά $N(\Omega) = 21$. Τις παραπάνω δύο τιμές χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την $P(A \cup B)$ και στην συνέχεια την πιθανότητα του $\Gamma = (A \cup B)'$, συμπληρωματικού ενδεχομένου του $A \cup B$.

4. Ένα σύνολο παρατηρήσεων *Δ* που ακολουθεί την κανονική κατανομή, έχει $CV = 0{,}05$, $\bar{x} = 3$, διάμεσο δ και τυπική απόκλιση s.
Έστω επίσης ένας δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\}$, ο οποίος αποτελείται από τα απλά ενδεχόμενα ω_i με $P(\omega_i) \neq 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Αν για τα σύνθετα ενδεχόμενα, $A = \{\omega_1, \omega_3\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $\Gamma = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ οι πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ ανήκουν στο σύνολο $\left\{\bar{x}, s, \frac{s}{\delta}, \frac{\delta}{2s}\right\}$ και η πιθανότητα να συμβεί μόνο το ενδεχόμενο *Γ* ταυτίζεται με το ποσοστό των παρατηρήσεων του συνόλου *Δ* που βρίσκονται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x})$, τότε να βρεθεί η πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα ενδεχόμενα *Α*, *Β* και *Γ*.

Λύση:



Σχήμα 4

Στο διάγραμμα Venn, παριστάνουμε τα απλά ενδεχόμενα $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5$ ως στοιχεία του δειγματικού χώρου Ω, καθώς και τα σύνθετα ενδεχόμενα Α, Β και Γ υποσύνολα του Ω.
Θεωρούμε το ενδεχόμενο Ε: «πραγματοποιείται τουλάχιστον ένα από τα Α, Β, Γ».
Τότε $E = A \cup B \cup \Gamma = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5\}$ και η ζητούμενη πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β, Γ ταυτίζεται με την $P(E') = P(\omega_4)$.
Στην κανονική κατανομή ισχύει $\bar{x} = \delta$ και επειδή $\bar{x} = 3$, συμπεραίνουμε ότι και $\delta = 3$.
Από την σχέση $CV = \frac{s}{\bar{x}}$, αν αντικαταστήσουμε τις τιμές τις τιμές $CV = 0{,}05$, $\bar{x} = 3$, έχουμε … $s = 0{,}15$.

Το κλάσμα $\frac{s}{\delta}$, είναι $\frac{s}{\delta} = ... = \frac{5}{100}$ ενώ $\frac{\delta}{2s} = ... = 10$.

Άρα το σύνολο $\left\{\bar{x}, s, \frac{s}{\delta}, \frac{\delta}{2s}\right\}$ είναι ίσο με το

$\left\{3, \frac{15}{100}, \frac{5}{100}, 10\right\}$ και οι ακραίες του τιμές 3, 10 αποκλείονται να είναι τιμές πιθανοτήτων, αφού είναι μεγαλύτερες του 1.

Από το διάγραμμα Venn παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο Α περιέχεται στο Β, αλλά και στο Γ. Άρα $A \subset B$ (1), $A \subset \Gamma$ (2). Από την σχέση (1) έχουμε ότι $P(A) < P(\mathrm{B})$ αφού Α γνήσιο υποσύνολο του Β και η $P(A)$ θα αντιστοιχηθεί στον μικρότερο από τους 2 αριθμούς $\frac{15}{100}, \frac{5}{100}$ που μπορεί να είναι πιθανότητες ενδεχομένων. Επομένως, $P(A) = \frac{5}{100}$ και $P(\mathrm{B}) = \frac{15}{100}$.

Επίσης από τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας γνωρίζουμε ότι: $P(A) = P(\omega_1) + P(\omega_3)$ (3) $P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_5)$ (4),

$P(\Gamma) = P(\omega_1) + P(\omega_3) + P(\omega_2)$ (5) και,

$P(\Omega) = P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) + P(\omega_5)$ (6).

Αν συνδυάσουμε τις σχέσεις (3) και (4) με τις παραπάνω υπολογισθείσες τιμές $P(A) = \frac{5}{100}$ και $P(\mathrm{B}) = \frac{15}{100}$, βρίσκουμε ότι $P(\omega_5) = \frac{15}{100} - \frac{5}{100} = \frac{10}{100}$, ενώ αν παρατηρήσουμε ξανά το διάγραμμα, συνάγουμε εύκολα ότι η «**πιθανότητα να συμβεί μόνο το ενδεχόμενο Γ**» ταυτίζεται με την $P(\omega_2)$, αφού το ενδεχόμενο ω_2, είναι το μοναδικό απλό ενδεχόμενο που ανήκει αποκλειστικά στο Γ και φυσικά δεν ανήκει στα Α και Β. Την παραπάνω πιθανότητα θα μπορούσαμε να την εκφράσουμε και $P(\Gamma - \mathrm{B}) = P(\Gamma - \mathrm{A})$ αφού όπως είπαμε $A \subset B$.

Στη συνέχεια «επιστρατεύουμε» τις γνώσεις μας για την κανονική κατανομή και πρώτα για το διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$ που βρίσκεται όπως είναι γνωστό το 68% των παρατηρήσεων του δείγματος-συνόλου, οπότε … $P(\omega_2) = \frac{34}{100}$ (γιατί;).

Τελικά από όλες τις παραπάνω υπολογισθείσες πιθανότητες και την (6), βρίσκουμε ότι … $P(\omega_4) = \frac{51}{100}$, που είναι και το ζητούμενο.