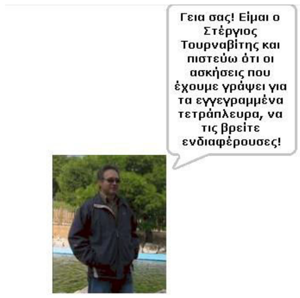
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Εγγεγραμμένα σχήματα στον κύκλο (πρωτότυπο αρχείο προς δημοσίευση)

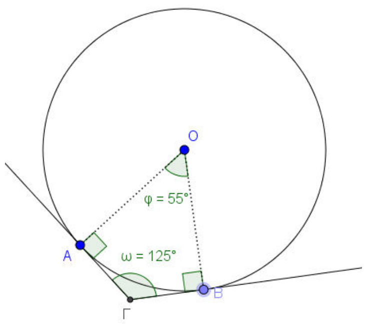


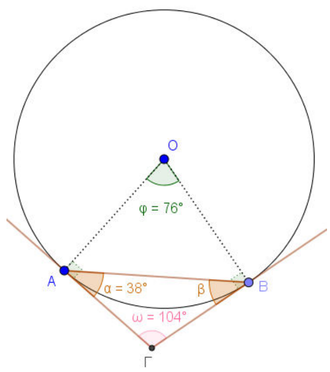
Ένας από τους στόχους αυτής της εργασίας, είναι η ενθάρρυνση στην επίλυση ασκήσεων με γεωμετρικά σχήματα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο. Αρχίζοντας από τις εγγεγραμμένες γωνίες, τις σχέσεις τους με τα τόξα στα οποία βαίνουν, τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης και φθάνοντας μέχρι τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα, παραθέτουμε κάποιες ασκήσεις με κλιμακούμενη δυσκολία, ακολουθώντας την ύλη, έτσι όπως είναι διαρθρωμένη και στο Κεφάλαιο 6 του σχολικού βιβλίου.

1. Σε δύο σημεία Α και Β ενός κύκλου φέραμε τις εφαπτόμενες, οι οποίες τέμνονται σ' ένα σημείο Γ εκτός αυτού. Μετρήσαμε τις γωνίες φ και ω και βρήκαμε ότι είναι παραπληρωματικές. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

Λύση:

α΄τρόπος: Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου $ΟΑΓΒ$ είναι 360^0. Επειδή οι γωνίες $Α$ και $Β$ είναι ορθές, το άθροισμα των άλλων δύο γωνιών του θα είναι $\widehat{\varphi}+\widehat{\omega}=180^0$.

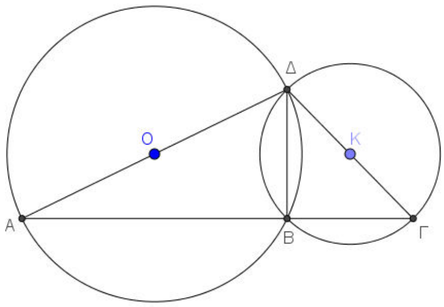




β΄τρόπος: Φέρνουμε την χορδή $ΑΒ$ και αφού όπως γνωρίζουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $ΓΑ$ και $ΓΒ$ είναι ίσα, το τρίγωνο $ΑΓΒ$ είναι ισοσκελές. Επομένως θα έχει τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του ίσες. Η κάθεμιά όμως από αυτές τις ίσες γωνίες $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$ είναι γωνίες που σχηματίζονται με την χορδή $ΑΒ$ και τις εφαπτόμενες, άρα θα είναι ίσες με το μισό της επίκεντρης $\widehat{\varphi}$, που βαίνει στο ίδιο τόξο. Από το άθροισμα των γωνιών το παραπάνω τριγώνου, έχουμε: $\widehat{\omega}+\frac{\widehat{\varphi}}{2}+\frac{\widehat{\varphi}}{2}=180^0$ $\Rightarrow +\widehat{\omega}+\widehat{\varphi}=180^0$.

Καταλήγουμε και πάλι ότι οι δύο γωνίες φ και ω, είναι παραπληρωματικές.

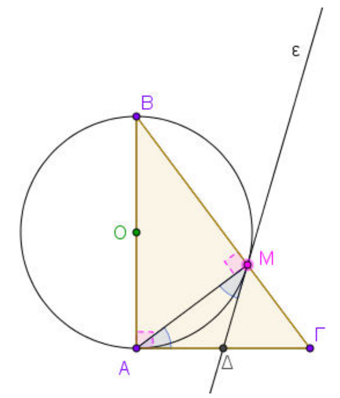
2. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Δ και Β και Α, Γ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Δ στους δύο αυτούς κύκλους. Παρατηρούμε ότι αν φέρουμε την ευθεία ΑΓ, διέρχεται από το Β. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;



Λύση: Φέρνουμε τις χορδές $ΑΒ$, $ΓΒ$ και βλέπουμε ότι οι εγγεγραμμένες γωνίες $Δ\widehat{Β}Α$, $Δ\widehat{Β}Γ$ βαίνουν σε ημικύκλια, άρα είναι ορθές. Επομένως το άθροισμα τους $Α\widehat{Β}Γ$ είναι μία ευθεία γωνία και από αυτό συμπεραίνουμε, ότι τα σημεία $Α, Β$ και $Γ$ είναι συνευθειακά.

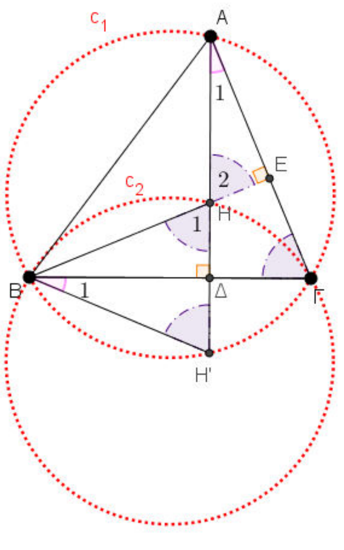
3. Γράφουμε κύκλο με διάμετρο τη μία κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, ο οποίος τέμνει την υποτείνουσα σ' ένα σημείο Μ. Γιατί η εφαπτομένη ε του κύκλου στο Μ, διέρχεται από το μέσο Δ της άλλης κάθετης πλευράς ΑΓ;

Λύση:

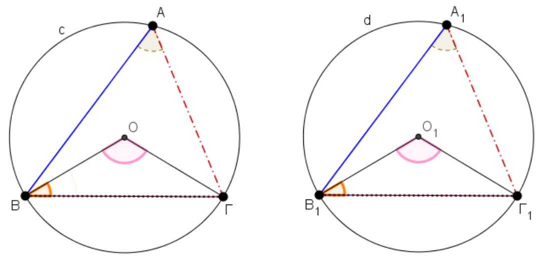


Παρατηρούμε από τον τρόπο κατασκευής του σχήματος και την υπόθεση, ότι ο κύκλος διαμέτρου AB εφάπτεται στην $A\Gamma$ και ότι η εγγεγραμμένη γωνία $A\widehat{M}B$ επειδή βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Τα εφαπτόμενα τμήματα ΔM και ΔA είναι ίσα, οπότε το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές και $\Delta\hat{A}M = A\widehat{M}\Delta$.
(Μπορείτε να συμπεράνετε μ' έναν δεύτερο τρόπο, γιατί οι παραπάνω γωνίες είναι ίσες;)
Το τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ είναι και αυτό ισοσκελές γιατί έχει τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του $M\Gamma$, $\Delta\widehat{M}\Gamma$ και $\hat{\Gamma}$ ίσες, ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών. (Ποιες είναι οι συμπηρωματικές τους που είναι ίσες;)
Άρα λοιπόν είναι $M\Delta = \Delta A = \Delta\Gamma$, που σημαίνει ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου διέρχεται από το μέσο Δ της $A\Gamma$.

<u>4</u>. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του c_1 και τα δύο ύψη ΑΔ, ΒΕ, τα οποία τέμνονται στο Η (ορθόκεντρο του τριγώνου). Να αποδείξετε ότι:
α) Τα συμμετρικά του Η ως προς τις πλευρές του τριγώνου είναι σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου c_1.
β) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΗΓΑ και ΗΑΒ είναι ίσοι.



<u>Λύση</u>: **α)** Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ και έστω H' το σημείο που τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$. Οι γωνίες $\widehat{H}'$ και $\hat{\Gamma}$ είναι ίσες επειδή είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο. Το ίδιο συμβαίνει και με τις γωνίες $\hat{B}_1$ και $\hat{A}_1$. Η γωνία $\widehat{H}_1$ είναι ίση με την $\widehat{H}_2$ ως κατακορυφή και η $\widehat{H}_2$ είναι συμληρωματική της $\hat{A}_1$ από το ορθογώνιο τρίγωνο AEH. Επομένως οι γωνίες $\widehat{H}'$ και $\widehat{H}_1$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο HBH' είναι ισοσκελές και το ύψος του ΒΔ είναι και διάμεσος. Άρα $H\Delta = H\Delta'$ που σε συνδυασμό με του ότι $HH' \perp B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Η, Η΄είναι συμμετρικά ως προς την $B\Gamma$.
Με παρόμοιες διαδικασίες μπορεί να αποδειχθεί ότι τα συμμετρικά του Η ως προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, είναι σημεία του κύκλου c_1.
β) Για το ερώτημα αυτό θα μας χρειαστεί μία πρόταση: Όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.

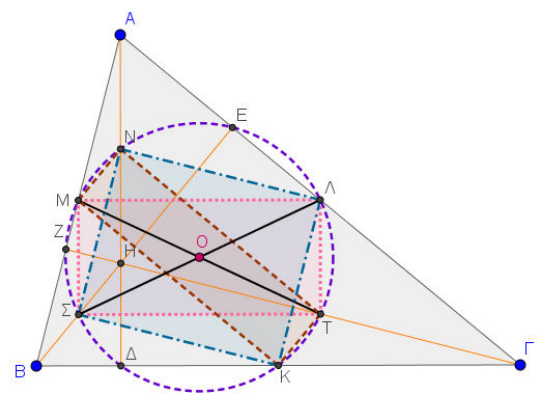


Έχουμε σχεδιάσει δύο τρίγωνα ίσα και έχουμε φέρει τους περιγεγραμμένους τους κύκλους c, d. Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{A}_1$ είναι ίσες ως ομόλογες γωνίες των ίσων τριγώνων. Άρα και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $\hat{O}$ και $\hat{O}_1$ είναι ίσες ως διπλάσιες των παραπάνω εγγεγραμμένων γωνιών. Τα ισοσκελή τρίγωνα $BO\Gamma$ και $B_1O_1\Gamma_1$ είναι ίσα γιατί έχουν τις βάσεις τους ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση τους ίσες, επειδή το άθροισμά τους (ουσιαστικά το διπλάσιο της μιας από αυτές) είναι παραπλήρωμα των ίσων γωνιών της κορυφής τους. Από το 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ) τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και οι ακτίνες OB και O_1B_1 των δύο περιγεγραμμένων κύκλων, είναι ίσες, δηλαδή οι περιγεγραμμένοι κύκλοι δυο ίσων τριγώνων, είναι ίσοι.
Παρατηρούμε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ταυτόχρονα και περιγεγραμμένος για το τρίγωνο $H'B\Gamma$ όπως αποδείξαμε από το 1ο ερώτημα. Τα τρίγωνα όμως $HB\Gamma$ και $H'B\Gamma$ είναι ίσα επειδή είναι συμμετρικά ως προς την $B\Gamma$. Άρα και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι c_2 και c_1 που διέρχονται από τις κορυφές τους, είναι αντίστοιχα ίσοι.

<u>5</u>. "Ο Κύκλος του Euler ή κύκλος των 9 σημείων"
Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και Η το ορθόκεντρό του. Παίρνουμε τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τα μέσα Ν, Σ, Τ των τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ, Κ, Λ, Μ, Ν, Σ, Τ είναι ομοκυκλικά.

Λύση:



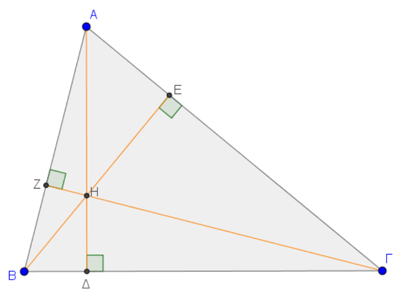
Όπως βλέπουμε κατά τη σχεδίαση της άσκησης, προκύπτουν τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα ΜΛΤΣ, ΝΤΚΜ και ΝΛΚΣ (γιατί;) τα οποία αν τα πάρουμε ανά δύο έχουν μία κοινή διαγώνιο. Π.χ. τα δύο πρώτα έχουν κοινή διαγώνιο την ΜΤ. Το μέσο Ο αυτής της διαγωνίου, ταυτίζεται με το μέσο της άλλης διαγωνίου ΛΣ του ΜΛΤΣ, που είναι ταυτόχρονα διαγώνιος του τρίτου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα και επειδή οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες και διχοτομούνται, τα σημεία Μ, Λ, Τ, Σ, Ν, Κ, ως κορυφές των τριών ορθογωνίων, ισαπέχουν από το κοινό τους κέντρο Ο. Άρα είναι ομοκυκλικά ενός κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα $\rho = \frac{\text{ΜΤ}}{2} = \frac{\text{ΛΣ}}{2}$.

Επίσης επειδή η $N\hat{\Delta}K = 90^0$, συμπεραίνουμε ότι το Δ ανήκει και αυτό στον παραπάνω κύκλο, αφού η ΝΚ είναι διάμετρός του (γιατί;). Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και για τα Ε και Ζ, αφού είναι κορυφές ορθών γωνιών (ποιες;) που βαίνουν σε ημικύκλια.

6. Αν Η είναι το σημείο τομής των υψών ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ (ορθόκεντρο του τριγώνου) μπορείτε να βρείτε τα έξι εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος;

Λύση:

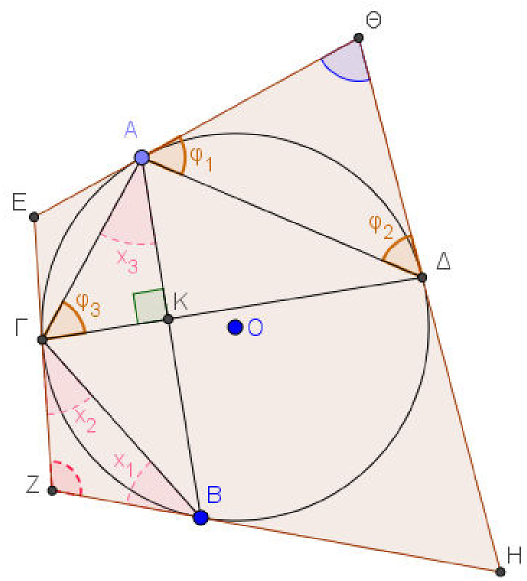


Παρατηρούμε ότι κάθε πλευρά του τριγώνου, φαίνεται από τα ίχνη των δύο υψών που φέρονται προς τις άλλες δύο πλευρές του, υπό ορθές γωνίες. Άρα τα τετράπλευρα ΒΓΕΖ, ΑΓΔΖ και ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμα.
Επίσης τα τετράπλευρα ΑΕΗΖ, ΒΔΗΖ και ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμα επειδή έχουν δύο απέναντι γωνίες ορθές, οπότε είναι και παραπληρωματικές.

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ενός κύκλου (Ο, ρ) στα άκρα δύο κάθετων χορδών του είναι κορυφές εγγραψίμου τετραπλεύρου.

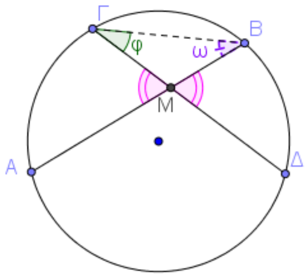
Λύση:

α΄τρόπος:



Όπως γνωρίζουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΖΓ και ΖΒ είναι ίσα, όπως συμβαίνει και με τα ΘΑ και ΘΔ. Άρα τα τρίγωνα ΓΖΒ και ΑΘΔ είναι ισοσκελή. Επομένως οι προσκείμενες γωνίες στις βάσεις αυτών των τριγώνων, θα είναι μεταξύ τους ίσες. Άρα $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ και $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$. Η καθεμιά από αυτές είναι γωνίες που σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη. Μπορείτε να αναφέρετε την χορδή και εφαπτομένη που σχηματίζονται κάθεμιά από αυτές; Επίσης οι γωνίες x_3 και φ_3 είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα ΒΓ και ΑΔ των χορδών. Επομένως θα ισχύουν οι ισότητες: $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3$ και, $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_3$. Όμως από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ, θα ισχύει $\hat{\varphi}_3 + \hat{x}_3 = 90^0$. Άρα για τις απέναντι γωνίες Θ, Ζ του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ, θα ισχύει: $\hat{Z} + \hat{\Theta} =$ $= 180^0 - 2\hat{x}_3 + 180^0 - 2\hat{\varphi}_3 = \ldots = 180^0$, επομένως παραπληρωματικές και το τετράπλευρο ΕΖΗΘ εγγράψιμο.

β΄τρόπος:
στην 1η εφαρμογή της σελίδας 125 του σχολικού βιβλίου, υπολογίζεται το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι φορείς δύο χορδών ενός κύκλου (βρίσκονται πάνω στις ευθείες αυτές οι πλευρές της γωνίας και της κατακορυφήν της) ως συνάρτηση των μέτρων των τόξων που περιέχονται σ' αυτή τη γωνία ή στην κατακορυφήν της.
Συγκεκριμένα:
Αν οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ τέμνονται σε σημείο Μ εσωτερικό του κύκλου, τότε:

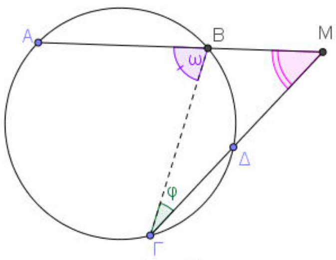


$$\boldsymbol{A\widehat{M}\Gamma = \widehat{\omega} + \widehat{\varphi} =}$$

$$= \frac{A\Gamma}{2} + \frac{B\Delta}{2} = \frac{A\Gamma + B\Delta}{2}$$

σχήμα α

Αν τέμνονται σε σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου, τότε έχουμε:

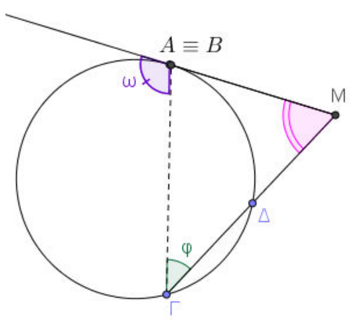


$$\boldsymbol{A\widehat{M}\Gamma = \widehat{\omega} - \widehat{\varphi} =}$$

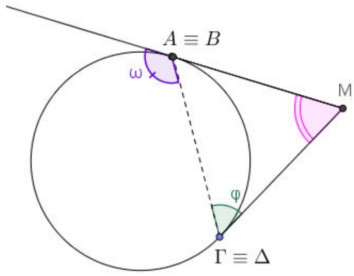
$$= \frac{A\Gamma}{2} - \frac{B\Delta}{2} = \frac{A\Gamma - B\Delta}{2}$$

σχήμα β

Η πρόταση αυτή προφανώς εξακολουθεί να ισχύει, ακόμη και όταν μία τουλάχιστον πλευρά της γωνίας εφάπτεται του κύκλου, δηλαδή όταν $A \equiv B$ (σχήμα γ) ή και $\Gamma \equiv \Delta$ (σχήμα δ).



σχήμα γ



σχήμα δ

Χρησιμοποιώντας την περίπτωση του σχήματος δ, να εκφράσετε καθεμιά από τις γωνίες $\widehat{\Theta}$ και $\widehat{Z}$ του τεραπλεύρου ΕΖΗΘ, ως την ημιδιαφορά των τόξων ΑΓ+ΓΒ+ΒΔ, ΑΔ και ΓΑ+ΑΔ+ΔΒ, ΒΓ αντίστοιχα.
Στη συνέχεια αξιοποιώντας αυτές τις εκράσεις και την περίπτωση του σχήματος α, να αποδείξετε ότι οι παραπάνω γωνίες του τετραπλεύρου $\widehat{\Theta}$ και $\widehat{Z}$ είναι παραπληρωματικές, αποδεικνύοντας με έναν 2ο τρόπο, ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ της άσκησης 7 είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

<u>Σχόλιο</u>:
Ο 2ος τρόπος επίλυσης της άσκησης 7, επιβεβαιώνει με τον πιο περίτρανο τρόπο, ότι τα σχήματα στην Γεωμετρία δεν πρέπει να τα βλέπουμε στατικά, αλλά να αντιλαμβανόμαστε την κίνηση που ενδέχεται να εμπεριέχουν.
Π.χ. για την παραπάνω άσκηση, οι γωνίες $\widehat{\Theta}$ και $\widehat{Z}$ εκφράζονται ως ημιδιαφορές κάποιων τόξων του κύκλου. Το άθροισμα αυτών των ημιδιαφορών μεταφέρεται στο άθροισμα δύο άλλων τόξων (με πρόσθεση κατά μέλη) που με την σειρά του είναι είναι το διπλάσιο της γωνίας δύο τεμνόμενων και κάθετων χορδών, άρα 180^0.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Εγγεγραμμένα σχήματα στον κύκλο (δημοσιευμένο άρθρο στο περιοδικό)

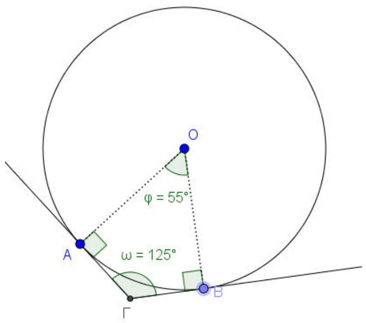
Τουρναβίτης Στέργιος

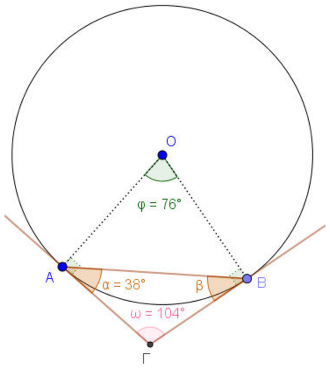
Ένας από τους στόχους αυτής της εργασίας, είναι η ενθάρρυνση στην επίλυση ασκήσεων με γεωμετρικά σχήματα που είναι εγγεγραμμένα στον κύκλο. Αρχίζοντας από τις εγγεγραμμένες γωνίες, τις σχέσεις τους με τα τόξα στα οποία βαίνουν, τις γωνίες χορδής και εφαπτομένης και φθάνοντας μέχρι τα εγγεγραμμένα τετράπλευρα, παραθέτουμε κάποιες ασκήσεις με κλιμακούμενη δυσκολία, ακολουθώντας την ύλη, έτσι όπως είναι διαρθρωμένη και στο Κεφάλαιο 6 του σχολικού βιβλίου.

1. Σε δύο σημεία Α και Β ενός κύκλου φέραμε τις εφαπτόμενες, οι οποίες τέμνονται σ' ένα σημείο Γ εκτός αυτού. Μετρήσαμε τις γωνίες φ και ω και βρήκαμε ότι είναι παραπληρωματικές. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

Λύση:

α΄τρόπος: Το άθροισμα των γωνιών του τετραπλεύρου $ΟΑΓΒ$ είναι 360^0. Επειδή οι γωνίες $Α$ και $Β$ είναι ορθές, το άθροισμα των άλλων δύο γωνιών του θα είναι $\hat{\varphi} + \hat{\omega} = 180^0$.

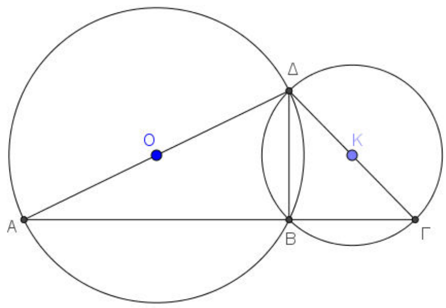




β΄τρόπος: Φέρνουμε την χορδή $ΑΒ$ και αφού όπως γνωρίζουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $ΓΑ$ και $ΓΒ$ είναι ίσα, το τρίγωνο $ΑΓΒ$ είναι ισοσκελές. Επομένως θα έχει τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του ίσες. Η καθεμιά όμως από αυτές τις ίσες γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ είναι γωνίες που σχηματίζονται με την χορδή $ΑΒ$ και τις εφαπτόμενες, άρα θα είναι ίσες με το μισό της επίκεντρης $\hat{\varphi}$, που βαίνει στο ίδιο τόξο. Από το άθροισμα των γωνιών το παραπάνω τριγώνου, έχουμε: $\hat{\omega} + \frac{\hat{\varphi}}{2} + \frac{\hat{\varphi}}{2} = 180^0$ $\Rightarrow +\hat{\omega} + \hat{\varphi} = 180^0$.

Καταλήγουμε και πάλι ότι οι δύο γωνίες φ και ω, είναι παραπληρωματικές.

2. Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Δ και Β και Α, Γ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Δ στους δύο αυτούς κύκλους. Παρατηρούμε ότι αν φέρουμε την ευθεία ΑΓ, διέρχεται από το Β. Μπορείτε να το δικαιολογήσετε;

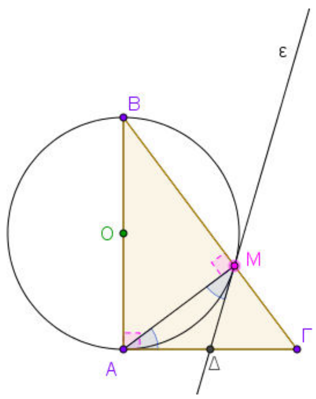


Λύση:

Φέρνουμε τις χορδές $ΑΒ$, $ΓΒ$ και βλέπουμε ότι οι εγγεγραμμένες γωνίες $Δ\hat{Β}Α$, $Δ\hat{Β}Γ$ βαίνουν σε ημικύκλια, άρα είναι ορθές. Επομένως το άθροισμα τους $Α\hat{Β}Γ$ είναι μία ευθεία γωνία και από αυτό συμπεραίνουμε, ότι τα σημεία $Α, Β$ και $Γ$ είναι συνευθειακά.

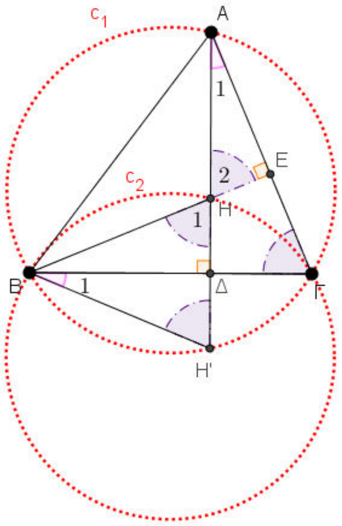
3. Γράφουμε κύκλο με διάμετρο τη μία κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, ο οποίος τέμνει την υποτείνουσα σ' ένα σημείο Μ. Γιατί η εφαπτομένη ε του κύκλου στο Μ, διέρχεται από το μέσο Δ της άλλης κάθετης πλευράς ΑΓ;

Λύση:

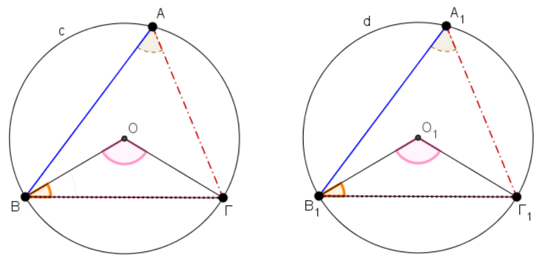


Παρατηρούμε από τον τρόπο κατασκευής του σχήματος και την υπόθεση, ότι ο κύκλος διαμέτρου AB εφάπτεται στην $A\Gamma$ και ότι η εγγεγραμμένη γωνία $A\widehat{M}B$ επειδή βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Τα εφαπτόμενα τμήματα ΔM και ΔA είναι ίσα, οπότε το τρίγωνο $A\Delta M$ είναι ισοσκελές και $\Delta\widehat{A}M = A\widehat{M}\Delta$.
(Μπορείτε να συμπεράνετε μ' έναν δεύτερο τρόπο, γιατί οι παραπάνω γωνίες είναι ίσες;)
Το τρίγωνο $M\Delta\Gamma$ είναι και αυτό ισοσκελές γιατί έχει τις προσκείμενες γωνίες στη βάση του $M\Gamma$, $\Delta\widehat{M}\Gamma$ και $\widehat{\Gamma}$ ίσες, ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών. (Ποιες είναι οι συμπηρωματικές τους που είναι ίσες;)
Άρα λοιπόν είναι $M\Delta = \Delta A = \Delta\Gamma$, που σημαίνει ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου διέρχεται από το μέσο Δ της $A\Gamma$.

<u>4</u>. Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τον περιγεγραμμένο κύκλο του c_1 και τα δύο ύψη ΑΔ, ΒΕ, τα οποία τέμνονται στο Η (ορθόκεντρο του τριγώνου). Να αποδείξετε ότι:
α) Τα συμμετρικά του Η ως προς τις πλευρές του τριγώνου είναι σημεία του περιγεγραμμένου κύκλου c_1.
β) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΒΓ, ΗΒΓ, ΗΓΑ και ΗΑΒ είναι ίσοι.

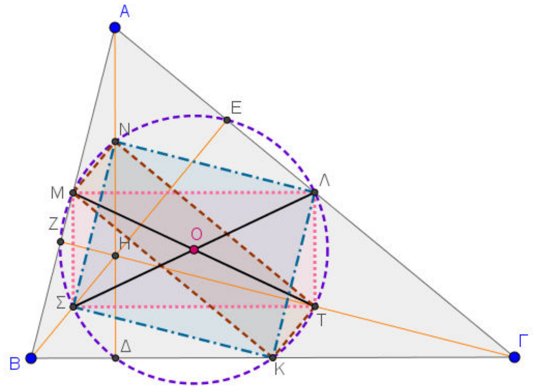


<u>Λύση</u>: α) Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ και έστω H' το σημείο που τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$. Οι γωνίες $\widehat{H}'$ και $\widehat{\Gamma}$ είναι ίσες επειδή είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στο ίδιο τόξο. Το ίδιο συμβαίνει και με τις γωνίες $\widehat{B}_1$ και $\widehat{A}_1$. Η γωνία $\widehat{H}_1$ είναι ίση με την $\widehat{H}_2$ ως κατακορυφή και η $\widehat{H}_2$ είναι συμληρωματική της $\widehat{A}_1$ από το ορθογώνιο τρίγωνο AEH. Επομένως οι γωνίες $\widehat{H}'$ και $\widehat{H}_1$ είναι ίσες ως συμπληρωματικές ίσων γωνιών. Άρα το τρίγωνο HBH' είναι ισοσκελές και το ύψος του ΒΔ είναι και διάμεσος. Άρα $H\Delta = H\Delta'$ που σε συνδυασμό με του ότι $HH' \perp B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία Η, Η΄είναι συμμετρικά ως προς την $B\Gamma$.
Με παρόμοιες διαδικασίες μπορεί να αποδειχθεί ότι τα συμμετρικά του Η ως προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ, είναι σημεία του κύκλου c_1.
β) Για το ερώτημα αυτό θα μας χρειαστεί μία πρόταση: Όταν δύο τρίγωνα είναι ίσα έχουν ίσους περιγεγραμμένους κύκλους.



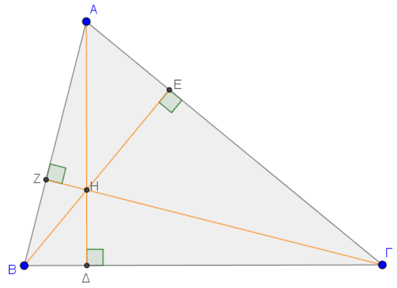
Έχουμε σχεδιάσει δύο τρίγωνα ίσα και έχουμε φέρει τους περιγεγραμμένους τους κύκλους c, d. Οι εγγεγραμμένες γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{A}_1$ είναι ίσες ως ομόλογες γωνίες των ίσων τριγώνων. Άρα και οι αντίστοιχες επίκεντρες γωνίες $\widehat{O}$ και $\widehat{O}_1$ είναι ίσες ως διπλάσιες των παραπάνω εγγεγραμμένων γωνιών. Τα ισοσκελή τρίγωνα $BO\Gamma$ και $B_1O_1\Gamma_1$ είναι ίσα γιατί έχουν τις βάσεις τους ίσες και τις προσκείμενες γωνίες στη βάση τους ίσες, επειδή το άθροισμά τους (ουσιαστικά το διπλάσιο της μιας από αυτές) είναι παραπλήρωμα των ίσων γωνιών της κορυφής τους. Από το 2ο κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ) τα τρίγωνα είναι ίσα, άρα και οι ακτίνες OB και O_1B_1 των δύο περιγεγραμμένων κύκλων, είναι ίσες, δηλαδή οι περιγεγραμμένοι κύκλοι δυο ίσων τριγώνων, είναι ίσοι.
Παρατηρούμε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ταυτόχρονα και περιγεγραμμένος για το τρίγωνο $H'B\Gamma$ όπως αποδείξαμε από το 1ο ερώτημα. Τα τρίγωνα όμως $HB\Gamma$ και $H'B\Gamma$ είναι ίσα επειδή είναι συμμετρικά ως προς την $B\Gamma$. Άρα και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι c_2 και c_1 που διέρχονται από τις κορυφές τους, είναι αντίστοιχα ίσοι.

<u>5</u>. "Ο Κύκλος του Euler ή κύκλος των 9 σημείων"
Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ και Η το ορθόκεντρό του. Παίρνουμε τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τα μέσα Ν, Σ, Τ των τμημάτων ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Ε, Ζ, Κ, Λ, Μ, Ν, Σ, Τ είναι ομοκυκλικά.
<u>Λύση</u>:



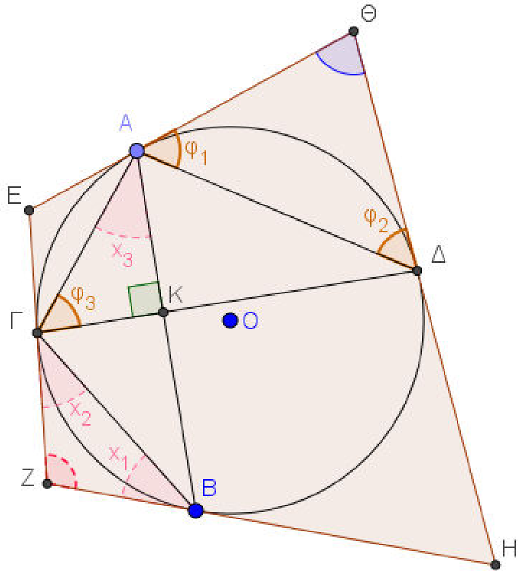
Όπως βλέπουμε κατά τη σχεδίαση της άσκησης, προκύπτουν τρία ορθογώνια παραλληλόγραμμα τα ΜΛΤΣ, ΝΤΚΜ και ΝΛΚΣ (γιατί;) τα οποία αν τα πάρουμε ανά δύο έχουν μία κοινή διαγώνιο. Π.χ. τα δύο πρώτα έχουν κοινή διαγώνιο την ΜΤ. Το μέσο Ο αυτής της διαγωνίου, ταυτίζεται με το μέσο της άλλης διαγωνίου ΛΣ του ΜΛΤΣ, που είναι ταυτόχρονα διαγώνιος του τρίτου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.
Σύμφωνα με τα προηγούμενα και επειδή οι διαγώνιες ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες και διχοτομούνται, τα σημεία Μ, Λ, Τ, Σ, Ν, Κ, ως κορυφές των τριών ορθογωνίων, ισαπέχουν από το κοινό τους κέντρο Ο. Άρα είναι ομοκυκλικά ενός κύκλου με κέντρο το Ο και ακτίνα $\rho = \dfrac{\text{ΜΤ}}{2} = \dfrac{\text{ΛΣ}}{2}$.
Επίσης επειδή η $N\hat{\Delta}K = 90^0$, συμπεραίνουμε ότι το Δ ανήκει και αυτό στον παραπάνω κύκλο, αφού η ΝΚ είναι διάμετρός του (γιατί;). Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και για τα Ε και Ζ, αφού είναι κορυφές ορθών γωνιών (ποιες;) που βαίνουν σε ημικύκλια.

6. Αν Η είναι το σημείο τομής των υψών ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ τριγώνου ΑΒΓ (ορθόκεντρο του τριγώνου) μπορείτε να βρείτε τα έξι εγγράψιμα τετράπλευρα του σχήματος;
Λύση:



Παρατηρούμε ότι κάθε πλευρά του τριγώνου, φαίνεται από τα ίχνη των δύο υψών που φέρονται προς τις άλλες δύο πλευρές του, υπό ορθές γωνίες. Άρα τα τετράπλευρα ΒΓΕΖ, ΑΓΔΖ και ΑΒΔΕ είναι εγγράψιμα.
Επίσης τα τετράπλευρα ΑΕΗΖ, ΒΔΗΖ και ΓΔΗΕ είναι εγγράψιμα επειδή έχουν δύο απέναντι γωνίες ορθές, οπότε είναι και παραπληρωματικές.

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες ενός κύκλου (Ο, ρ) στα άκρα δύο κάθετων χορδών του είναι κορυφές εγγραψίμου τετραπλεύρου.
Λύση:



α΄τρόπος:

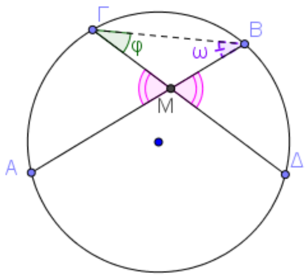
Όπως γνωρίζουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΖΓ και ΖΒ είναι ίσα, όπως συμβαίνει και με τα ΘΑ και ΘΔ. Άρα τα τρίγωνα ΓΖΒ και ΑΘΔ είναι ισοσκελή. Επομένως οι προσκείμενες γωνίες στις βάσεις αυτών των τριγώνων, θα είναι μεταξύ τους ίσες. Άρα $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$ και $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2$. Η καθεμιά από αυτές είναι γωνίες που σχηματίζονται από χορδή και εφαπτομένη. Μπορείτε να αναφέρετε την χορδή και εφαπτομένη που σχηματίζονται καθεμιά από αυτές; Επίσης οι γωνίες x_3 και φ_3 είναι εγγεγραμμένες και βαίνουν στα αντίστοιχα τόξα ΒΓ και ΑΔ των χορδών. Επομένως θα ισχύουν οι ισότητες: $\hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3$ και, $\hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}_2 = \hat{\varphi}_3$. Όμως από το άθροισμα των γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου ΑΚΓ, θα ισχύει $\hat{\varphi}_3 + \hat{x}_3 = 90^0$. Άρα για τις απέναντι γωνίες Θ, Ζ του τετραπλεύρου ΕΖΗΘ, θα ισχύει: $\hat{Z} + \hat{\Theta} =$ $= 180^0 - 2\hat{x}_3 + 180^0 - 2\hat{\varphi}_3 = \ldots = 180^0$, επομένως παραπληρωματικές και το τετράπλευρο ΕΖΗΘ εγγράψιμο.

Σχόλιο της Συντακτικής Επιτροπής

Στη σελίδα 125 του σχολικού βιβλίου, υπολογίζεται το μέτρο της γωνίας που σχηματίζουν οι φορείς δύο χορδών ενός κύκλου ως συνάρτηση των μέτρων των τόξων που περιέχονται στη γωνία αυτή ή στην κατακορυφήν της (Κλασική εφαρμογή των εγγεγραμένων γωνιών).

Συγκεκριμένα:

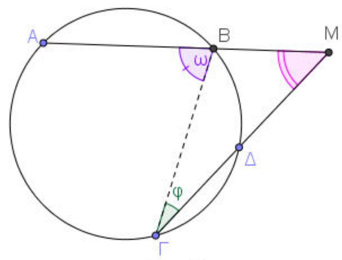
Αν οι ευθείες ΑΒ, ΓΔ τέμνονται σε σημείο Μ εσωτερικό του κύκλου, τότε:



σχήμα α

$$(\boldsymbol{A\widehat{M}\Gamma}) = (\widehat{\boldsymbol{\omega}}) + (\widehat{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{(\mathrm{A\Gamma})}{2} + \frac{(\mathrm{B\Delta})}{2} = \frac{(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{B\Delta})}{2}$$

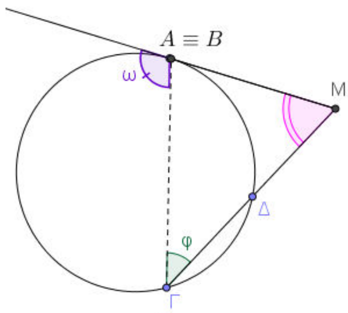
Αν τέμνονται σε σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου, τότε έχουμε:



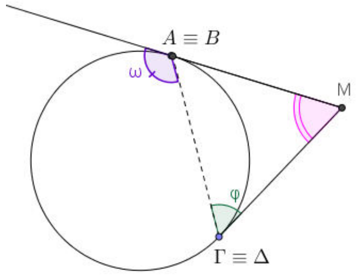
σχήμα β

$$(\boldsymbol{A\widehat{M}\Gamma}) = (\widehat{\boldsymbol{\omega}}) - (\widehat{\boldsymbol{\varphi}}) = \frac{(\mathrm{A\Gamma})-(\mathrm{B\Delta})}{2}$$

Η πρόταση αυτή προφανώς εξακολουθεί να ισχύει, ακόμη και όταν μία τουλάχιστον πλευρά της γωνίας εφάπτεται του κύκλου, δηλαδή όταν $A \equiv B$ ή $\Gamma \equiv \Delta$ (σχήμα γ) και (σχήμα δ).



σχήμα γ



σχήμα δ

- Η παραπάνω άσκηση μπορεί να δοθεί στους μαθητές ως μια θαυμάσια εφαρμογή αυτής της πρότασης προκειμένου να εξοικειωθούν με την έννοια της κίνησης στη Γεωμετρία και τις οριακές μορφές κάποων σχημάτων. Πράγματι σύμφωνα με το (σχήμα δ) στο τετράπλευρο ΕΖΗΘ έχουμε:

$$(\hat{\Theta}) = \frac{(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{\Gamma B})+(\mathrm{B\Delta})-(\mathrm{A\Delta})}{2} \text{ και}$$

$$(\hat{\mathrm{Z}}) = \frac{(\mathrm{\Gamma A})+(\mathrm{A\Delta})+(\mathrm{\Delta B})-(\mathrm{B\Gamma})}{2}, \text{ οπότε}$$

$(\hat{\Theta})+(\hat{\mathrm{Z}}) = (\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{B\Delta})$. Σύμφωνα με το (σχήμα α) όμως έχουμε $(\mathrm{A\Gamma})+(\mathrm{B\Delta}) = 2(\mathrm{A\hat{K}\Gamma}) = 2\cdot 90^{o} = 180^{o}$. Άρα $(\hat{\Theta})+(\hat{\mathrm{Z}}) = 180^{o}$.