ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

106

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΟΚΤΩΒΡΙΟΣ - ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ - ΔΕΚΕΜΒΡΙΟΣ 2017 ευρώ 3,5

Αριθμητική και Γεωμετρική επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων

Τακτική Γενική Συνέλευση
Κυριακή 11 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018

78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ
"Ο ΘΑΛΗΣ"
11 Νοεμβρίου 2017

99 Ε.Μ.Ε. Χρόνια

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 106 - Οκτώβριος - Νοέμβριος - Δεκέμβριος 2017 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γενικά Θέματα

Α΄ Τάξη

Β΄ Τάξη

Γ Τάξη

Γενικά Θέματα

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και συνάδελφοι, εύχομαι ο νέος χρόνος να είναι για όλους ένας χρόνος υγείας, ευτυχίας και προκοπής.

Ειδικά στους μαθητές για τους οποίους αρχίζει πλέον να εντατικοποιείται η προσπάθεια για τις τελικές εξετάσεις, εύχομαι να ευοδωθούν οι στόχοι τους μέσα στον καινούργιο χρόνο.

Κάποιες αντικειμενικές δυσκολίες δεν μας επέτρεψαν να σας εξασφαλίσουμε την έγκαιρη λήψη του 1ου τεύχους σε έντυπη μορφή και γι' αυτό περιοριστήκαμε στην αποστολή του υπό ηλεκτρονική μορφή, προκειμένου να έχετε γνώση του περιεχομένου του πριν από το Συνέδριο της Λευκάδας.

Η επόμενη προσπάθεια μας θα είναι να ολοκληρώσουμε μέσα στον Φεβρουάριο την ταυτόχρονη συμπλήρωση και των δύο τελευταίων τευχών.

Οποιαδήποτε αξιόλογη εργασία συναδέλφου η μαθητού από το πανελλήνιο θα είναι ευπρόσδεκτη και άμεσα δημοσιεύσιμη σε κάποιο από τα δύο αυτά τεύχη, των οποίων το περιεχόμενο έχει κυρίως επαναληπτικό χαρακτήρα.

Ευχαριστώ εκ των προτέρων όλους όσοι συνδράμουν σ' αυτή μας την προσπάθεια.

Ο πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής: Γιώργος Τασσόπουλος

Οι αντιπρόεδροι: Βαγγέλης Ευσταθίου, Γιάννης Κερασαρίδης

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:

Α΄Λυκείου [Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης, Απ. Κακκαβάς],
Γ΄Λυκείου [Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	11 Νοεμβρίου 2017
Ευκλείδης:	20 Ιανουαρίου 2018
Αρχιμήδης:	3 Μαρτίου 2018
Προκριματικός:	31 Μαρτίου 2018
Μεσογειάδα:	1 Απριλίου 2018

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση

Κάθε Σάββατο γίνονται **ΔΩΡΕΑΝ** μαθήματα,
Στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.
Θυμίζουμε ότι: Ερωτήματα σχετικά με τα θέματα Διαγωνισμών υποβάλλονται στην επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

Σχόλιο: Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο **e-mail: stelios@hms.gr**

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025

Εκδότης: Ανάργυρος Φελλούρης

Διευθυντής: Ιωάννης Τυρλής

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής**.

Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται: (1). Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044 (2). Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK (3). Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. (4).

Εκτύπωση: ROTOPRINT (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΑΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΔΡΑΣΗΣ ΤΟΥ Δ.Σ. ΤΗΣ Ε.Μ.Ε. ΓΙΑ ΤΟ ΕΤΟΣ 2017

ΠΡΟΣΚΛΗΣΗ

Αθήνα, 9–2–2018

Καλούνται όλα τα τακτικά και αντεπιστέλλοντα μέλη της Ε.Μ.Ε. σε τακτική Γενική Συνέλευση, την **Κυριακή** ***25*** **Φεβρουαρίου** ***2018***, ώρα **10.00** το πρωί, **στην αίθουσα ΑΔ του 1^{ου} ορόφου στο Κτίριο του Νέου Χημείου του Πανεπιστημίου Αθηνών (Ναυαρίνου 13α, Αθήνα)**.

ΘΕΜΑΤΑ

1. Απολογισμός του Δ.Σ. για το έτος 2017
2. Ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης για το 2017
3. Έκθεση της Εξελεγκτικής Επιτροπής
4. Έγκριση του ισολογισμού, απολογισμού και πεπραγμένων του Δ.Σ.
5. Έγκριση του προϋπολογισμού για το 2018
6. Επικαιροποίηση του κανονισμού των παραρτημάτων
7. Εξουσιοδότηση για την αγορά αποθηκευτικού χώρου ή γραφείου ή και πώληση αυτών
8. Προτάσεις μελών

Σε περίπτωση που δεν υπάρξει απαρτία (πρέπει να παρίσταται τουλάχιστον το 1/3 των μελών της Ε.Μ.Ε., που έχουν εκπληρώσει τις **ταμειακές** τους υποχρεώσεις τουλάχιστον και για το 2017 ή έχουν εγγραφεί στα μητρώα της ΕΜΕ το 2018), η Γενική Συνέλευση θα γίνει την

Κυριακή 11 ΜΑΡΤΙΟΥ 2018

στις 10 το πρωί στον ίδιο χώρο και με τα ίδια θέματα, οπότε, σύμφωνα με το καταστατικό, θεωρείται σε απαρτία με όσα μέλη κι αν παρίστανται.

Τα πλήρη στοιχεία του απολογισμού δράσης του Δ. Σ., ο ισολογισμός και απολογισμός της διαχείρισης 2017, ο προϋπολογισμός για το 2018 και η έκθεση της Εξελεγκτικής Επιστροπής θα ανακοινωθούν στο δικτυακό τόπο της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, www.hms.gr.

Με συναδελφικούς χαιρετισμούς

Ο Πρόεδρος	Ο Γενικός Γραμματέας
Ανάργυρος Φελλούρης	Ιωάννης Τυρλής

Αριθμητική και Γεωμετρική επίλυση τετραγωνικών εξισώσεων

Τσικοπούλου Στάμη

Οι τετραγωνικές εξισώσεις λύθηκαν από τους Βαβυλώνιους (αριθμητικά) και από τους Έλληνες (γεωμετρικά). Οι Βαβυλώνιοι δεν έλυσαν εξισώσεις, γιατί δεν γνώριζαν την έννοια της εξίσωσης, ούτε είχαν αλγεβρικούς συμβολισμούς και γενικούς τύπους τους οποίους μπορούσαν να εφαρμόσουν, αλλά ανέπτυξαν μια αλγοριθμική προσέγγιση για την επίλυση προβλημάτων που με τη σημερινή ορολογία, οδηγούν σε μια τετραγωνική εξίσωση. Η μέθοδος τους είναι ουσιαστικά η συμπλήρωση τετραγώνου.

Μια συστηματική λύση ορισμένων τύπων τετραγωνικών εξισώσεων, έγινε μεταξύ 800 και 1100 μ.Χ. Σ'αυτή συνέβαλαν δύο μαθηματικοί. Ο πιό γνωστός είναι ο πέρσης Abu Muhammad ibn Musa al'Khowarizmi (780 – 850μ.Χ), που έζησε στον Οίκο της Σοφίας (βιβλιοθήκη και οίκος μετάφρασης) του Αλ-Μαμούν στη Βαγδάτη και ο Omar al'Khayyam (1048 – 1131μ.Χ), που έζησε στην Περσία και ο οποίος είναι γνωστός στη δύση για τα Rubaiyat του (τετράστιχα). Και οι δύο έγραψαν βιβλία που τιτλοφορήθηκαν Al-Al-jabr W'al mugabalah, ο al' Khowarizmi περίπου το 820 μ.Χ και ο al' Khayyam περίπου το 1100 μ.Χ.

al'Khayyam

Ο Omar Khayyam είναι ο συγγραφέας μιας από τις σημαντικότερες μελέτες Άλγεβρας, την Πραγματεία για την απόδειξη αλγεβρικών προβλημάτων (1070), χρησιμοποιώντας μια γεωμετρική μέθοδο για την επίλυση κυβικών εξισώσεων, την οποία είχαν χρησιμοποιήσει ορισμένες φορές οι Έλληνες, προσδιορίζοντας τις ρίζες αυτών των εξισώσεων όχι αριθμητικά αλλά ως σημεία τομής δύο κωνικών τομών, υπερβολής με κύκλο [1].

al'Khowarizmi

Από τον Al-Khowarizmi παίρνουμε τη λέξη «αλγόριθμος» και από τον τίτλο των βιβλίων του τη λέξη «άλγεβρα»[1]. Στα βιβλία αυτά βρίσκουμε γεωμετρικές και αριθμητικές λύσεις εξισώσεων και γεωμετρικές αποδείξεις αυτών των λύσεων [3]. Το πρώτο πράγμα που παρατηρεί κανείς στα βιβλία αυτά είναι ότι δεν υπάρχει ένας γενικός τύπος για την τετραγωνική εξίσωση, όπως αυτός που χρησιμοποιούμε σήμερα, $αx^2+βx+γ = 0$. Η απουσία του μηδενός και των αρνητικών αριθμών καθιστούσε αδύνατη την διατύπωση ενός γενικού τύπου.

Η μέθοδος του Αλ-Χουαρίζμι περιλαμβάνει αρχικά την μετατροπή της εξίσωσης σε μία από τις παρακάτω έξι βασικές μορφές που με σύγχρονο συμβολισμό είναι οι: **1)** $x=c$, **2)** $x= bx$, **3)** $x^2 = c$, **4)** $x^2+bx=c$, **5)** $x^2+a = bx$, **6)** $x^2 = bx+c$ (ακολουθούμε τον al' Khayyam και θέτουμε τον συντελεστή του αγνώστου ίσο με 1). Το b και το c είναι πάντα θετικοί αριθμοί ή ένα γεωμετρικό μήκος (b) και ένα εμβαδόν (c). Οι εξισώσεις του είναι γραμμικές ή τετραγωνικές και αποτελούνται από **μονάδες** (αριθμούς), **ρίζες** (x) και **τετράγωνα** (x^2). Ανάμεσα στις τετραγωνικές εξισώσεις που περιέχονται στο βιβλίο του προβάλλουν τρεις χαρακτηριστικές: $x^2+10x = 39$, $x^2 +21 = 10x$ και $3x+ 4 = x^2$ [1]. Οι εξισώσεις αυτές αντιμετωπίζονται ξεχωριστά γιατί μόνο θετικοί συντελεστές ήταν αποδεκτοί. Δύο διαδικασίες βοηθούν την μετατροπή μιας εξίσωσης σε μια από τις προαναφερθείσες μορφές, η "**al-jabr**" και η "**al-muqabala**".

- Η συνηθισμένη ερμηνεία του "al-jabr" στους μαθηματικούς χειρισμούς, με σημερινούς όρους, είναι: απαλοιφή αρνητικών όρων και τετραγώνων από μια εξίσωση προσθέτοντας την ίδια ποσότητα στο άλλο μέρος. Για παράδειγμα η εξίσωση x2 = 40x – 4x2 γίνεται 5x2 = 40x.
- Η συνηθισμένη ερμηνεία του "al-muqabalah" είναι: αναγωγή ομοίων όρων μιας εξίσωσης. Για παράδειγμα η εξίσωση x2 +14 = x+ 5 γίνεται x2 + 9 = x.

---

[1] Η λέξη ΑΛΓΕΒΡΑ προέρχεται από τη λατινική λέξη Algebra η οποία με τη σειρά της προέρχεται από την αραβική λέξη al-jabr. Η αραβική λέξη πρωτοεμφανίζεται στο έργο του μεγάλου άραβα μαθηματικού Al-Khwârizmi «Hisâb al-jabr w'al-mugâbalah», ένα συνοπτικό βιβλίο για τον υπολογισμό με Μεταφορά και Απλοποίηση το οποίο γράφτηκε γύρω στα 830 μ.Χ και που σε ελεύθερη απόδοση είναι «επιστήμη αναγωγής και ισοστάθμισης» ή «περί της τέχνης να συναθροίζεις αγνώστους και να τους εξισώνεις με μια γνωστή ποσότητα» δηλαδή «επιστήμη των εξισώσεων» [1]. Γι αυτό και η λέξη al-jabr (ήταν για πολλά χρόνια συνώνυμο της λέξης «επιστήμη των εξισώσεων». Στο βιβλίο του, γραμμένο περίπου το 825 μ.Χ, «Kitab hisab al-adad al-hindi» δηλαδή «Υπολογισμός με Ινδικούς Αριθμούς» που μεταφράστηκε τον 12ο αιώνα στα Λατινικά ως «Algoritmi de numero Indorum», ο Al-Khwârizmi εκθέτει τα Ινδικά ψηφία 1 έως 9 και το 0 καθώς και τις αρχές του θεσιακού συστήματος. Το βιβλίο αυτό συνέβαλε στη διάδοση του ινδοαραβικού αυστήματος αρίθμησης στη Δύση. Τα λατινικά χειρόγραφα δεν έχουν τίτλο, αλλά συνήθως ονομάζονται από τις δύο πρώτες λέξεις που ξεκινούν. Από μια λατινική μετάφραση που άρχιζε με «Εχει πει ο Αλγορίθμι ... », το όνομα του αλ-Χουαρίσμι έγινε Αλγορίθμι και από την παράφραση αυτή γεννήθηκε και η λέξη ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ που σημαίνει «μια τυπική διαδικασία υπολογισμού με συγκεκριμένο τρόπο».

Το βιβλίο του Al-Khwârizmi θεωρείται θεμελιώδες κείμενο της σύγ-χρονης άλγεβρας, αν και δεν χρησιμοποιεί το είδος του αλγεβρικού συμβολισμού που χρησιμοποιούμε σήμερα, παρά μόνο λέξεις για να λύσει τα προβλήματα και διαγράμματα για να τα εξηγήσει, ενώ μόνο θετικές λύσεις είναι αποδεκτές. Απουσιάζει ακόμα και ο «ρητορικός» συμβολισμός του Διόφαντου [1].

Το βιβλίο αυτό που γράφηκε με προτροπή του Αλ Μαμούν, ώστε να αποτελέσει ένα πρακτικό εγχειρίδιο επίλυσης προβλημάτων, είναι γεμάτο με παραδείγματα και εφαρμογές στις εμπορικές συναλλαγές, τη μέτρηση γης, τη διάνοιξη καναλιών καθώς και σε προβλήματα κληρονομιών και κληροδοτημάτων που προκύπτουν από την εφαρμογή του Ισλαμικού δικαίου [5]. Η άλγεβρα εισήχθηκε για να λύσει τα πραγματικά προβλήματα που ήταν μέρος της καθημερινής ζωής στην αυτοκρατορία του Ισλάμ εκείνη την εποχή [4].

Μια σελίδα από την *Άλγεβρα* του Αλ-Χουαρίζμι

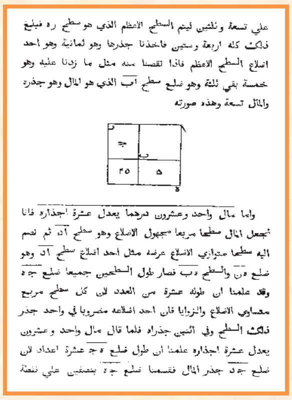
Ο Al-Khwarizmi θέλησε μέσα από συγκεκριμένα προβλήματα που είχαν εξεταστεί πριν από αυτόν, από τους Ινδούς και τους Κινέζους, να οδηγηθεί σε μια γενικευμένη στρατηγική επίλυσης των εξισώσεων που χρησιμοποιείται μέχρι σήμερα. Το βιβλίο του μεταφράστηκε από τα Αραβικά τουλάχιστον τρεις φορές, και χρησιμοποιήθηκε στα σχολεία της Ευρώπης στα λατινικά ή περιληπτικά σε τοπικές διαλέκτους. Οι κανόνες που περιέγραφε ίσχυαν πάντοτε. Αν τους ακολουθούσε κανείς, μπορούσε να λύσει εξισώσεις δευτέρου βαθμού ορισμένων τύπων. Οι μέθοδοι λύσης που χρησιμοποιεί είναι αλγεβρικές και γεωμετρικές.

Για παράδειγμα, για να λύσει την εξίσωση $x^2+10x=39$ γράφει [4]: "*… ένα τετράγωνο και 10 ρίζες είναι ίσα με 39 μονάδες. Η ερώτηση επομένως γι αυτόν τον τύπο της εξίσωσης είναι η ακόλουθη: ποιο είναι το τετράγωνο που συνδυαζόμενο με δέκα από τις ρίζες του θα δώσει ένα άθροισμα ίσο με 39 (μονάδες); Ο τρόπος επίλυσης αυτού του τύπου της εξίσωσης είναι να ευρεθεί το μισό από τις αναφερθείσες ρίζες. Οι ρίζες στο πρόβλημα μας είναι 10. Επομένως πάρτε το 5, το οποίο πολλαπλασιαζόμενο με τον ευαυτό του δίνει 25, ένα ποσό που αν το προσθέσετε στο 39 δίνει 64. Η τετραγωνική ρίζα αυτού είναι 8. Αφαιρέστε από αυτό τις μισές από τις ρίζες, τις 5 και μένει 3. Ο αριθμός τρία επομένως αντιπροσωπεύει μια ρίζα αυτού του τετραγώνου, το οποίο είναι φυσικά 9. Εννέα επομένως δίνουν το τετράγωνο*".

Τα βήματα της διαδικασίας επίλυσης κάθε ισότητας της μορφής $x^2+bx=c$ (όπως η $x^2+10x=39$), με σύγχρονο συμβολισμό είναι τα εξής [5]: *Πάρε το μισό των ριζών, είναι* $\frac{b}{2}$, *πολλαπλασίασέ το με τον εαυτό του, δίνει* $\frac{b^2}{4}$, *πρόσθεσε σε αυτό το c, παίρνεις* $\frac{b^2}{4}+c$. *Πάρε την τετραγωνική ρίζα του, που είναιι* $\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}$. *Αφαίρεσε το* $\frac{b}{2}$ *από τη τετραγωνική ρίζα, παίρνεις* $\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}-\frac{b}{2}$. *Η διαφορά είναι η τιμή της ρίζας και το (τετράγωνο) είναι* $\left(\sqrt{\frac{b^2}{4}+c}-\frac{b}{2}\right)^2$.

Με τα ίδια βήματα έλυναν οι Βαβυλώνιοι (1600 π.Χ), το πρόβλημα 2, της πινακίδας Β.Μ 13901 που βρίσκεται στο Βρετανικό Μουσείο (Βιβλίο Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου, σελ 98).

Ο Al-Khwârizmi κάνει διάκριση ανάμεσα στην εξήγηση με παραδείγματα των βημάτων για τον υπολογισμό (της ρίζας) και την δικαιολόγηση αυτής της ακολουθίας βημάτων με ένα σχήμα. Η λειτουργία του σχήματος είναι η εποπτική εξήγηση του λόγου για τον οποίο ακολουθούμε τα συγκεκριμένα βήματα [5].



علي تسعة وثلثين ليتم السطح الاعظم الذي هو سطح ره فبلغ ذلك كله اربعة وستين فاخذنا جذرها وهو ثمانية وهو احد اضلاع السطح الاعظم فاذا نقصنا منه مثل ما زدنا عليه وهو خمسة بقي ثلثة وهو ضلع سطح اب الذي هو المال وهو جذره والمال تسعة وهذه صورته

واما مال واحد وعشرون درهما يعدل عشرة اجذاره فانا نجعل المال سطحا مربعا مجهول الاضلاع وهو سطح اد ثم نضم اليه سطحا متوازي الاضلاع عرضه مثل احد اضلاع سطح اد وهو ضلع هن والسطح هب فصار طول السطحين جميعا ضلع جه وقد علمنا ان طوله عشرة من العدد لان كل سطح مربع متساوي الاضلاع والزوايا فان احد اضلاعه مضروبا في واحد جذر ذلك السطح وفي اثنين جذراه فلما قال مال واحد وعشرون يعدل عشرة اجذاره علمنا ان طول ضلع هج عشرة اعداد لان ضلع جد جذر المال فقسمنا ضلع جه بنصفين علي نقطة

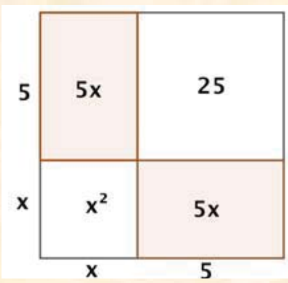
Το αυθεντικό αραβικό κείμενο από το βιβλίο της άλγεβρας του al-Khwârizmi

Για τη γεωμετρική αιτιολόγηση (*οπτική απόδειξη*), της λύσης της εξίσωσης $x^2+10x=39$, ο Al-Khwarizmi προσθέτει στο τετράγωνο (x^2), δύο ίσα ορθογώνια, που προκύπτουν από τη διαίρεση του (*ορθογωνίου*) 10x σε δύο ίσα μέρη.

Το αρχικό τετράγωνο μαζί με τα δύο ορθογώνια στις πλευρές του, ισούνται με 39.

Αλλά $x^2+10x = x^2+2\cdot 5x = (x+5)^2-25=39$.

Οπότε το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 39+25=64 και άρα η πλευρά του ($x+5$) είναι 8. Επομένως η πλευρά του αρχικού τετραγώνου είναι x = 8 – 5= 3.



Η μέθοδός του είναι, ουσιαστικά, γεωμετρική. Πρόκειται για τη «συμπλήρωση τετραγώνου», μια μέθοδο η οποία ήταν γνωστή στους λαούς της αρχαιότητας. Οι Ινδοί, το 800 με 600 π.Χ., χρησιμοποίησαν τη μέθοδο αυτή για τον «τετραγωνισμό» του ορθογωνίου[2] (*περιγράφοντας όμως λεκτικά τον τρόπο εύρεσης των λύσεων*), οι Βαβυλώνιοι, περίπου το 400 π.Χ., σε προβλήματα, τα οποία, με μεταγενέστερη ορολογία, οδηγούν στην επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων αλλά κι οι Έλληνες, με τον Ευκλείδη το 300 π.Χ., για την κατασκευή τμημάτων, τα μήκη των οποίων, αργότερα, θα μπορούσαν να θεωρηθούν λύσεις δευτεροβάθμιων εξισώσεων.

"Οι γεωμετρικές αποδείξεις (του Al-*Khwarizmi) αποτελούν θέμα διαφωνίας μεταξύ των ειδικών. Η ερώτηση, που φαίνεται να μην έχει μια εύκολη απάντηση, είναι εάν* al'*Khwarizmi ήταν εξοικειωμένος με τα Στοιχεία του Ευκλείδη"*[4]. Ορισμένοι μελετητές υποστηρίζουν ότι αυτές οι γεωμετρικές αποδείξεις μοιάζουν να απηχούν παλαιότερες βαβυλωνιακές συλλογιστικές παρά γεωμετρικές παραδόσεις που ακολούθησαν το Ευκλείδειο πρότυπο [5].

Αυτός που σίγουρα γνώριζε το έργο του Ευκλείδη και το χρησιμοποίησε, ήταν ο Ομάρ Καγιάμ, ο οποίος γράφει:

"Οποιος νομίζει ότι η άλγεβρα είναι ένα τέχνασμα για να υπολογίσει κανείς αγνώστους κάνει λάθος. Καμία σημασία δεν πρέπει να δοθεί στο γεγονός ότι η άλγεβρα και η γεωμετρία είναι διαφορετικές στην εμφάνιση. Οι άλγεβρες (jabbre και maqabeleh) είναι γεωμετρικά έργα που αποδεικνύονται από τις προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου II των Στοιχείων του Ευκλείδη" [2].

Η άλγεβρα του Omar Khayyam είναι κυρίως γεωμετρική. Πρώτα επιλύει γραμμικές και τετραγωνικές εξισώσεις (ίδιων τύπων με αυτές του Al-Khwarizmi) με τις γεωμετρικές μεθόδους που περιγράφει ο Ευκλείδης στα Στοιχεία, (κυρίως την κατασκευή της τετραγωνικής ρίζας με την πρόταση ΙΙ.14) και μετά δείχνει ότι οι κυβικές εξισώσεις μπορούν να επιλυθούν με τομές κωνικών τομών.

Στο Βιβλίο ΙΙ των Στοιχείων του Ευκλείδη[3], που έχει χαρακτηριστεί ως *"γεωμετρική άλγεβρα"*, βρίσκουμε την γεωμετρική επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων ενώ στο Βιβλίο VI τη γενικευμένη μορφή της δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Οι προτάσεις 5 και 6 του βιβλίου ΙΙ των Στοιχείων του Ευκλείδη δεν είναι προτάσεις, ισχυρίζεται ο Van der Waerden [3], αλλά λύσεις προβλημάτων. Στη ΙΙ.5 ζητείται να κατασκευαστούν δύο ευθύγραμμα τμήματα, όταν δίνεται το άθροισμα και το γινόμενο ενώ στην ΙΙ. 6 όταν δίνεται η διαφορά και το γινόμενο.

Η πρόταση ΙΙ. 11 (διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο) των Στοιχείων σχετίζεται με τη λύση δευτεροβαθμίων εξισώσεων με ασύμμετρες ρίζες. Πρόκειται για την πρόταση: «*Να αποκοπεί δοθείσα ευθεία γραμμή έτσι ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου που περιέχεται από όλη την ευθεία και ένα από τα τμήματα, να είναι ίσο με το εμβαδόν του τετραγώνου στο εναπομείναν τμήμα*» μπορεί να ερμηνευθεί ως γεωμετρική επίλυση της εξίσωση:

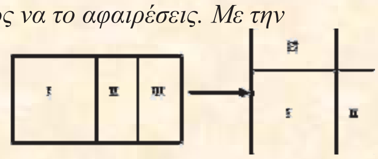
$$\alpha\,(\alpha - x)=x^2,\ \ x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0 \text{ με ρίζες } \frac{1}{2}\alpha\left(-1+\sqrt{5}\right) \text{ και } \frac{1}{2}\alpha\left(-1-\sqrt{5}\right).$$

Η λύση του Ευκλείδη απέβλεπε στην κατασκευή της πρώτης ρίζας, της θετικής [1]. Η κατασκευή[4] γίνε-

---

[2] Το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός ορθογωνίου πρωτοεμφανίστηκε στο έργο Sulbasutram του Baudhayana [2]. «Sulbasutram» σημαίνει «τους κανόνες του σχοινιού» και είναι ένα αρχαίο κείμενο που γράφτηκε στα σανσκριτικά (περίπου το 600 π.Χ.) ως εγχειρίδιο για τους ανθρώπους που έχτιζαν βωμούς και ναούς. Το μεγαλύτερο μέρος του βιβλίου δίνει λεπτομερείς οδηγίες για το σχέδιο για την κατασκευή ναών, αλλά το πρώτο κεφάλαιο είναι ένα εγχειρίδιο γεωμετρίας που περιέχει γεωμετρικά κείμενα, τα αποκαλούμενα Sutra. Το Sutra 54 είναι το εξής: (Εδώ «στενόμακρο» σημαίνει «ορθογώνιο»).

«*Εάν επιθυμείς να μετατρέψεις ένα στενόμακρο σε τετράγωνο, πάρε την πιό μικρή πλευρά του στενόμακρου για πλευρά του τετραγώνου. Διαίρεσε το υπόλοιπο (*το μέρος του στενόμακρου που απομένει αφού αποκοπεί το τετράγωνο) *σε δύο μέρη και αναστρέφοντας* (τις θέσεις τους) *ένωσε τα δύο μέρη σε δύο πλευρές του τετραγώνου.* (Παίρνεις έτσι ένα μεγάλο τετράγωνο από μια γωνία του οποίου έχει αποκοπεί ένα μικρό τετράγωνο). *Γέμισε την κενή θέση* (στη γωνία) *με την προσθήκη ενός κομματιού* (ένα μικρό τετράγωνο). *Έχει διδαχθεί πώς να το αφαιρέσεις. Με την προσθήκη του μικρού τετραγώνου στη γωνία παίρνουμε ένα μεγάλο τετράγωνο που είναι ίσο με το στενόμακρο συν το μικρό τετράγωνο, επομένως πρέπει να αφαιρέσουμε το μικρό τετράγωνο από το μεγάλο τετράγωνο* (δες Sutra 51) *και έπειτα έχουμε ως υπόλοιπο ένα τετράγωνο που είναι ίσο με το στενόμακρο» [2].*



Ένα διάγραμμα για το Soutra 54

[3] Οι προτάσεις στο ΙΙ βιβλίο των Στοιχείων που περιέχουν τετράγωνα, κυρίως η ΙΙ.11 και η ΙΙ.14 (κατασκευή της τετραγωνικής ρίζας) στοχεύουν στη διαχείριση της ασυμμετρίας. Επιπλέον, οι περισσότερες προτάσεις του βιβλίου, σχετίζονται με την μέθοδο της παραβολής ευθυγράμμων χωρίων («παραβολή χωρίων» είναι η κατασκευή παρ/μου, δεδομένου εμβαδού, ξεκινώντας από συγκεκριμένο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο θεωρούμε ως μία διάσταση του), η οποία έχει μια αντιστοιχία με την γενική μεθοδο επίλυσης της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

[4] Η εξίσωση $x^2+\alpha x=\alpha^2$ ή $x(\alpha+x)=\alpha^2$ είναι ειδική μορφή δευτεροβάθμιας. Σε επόμενα βιβλία των Στοιχείων υπάρχουν γεωμετρικές κατασκευές που ισοδυναμούν με επίλυση της γενικής δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Η εξίσωση απαιτεί την κατασκευή δύο τμημάτων x και α+x, των οποίων δίνονται η διαφορά α και το γινόμενο α^2. Αφού η διαφορά είναι δεδομένη, το πρόβλημα επιλύεται με τη χρήση της πρότασης ΙΙ.6.

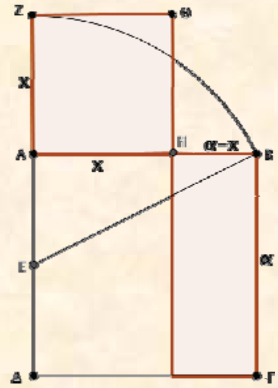
ται ως εξής:

Πρώτα γίνεται η κατασκευή του τετραγώνου ΑΒΓΔ και του μέσου Ε του ΑΔ.Ο κύκλος (Ε, ΕΒ) τέμνει την προέκταση του ΔΑ στο Ζ. Στη συνέχεια κατασκευάζεται το τετράγωνο ΑΖΘΗ. Το σημείο Η είναι το ζητούμενο.

Ο Ευκλείδης έδωσε την παρακάτω απόδειξη [1] που με σύγχρονο συμβολισμό είναι :

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΕΒ έχουμε $ΕΒ=\sqrt{α^2+(\frac{1}{2}α)^2}=\frac{1}{2}α\sqrt{5}$.

Επομένως $ΑΖ = ΕΖ - ΕΑ= ΕΒ - ΕΑ =\frac{1}{2}α\sqrt{5}-\frac{1}{2}α \;=\frac{1}{2}α(-1+\sqrt{5})$.



Η το ζητούμενο σημείο
ΑΒ=α, ΑΗ=x

Στο σχήμα βλέπουμε την κατασκευή της χρυσής τομής όπως την κάνει ο Ευκλείδης στην ΙΙ. 11 (διαίρεση ευθυγράμμου τμήματος σε «μέσο και άκρο λόγο»). Η μέση ανάλογος ή αλλιώς "**χρυσή τομή**" κατά τους Πυθαγορείους, κατασκευάζεται δύο φορές στα Στοιχεία του Ευκλείδη, από την πρόταση ΙΙ.11 και την πρόταση VI.30 όπου αναφέρεται πρώτη φορά σαν μέσος και άκρος λόγος.

Σύμφωνα με τον van der Waerden, οι Έλληνες δεν υιοθέτησαν την βαβυλωνιακή άλγεβρα αλλά χρησιμοποίησαν γεωμετρικές μεθόδους για τη επίλυση των δευτεροβαθμίων εξισώσεων λόγω των δυσκολιών που είχαν με τους άρρητους αριθμούς αλλά και λόγω των ψηφίων που χρησιμοποιούσαν. Για τους Βαβυλώνιους, κάθε ευθύγραμμο τμήμα και κάθε χωρίο αντιπροσώπευε απλά έναν αριθμό.

Δεν είχαν ενδοιασμούς να προσθέτουν την επιφάνεια ενός ορθογωνίου στη βάση του. Όταν δεν μπορούσαν να προσδιορίσουν επακριβώς μια τετραγωνική ρίζα αρκούνταν, σε μια προσέγγιση. Αυτό κάνουν πάντα οι μηχανικοί και οι φυσικοί επιστήμονες. Αλλά οι Έλληνες ενδιαφέρονταν για την ακριβή γνώση, για την *"διαγώνιο καθεαυτή"* όπως λέει ο Πλάτων, όχι για μια αποδεκτή προσέγγιση [3]. Κατά συνέπεια, προκειμένου να επιλύσουν τις δευτεροβάθμιες εξισώσεις, έπρεπε να περάσουν από το πεδίο των αριθμών σε εκείνο των γεωμετρικών μεγεθών καθώς η γεωμετρική άλγεβρα είναι έγκυρη και για άρρητα ευθύγραμμα τμήματα.

Ο σύγχρονος συμβολισμός για τις εξισώσεις $2^{ου}$ βαθμού άρχισε να εμφανίζεται γύρω στο 1.500 μ.Χ, καθώς τότε έγινε η πρώτη εμφάνιση απλών και εύχρηστων συμβόλων για τον άγνωστο, για τις αλγεβρικές δυνάμεις και τις αλγεβρικές πράξεις. Η επιστήμη των μαθηματικών είχε εκθετική ανάπτυξη μετά την επινόηση των συμβόλων. Οι δυνατότητες χρησιμοποίησης αρνητικών ριζών και ακόμα μιγαδικών ριζών προτάθηκαν από τους Cardano και Girard. Η γεωμετρική παράσταση των αρνητικών ριζών από τον Descartes και των μιγαδικών αριθμών από τούς Wessel, Argand και Gauss έκαμε τους αριθμούς αυτούς περισσότερο αποδεκτούς ως ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης. Πολλοί δυτικοί όπως ο Vieta και ο Harriot εφάρμοσαν πολύ αργότερα και άλλους αλγόριθμους για τον υπολογισμό των λύσεων της εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού. Η ποικιλία των επιλύσεων που αναπτύχθηκε τα αρχαία χρόνια μας ενέπνευσε να αναπτύξουμε μερικούς τρόπους εξαγωγής του τύπου εύρεσης των ριζών δευτεροβάθμιας εξίσωσης που χρησιμοποιούμε σήμερα στα σχολεία μας. Για παράδειγμα τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» των Ινδών που υιοθέτησαν οι συγγραφείς του βιβλίου των Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου, σελ 94, για την επίλυση της εξίσωσης δευτέρου βαθμού.

Βιβλιογραφία

[1] L.Bunt-Ph. Jones -J.Bedient (1981): Οι ιστορικές ρίζες των στοιχειωδών Μαθηματικών, μετάφραση Άννα Φερεντίνου, εκδόσεις Γ. Α. Πνευματικός, Αθήνα.

[2] Henderson D.W.: Geometric Solutions of quadratic and Cubic Equations, άρθρο στο διαδίκτυο. www.math.cornell.edu/~dwh/papers/.../geomsolu.html

[3] B.L.van der Waerden (2000): Η αφύπνιση της επιστήμης, Πανεπιστημιακές εκδόσεις Κρήτης.

[4] Abu Ja'far Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi (biography), άρθρο στο διαδίκτυο: www-history.mcs.st-and.ac.uk/.../Al-Khwar

[5] Παπαδόπουλος Στάθης (2012): Η Άλγεβρα του Αλ-Χουαρίζμι, Διπλωματική εργασία στο Διαπανεπιστημιακό–Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών», Τμήματα Μαθηματικών ΕΚΠΑ και Παν. Κύπρου.

[6] Th. Heath. (2001) : Ιστορία των Ελληνικών Μαθηματικών, τόμος ΙΙ, Αθήνα, Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ

50x12 x2=1230
Τα Μαθηματικά στην ... Αρχαιολογία!

Ιωάννη Λυριτζή, Καθηγητή Φυσικών Επιστημών – Αρχαιομετρίας, Παν/μιο Αιγαίου

Εισαγωγή

Μα *τι είναι επιτέλους αυτή η αρχαιολογία*? ρωτάει ένας Μαθηματικός, έκπληκτος από την χρήση αριθμών εξισώσεων, πιθανοτήτων, θεωρίες συνόλων κτλ, από ..... αρχαιολόγους. Η απάντηση απλή: ανασκαφές, ευρήματα, μνημεία και τέχνεργα παλαιών εποχών για να μελετήσουν τον άνθρωπο και τους πολιτισμούς του παρελθόντος....

Τώρα αν τα μαθηματικά είναι ιδιότητα της φύσης ή όχι ξεφεύγει από τα όρια της παρούσης εισαγωγής. Πάντως τα μαθηματικά ξεκαθαρίζουν όποιες αρχαιολογικές ιδέες και παράγοντες που μπορούν να τυποποιηθούν, και αποσαφηνίζουν την περιγραφή των αρχικών αρχαιολογικών δεδομένων δηλ τις αρχαιολογικές παραμέτρους (παρατηρήσιμες ποσότητες, ιδιότητες) ευρημάτων (Barcelo & Bogdanovich 2015).

Οτιδήποτε ειναι 'ποσοτικό' η 'μέτρηση' είναι η διαδικασία ή το αποτέλεσμα καθορισμού του αριθμού (λόγου ή μέτρου) μιας φυσικής ποσότητας, όπως, το μήκος ενός μνημείου, ο χρόνος κατασκευής ενός έργου τέχνης, η θερμοκρασία ενός κεραμικού κλιβάνου, η περιεκτικότητα σε χαλκό ενός εργαλείου κ.α., σε μονάδες μέτρησης, όπως το μέτρο, το έτος, οι βαθμοί κελσίου, το γραμμάριο κ.α. Η μέτρηση υπονοεί «αριθμό», που ο Πυθαγόρας υπερθεμάτιζε και στήριξε όλη του τη φιλοσοφική θεωρία. Ναι μεν '*μέτρον πάντων άνθρωπος'* αλλά και ο **αριθμός** είναι η αιώνια ουσία, το παν στην εξήγηση του σύμπαντος.

Οτιδήποτε υπόκειται σε εξέταση με επιστημονικά όργανα (οργανολογία) μετριέται με αριθμούς που πάντοτε περιέχουν μια αβεβαιότητα. Τίποτα δεν μετριέται απολύτως, δηλαδή με μηδέν σφάλμα. Οι μετρήσεις λοιπόν, έβαλαν μια τάξη στα φαινόμενα της φύσης, συμπεριλαμβανομένου και του ανθρώπου, και σχημάτισαν στην γραμμή του (φαινομενικού, απατηλού?) χρόνου μια φαινομενική 'τάξη' ώστε νοητικά να δεχόμαστε την εξέλιξη, προϊόντος του χρόνου, με αριθμούς που προέρχονται από τις 'μετρήσεις'. Έτσι χρονολογήσαμε προ-ιστορικά γεγονότα δηλ. σε εκείνες τις άγνωστες περιόδους που δε υπήρχε γραφή, εντοπίζουμε θαμμένες αρχαιότητες. Ακόμη διαπιστώνουμε την προέλευση της πρώτης ύλης έργων τέχνης (τέχνεργων), τον προσανατολισμό μνημείων σε ουράνια σώματα σε συγκεκριμένες μέρες του έτους, τις διατροφικές συνήθειες αρχαίων και προϊστορικών κοινωνιών. Αυτά και πολλά άλλα διερευνώνται με τη 'μέτρηση', με έναν αριθμό, του υλικού αντικειμένου, ώστε η 'μέτρηση' γενικά αποτελεί βασικό κύτταρο προόδου στην εξέλιξη της ανθρωπότητας που διαπραγματεύονται πολλά επιστημονικά πεδία.

Η δι-επιστημονική προσέγγιση υποδηλώνει συνέργεια, «πάντρεμα», συν-εργασία, σύγκληση, διαφορετικών επιστημονικών πεδίων με τρανταχτό παράδειγμα την Τεχνολογία και Θετικές Επιστήμες στην Αρχαιολογία, Ανθρωπολογία, Ιστορία και Τέχνη. Για παράδειγμα σε μια αρχαιολογική ανασκαφή ανευρίσκονται διάφορα αντικείμενα και παράγεται μια τομή στο έδαφος (ύπαιθρο, σπήλαιο). Η μελέτη όλων των ευρημάτων γίνεται διερευνητικά με την εφαρμογή διαφόρων ειδικοτήτων που λαμβάνουν μέρος στην μελέτη, τεκμηρίωση, ανάδειξη, προώθηση του πολιτισμικού υλικού που θεραπεύουν οι αρχαιολογικές επιστήμες ή αρχαιομετρία, με την ευρεία έννοια (Λυριτζής 2007).

Τα Μαθηματικά έχουν πρώτιστο ρόλο και αξία σε όλα τα παραπάνω. Αφού οποιοδήποτε φυσικό φαινόμενο κι αν χρησιμοποιείται για επίλυση κάποιου προβλήματος στην αρχαιολογία, και γενικότερα σε υλικό της πολιτιστικής κληρονομιάς, μετριέται μια ποσότητα, ένας αριθμός με την βοήθεια μιας μεθόδου και μιας τεχνικής που όμως βασίζονται σε κάποια μαθηματική σχέση, σε ένα αλγόριθμο[1]. Αλλά και ακόμη ποιοτικά στοιχεία όπως π.χ. η τυπολογία έργων τέχνης, μπορούν να μετατραπούν σε στοιχεία που τα επεξεργαζόμαστε με μαθηματικά.

Παρακάτω δίνουμε μερικά παραδείγματα που δείχνουν την χρησιμοποίηση ορισμένων Κεφαλαίων των Μαθηματικών στην επίλυση αρχαιολογικών προβλημάτων δηλαδή ζητημάτων που προέρχονται απο το πεδίο της πολιτισμικής κληρονομιάς (cultural heritage).

Τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων στηρίζονται πάντοτε στις βασικές έννοιες της Λογικής, στην όποια βασίζεται η σαφέστερη διατύπωση μαθηματικών εννοιών, προτάσεων κτλ.

---

[1] Αλγοριθμος=μια πεπερασμένη σειρά ενεργειών, αυστηρά καθορισμένων που εκτελούνται σε πεπερασμένο χρόνο, και στοχεύουν στην επίλυση ενός προβλήματος. Πιο απλά (**αλγόριθμο**) ονομάζουμε μία σειρά από εντολές που έχουν αρχή και τέλος, είναι σαφείς και έχουν ως σκοπό την επίλυση κάποιου προβλήματος.

Έτσι από ένα λογικό διάγραμμα (εξ.1) κατασκευάζουμε μια μαθηματική σχέση για να επιλύσουμε ένα αρχαιολογικό πρόβλημα $\exists x\left(\text{αριθμοςατόμων}\, C-14\,\text{σε}\,\text{Οστο}(x)\wedge\forall y\left(\text{Χρόνου}(y)\to N-14(x,y)\right)\right)$ (1)

Δηλαδή, υπάρχει παράμετρος χ που αντιπροσωπεύει τον αριθμό ατόμων ανθρακα-14 (x) για κάθε χρονική στιγμή (y) Μετατρέπεται σε άτομα Αζώτου-14 (x, y).

Από το περιεχόμενα των Μαθηματικών κάποια κεφάλαια που χρησιμοποιούνται στην επίλυση αρχαιολογικών προβλημάτων όπως ο προσδιορισμός του χρόνου κατασκευής ενός έργου τέχνης π.χ οψιανό, κεραμικό, οστό, μνημείο, η προέλευση πρώτης ύλης εργαλείων και τεχνεργων π.χ. από ποιο πηλό κατασκευάστηκε ένα κεραμικό αγγείο, ποιο πέτρωμα ένα λίθινο εργαλείο, την τεχνολογία κατασκευής αρχαιουλικου, κ.α., είναι εξισώσεις, Πιθανότητες, συναρτήσεις, Γραμμικά Συστήματα, Διαφορικός Λογισμός, Πολυώνυμα-Πολυωνυμικές Εξισώσεις, Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση, και πολλά άλλα.

Τρία παραδείγματα:

1) Προσδιορισμός της τεχνοτροπίας φημισμένων τοιχογραφιών του Ακρωτηρίου Θήρας του 1650 π.Χ με την χρήση αλγορίθμων (Σχ.1) (Παπαοδυσσεας, 2008) και να ανατηχθεί ειδικό πρωτότυπο αλγόριθμου κατάτμησης εικόνας. Διαπιστώθηκε ότι για την κατασκευή των τοιχογραφιών πιθανότατα είχαν χρησιμοποιηθεί τα γεωμετρικά σχήματα: 1) εκθετική (λογαριθμική) σπείρα, 2) σπείρα που παράγεται εκτυλίσσοντας ένα νήμα γύρω από ένα κυλινδρικό άξονα (Εκτύλιξη κύκλου)

$R(\theta)=r_0\sqrt{1+(\theta-\theta_0)^2}$ και $\alpha(\theta)=(\theta-\theta_0)-\arctan(\theta-\theta_0)$. Όπου θ η πολική γωνία R(θ) τυχούσα αύξουσα συνάρτηση του θ (x_0,y_0) οι καρτεσιανές συντεταγμένες του κέντρου της σπείρας, 3) η γραμμική σπείρα του Αρχιμήδη, 4) η έλλειψη, 5) η υπερβολή και 6) η παραβολή.

Οι υπολογισμοί μπορούν να γίνουν με χρήση γνωστών αλγορίθμων όπως του συζυγούς ανάδελτα ∇. Έτσι μπορούμε να διακρίνουμε εικονογραφήσεις που ζωγράφισε ο ίδιος καλλιτέχνης, και διαπιστώθηκε το ενδεχόμενο οι σπείρες να μην είχαν γίνει με το χέρι, αλλά με τη χρήση κάποιου οργάνου που ενδεχομένως θα μπορούσε να αντιστοιχεί και σε **γεωμετρικό πρότυπο**, με βάση και το τεχνολογικό επίπεδο της εποχής.

(α) (β) (γ)

Σχ.1.α) Βέλτιστη προσέγγιση με σπείρα εκτύλιξης β) Βέλτιστη προσέγγιση με εκθετική σπείρα, γ) Αντίθετα, η γραμμική σπείρα σαν μονογραφημένη ενότητα, προσεγγίζει ικανοποιητικά τις ζωγραφισμένες σπείρες (Απο Παπαοδυσσεας 2008).

2) Στη χρονολόγηση βραχογραφιών (Σχ.2). Για τη μέτρηση της κατανομής μεγέθους των μετρήσεων φωταύγειας συναρτήσει του βάθους τα εν λόγω πειραματικά σημεία εμφανίζουν συνήθως κατανομές μεγέθους που προσεγγίζουν το λογάριθμο της κανονικής κατανομής (log-normal). Με την χρήση διπλών εκθετικών εξισώσεων ή/και διπλών Log-Norm εξισώσεων προσεγγίζουμε άριστα (στατιστικά) τα πειραματικά σημεία που προέρχονται από μετρήσεις φωταύγειας σε βραχογραφίες και μπορούμε να χρονολογήσουμε πότε λαξευθηκε ένα ανάγλυφο σχήμα από τον αρχαίο / παλαιολιθικό καλλιτέχνη! (εξ.2)

$$L(x;a,b_1,c_1,d_1,b_2,c_2,d_2)=a+\frac{b_1}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{-\ln\left(\frac{x}{c_1}\right)}{d_{1\sqrt{2}}}\right)+\frac{b_2}{2}\operatorname{erfc}\left(\frac{-\ln\left(\frac{x}{c_2}\right)}{d_{2\sqrt{2}}}\right)\qquad(2)$$

Σχ.2 Βραχογραφία στη Σαουδική Αραβία. Λάξευση στην επιφάνεια του βράχου.

3) Χρονολόγηση οψιανών εργαλείων. (Σχ.4) με το φαινόμενο διάχυσης νερού (υγρασία περιβάλλοντος ταφής) σε φυσικό γυαλί και το 2^o Νόμο του Fick. (εξ.3). Η εξίσωση αύτη είναι μερικές παράγωγοι της συγκέντρωσης C ατόμων υδρογόνου (που αντιστοιχούν στην ποσότητα νερού) ως προς το χρόνο t που πέρασε από τότε που έγινε το εργαλείο αλλά και ως προς το βάθος διείσδυσης x.

$$\left[\left(\frac{\partial C}{\partial t}\right) = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}\right] \qquad (3)$$

Επεξεργαζόμενοι αυτήν τη μαθηματική εξίσωση που περιγράφει ένα φυσικοχημικό φαινόμενο την μεταφορά μάζας σε στερεό, καταλήγουμε στην εξίσωση ηλικίας κατασκευής (t) του εργαλείου οψιανου (εξ.4).

$$t = \frac{(Ci - Cs)^2\left(\dfrac{1.128}{1-\dfrac{0.177kCi}{Cs}}\right)^2}{4Dseff\left(\left.\dfrac{dc}{dx}\right|_{x=0}\right)^2} \qquad (4)$$

Όπου t ο χρόνος κατασκευής του εργαλείου, C_i η εσωτερική συγκέντρωση νερού από τότε που έγινε το ηφαίστειο, C_s η συγκέντρωση νερού σε κορεσμό, b,a συντελεστές πολυωνύμου $3^{ου}$ βαθμού, $D_{s,eff}$ ο ενεργός συντελεστής διάχυσης νερού. (Λυριτζής 2007)



Σχ.4 Εργαλεία από οψιανο. Χρησιμοποιούνταν από τον προϊστορικό άνθρωπο πριν την έλευση των μετάλλων δηλ. πριν ~3.100 έτη προ Χριστού ενώ έχουν χρονολογηθεί γιαπωνέζικα εργαλεία των 30.000 ετών.

Αυτά και περισσότερα θα παρουσιαστούν στην Ημερίδα της ΕΜΕ στις 23 Μαρτίου 2018 με τίτλο «Τα Μαθηματικά στην Αρχαιολογία».

Γενική Βιβλιογραφία

Barcelo, J.A & Bogdanovich, I (Επιμ.)(2015) Mathematics and Archaeology. CRC Press Taylor & Francis Group, Florida, USA.

Gareth, W (1982) Mathematics in Archaeology. *The Two-Year College Mathematics Journal,* Vol. 13, No. 1, pp. 56-58 (Mathematical Association of America)

Kendall D.G (1969) Some problems and Methods in Statistical Archaeology, World Archaeology, 1, 61.

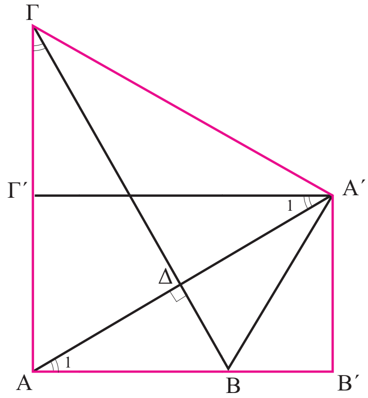
Λυριτζής, I (2007) Φυσικές Επιστήμες στην Αρχαιολογία. Εκδ. Τυπωθήτω- Γ.Δαρδανός, $2^η$ Εκδ.(Κεφ 4, σελ.312-340)

Παπαοδυσσεας, Κ (2008) Προσδιορισμός της τεχνοτροπίας φημισμένων τοιχογραφιών Ακρωτηρίου Θήρας του 1650 πΧ με χρήση Γενικής Μεθοδολογίας. Στο: *Νέες Τεχνολογίες στις Αρχαιογνωστικές Επιστήμες,* (Ι. Λυριτζής επιμ.), Εκδ. Gutenberg, Κεφ. 16, 483-516,

Δυο ακόμη αποδείξεις του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Κ. Ντελκής

1η Απόδειξη / Πυθαγορείου Θεωρήματος

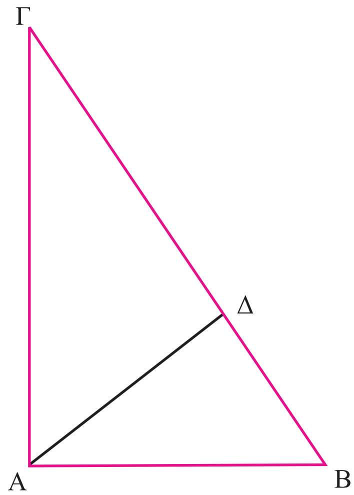


Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΒΓ. Έστω $AA' \underline{\underline{\perp}} B\Gamma$ με τα Α,Α΄ εκατέρωθεν της ΒΓ και Β΄, Γ΄ οι προβολές του Α΄ επί των ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως. Έχουμε: $\overset{\triangle}{AA'B'} = \overset{\triangle}{AA'\Gamma'} = \overset{\triangle}{AB\Gamma}$ ως ορθογώνια με ΑΑ΄=ΒΓ και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$, $\hat{A}'_1 = \hat{\Gamma}$ (οξείες με πλευρές κάθετες). Άρα: Α΄Β΄=γ, Α΄Γ΄= β, οπότε:

$$\left.\begin{aligned}(A\Gamma A') &= \frac{1}{2}A\Gamma\cdot A'\Gamma' = \frac{1}{2}\cdot\beta^2\\ (ABA') &= \frac{1}{2}AB\cdot A'B' = \frac{1}{2}\cdot\gamma^2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2}\beta^2 = (A\Gamma A') + (ABA') =$$

$$= \frac{1}{2}AA'\cdot\Gamma\Delta + \frac{1}{2}AA'\cdot B\Delta = \frac{1}{2}\alpha\left(\Gamma\Delta + B\Delta\right) = \frac{1}{2}\alpha^2 \Rightarrow \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$$

2η Απόδειξη / Πυθαγορείου Θεωρήματος



Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΑΓΔ και ΑΒΓ είναι όμοια οπότε: $\dfrac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} = \left(\dfrac{AB}{B\Gamma}\right)^2 = \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2}$,

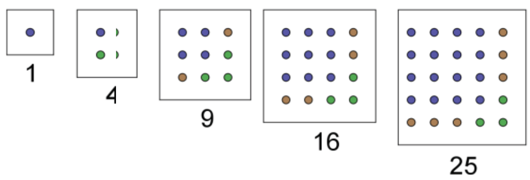
$\dfrac{(A\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)} = \left(\dfrac{A\Gamma}{B\Gamma}\right)^2 = \dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$. Άρα $\dfrac{(AB\Delta)}{(AB\Gamma)} + \dfrac{(A\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{\gamma^2}{\alpha^2} + \dfrac{\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{(AB\Delta)+(A\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma^2+\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{(AB\Gamma)}{(AB\Gamma)} = \frac{\gamma^2+\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow 1 = \frac{\gamma^2+\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow \gamma^2+\beta^2 = \alpha^2$$

Σχόλιο: Κάθε απόδειξη του Πυθαγορείου Θεωρήματος που έπεται του Θεωρήματος Θαλή (Ομοιότητας, τύπων Εμβαδού) υστερεί προφανώς εκείνης του Σχολικού βιβλίου. Ενδιαφέρον λοιπόν αποτελούν οι αποδείξεις που προηγούνται των αναλογιών.

Προβληματισμός ενός μαθητή

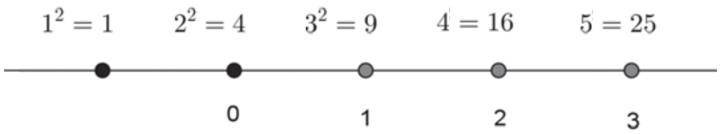
Η καθηγήτρια των μαθηματικών ξεκίνησε να μας παραδίδει την παράγραφο “τετραγωνική ρίζα ενός πραγματικού αριθμού”. Μας μίλησε για τους τετράγωνους αριθμούς και έφτιαξε στον πίνακα το παρακάτω σχέδιο



Οπότε μπήκα στη λογική να σχηματίσω ένα τύπο που θα μπορεί να υπολογίζει τους τετράγωνους αριθμούς.

Το πρώτο στοιχείο (μοτίβο) που παρατήρησα ήταν πως κάθε φορά που πηγαίναμε στον επόμενο τετράγωνο αριθμό αυξανόταν το προηγούμενο μοτίβο κατά 3 κουκίδες (γωνία).

Το δεύτερο στοιχείο ήταν πως από τον τετράγωνο αριθμό 9 και μετά προσθέτονταν σταθερά 2 κουκίδες ανά τετράγωνο αριθμό. Η πρόσθεση αυτή ξεκινάει από το 9 δηλαδή το 3^2 οπότε σκέφτηκα το παρακάτω. Οπότε έτσι σκέφτηκα πως 2 (κουκίδες ανά τετράγωνο αριθμό) επί Χ (τον αντίστοιχο αριθμό του τετράγωνου αριθμού που ψάχνουμε στο ευθύγραμμο τμήμα). Για να απλοποιήσουμε Χ όρισα το $4=2^2$ ως 0 στο παραπάνω τμήμα και αντικατέστησα το Χ → (x-2). Έτσι προέκυψε το 2(x-2).



Το τρίτο και τελευταίο στοιχείο προέκυψε ως εξής. Καθώς αυξάνονται οι κουκίδες για να σχηματιστεί ο επόμενος τετράγωνος αριθμός ένα τετράγωνο από κουκίδες εμφανίζεται κάθε φορά που είναι ο προηγούμενος τετράγωνος αριθμός. Οπότε ονόμασα τον προηγούμενο τετράγωνο αριθμό (x-1) με πλήθος κουκίδων $(x-1)^2$.

Έτσι ο τελικός τύπος είναι: $\mathbf{x^2 = [3 + 2(x-2)] + (x-1)^2}$ και μας υπολογίζει τον τετράγωνο αριθμό.

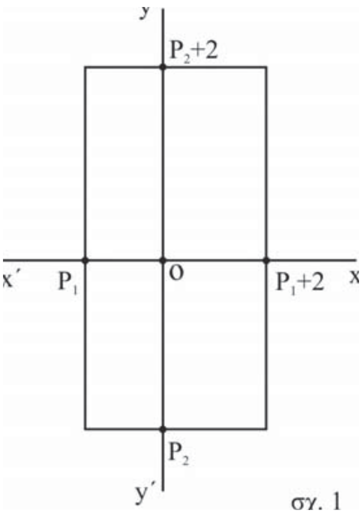
Νίκος Γκολφίνος, μαθητής της Α΄ λυκείου 2016-2017 του 2ου ΓΕ.Λ. Νέας Σμύρνης «Ομήρειο»

Ερωτήματα γύρω από τους δίδυμους πρώτους αριθμούς.

Μαρίνος Σπηλιόπουλος-Ερευνητής

Αρχίζοντας κάπως χαλαρά το θέμα μας, όπως στη Βιολογία μιλάμε για δίδυμους αδελφούς, έτσι και στη θεωρία αριθμών έχουμε τους δίδυμους πρώτους αριθμούς, που είναι οι πρώτοι που απέχουν μεταξύ τους κατά 2. Παραδείγματα: 3,5 ή 5,7 ή 101, 103 κ.λπ. Υπάρχει και μια εικασία για τους δίδυμους πρώτους αριθμούς, που λέει ότι το πλήθος τους είναι άπειρο. Αλλά αυτό δεν έχει αποδειχθεί, όπως π.χ. έχει αποδειχθεί από τον Ευκλείδη ότι το πλήθος των πρώτων αριθμών είναι άπειρο. Γι' αυτό παραμένει ως εικασία. Στην εργασία αυτή θα προσεγγίσουμε και κάποια άλλα ερωτήματα που σχετίζονται με τους δίδυμους πρώτους. Ένα τέτοιο ερώτημα είναι το εξής: Εάν P_1, $P_1 + 2$ είναι ένα ζεύγος διδύμων πρώτων και P_2, $P_2 + 2$ το επόμενο διαδοχικό ζεύγος διδύμων πρώτων και P_x, $P_x + 2$ το μεθεπόμενο διαδοχικό ζεύγος διδύμων, άραγε ισχύει πάντα $P_x \leq 3P_1+2$; Παραδείγματα: (3, 5) ένα ζεύγος διδύμων, (5, 7) το επόμενο και (11, 13) το μεθεπόμενο. Ισχύει $11 \leq 3 \cdot 3 + 2$ (εδώ ισχύει το ίσον). Άλλο: (5, 7) ένα ζεύγος διδύμων, (11, 13) το επόμενο και (17, 19) το μεθεπόμενο. Ισχύει $17 \leq 3 \cdot 5 + 2$ (και εδώ ισχύει η ισότητα). Ένα ακόμη παράδειγμα πιο απόμακρο στην ακολουθία των διδύμων: (599, 601) ένα ζεύγος διδύμων πρώτων, (617, 619) το επόμενο και (641, 643) το μεθεπόμενο.

Ισχύει $641 < 3 \cdot 599 + 2$ ή $641 < 1799$ (εδώ ισχύει η ανισότητα και η διαφορά των αριθμών είναι 1158). Με την βοήθεια Η/Υ και για μεγάλη κλίμακα διαδοχικών ζευγών διδύμων πρώτων, βλέπουμε να ισχύει αφ' ενός πάντα η ανισότητα και αφ' ετέρου να έχει αυξητική «διάθεση» η διαφορά μεταξύ του δεύτερου και πρώτου μέλους της ανισότητας. Κάποιες φορές μπορεί να συμβεί «τοπικά» μια διαφοροποίηση: μια διαφορά σε σχέση με την προηγούμενή της να έχει μείωση. Γενικά έχουμε αυξητική τάση και οι διαφορές να είναι της τάξεως εκατομμυρίων ή και περισσότερο. Πάντως δεν φαίνεται να ισχύει ποτέ $P_x > 3P_1+2$. Η ανισότητα $P_x \leq 3P_1+2$ αποτελεί ταυτόχρονα και «πλαίσιο» εύρεσης του επόμενου και μεθεπόμενου διαδοχικού ζεύγους διδύμων πρώτων. Δηλαδή με βάση το τελευταίο παράδειγμα, μετά το ζεύγος διδύμων (599,601), δεν θα ψάξουμε το επόμενο ζεύγος, (617, 619) ή το μεθεπόμενο (641, 643) στο αχανές διάστημα των πρώτων, αλλά στο διάστημα μεταξύ των περιττών αριθμών από 603 έως στο 1799. Το παραπάνω πλαίσιο για τους δίδυμους πρώτους, θυμίζει το αντίστοιχο πλαίσιο του Ρώσου μαθηματικού Pafnuty Chebychev (Παφνούτι Τσέμπισεφ), που σήμερα ονομάζεται θεώρημα του Τσέμπισεφ, και έχει σχέση με τον αμέσως επόμενο πρώτο αριθμό και λέει: ότι δοθέντος ενός πρώτου P, ο αμέσως επόμενος πρώτος ανήκει στο διάστημα $[P + 2, 2P-1]$. Η διαφορά τους έγκειται, ότι στην εργασία αυτή το πλαίσιο αναφέρεται στα διαδοχικά ζεύγη διδύμων πρώτων. Θα μπορούσε να διατυπωθεί και ως εξής: Εάν P_1 είναι ο αρχικός αντιπρόσωπος ενός ζεύγους διδύμων πρώτων, τότε το επόμενο και μεθεπόμενο ζευγάρι διδύμων πρώτων, ανήκει στο διάστημα $[P_1 + 4, 3P_1 + 2]$.



σχ. 1

Όλα τα προηγούμενα μπορούμε να τα δούμε καλύτερα με μια γεωμετρική «απεικόνιση» ως εξής: Έχουμε κατά τα γνωστά (P_1, P_1+2) ένα ζεύγος διδύμων πρώτων και (P_2, $P_2 +2$) το αμέσως επόμενο ζεύγος διδύμων πρώτων. Θεωρούμε δύο κάθετους άξονες x΄x και y΄y σχ. 1.

Στον ημιάξονα Ox΄ ορίζουμε ένα σημείο, που η απόστασή του από το O να εκφράζει τον πρώτο αριθμό P_1. Στον ημιάξονα Ox ορίζουμε ένα σημείο, που η απόστασή του από το O να εκφράζει τον δίδυμό του πρώτο αριθμό $P_1 + 2$. Τα ίδια κάνουμε και στον άξονα y΄y. Στον ημιάξονα Oy΄ ορίζουμε με ένα σημείο τον πρώτο αριθμό P_2 και στον ημιάξονα Oy ορίζουμε ανάλογα τον δίδυμό του πρώτο $P_2 + 2$. Η μονάδα μέτρησης στους άξονες, είναι η ίδια φυσικά και οι άξονες δεν ενδιαφέρει να είναι προσανατολισμένοι σε θετικό και αρνητικό τμήμα αριθμών. Εκείνο που ενδιαφέρει, είναι αφ' ενός η γεωμετρική «απεικόνιση» των διαδοχικών ζευγών διδύμων πρώτων και αφ' ετέρου το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου, που προκύπτει από αυτή την απεικόνιση. Αυτό το σχήμα προκύπτει, εάν ενώσουμε τα σημεία που αντιστοιχούν στους δίδυμους πρώτους, φέρνοντας παράλληλες ευθείες προς τους άξονες κ.λπ. Το εμβαδόν του εύκολα υπολογίζεται: $E_1 = (2P_1 + 2)(2P_2 + 2)$ ή $E_1 = 4(P_1 + P_2 + P_1P_2 + 1)$ (1).

Κάνουμε το ίδιο με τα διαδοχικά ζεύγη διδύμων $(P_2, P_2 + 2)$ και $(P_x, P_x + 2)$. Συμβολίζουμε με P_x τον πρώτο αντιπρόσωπο του τρίτου κατά σειρά ζεύγους διδύμων, γιατί πιθανόν κάποιες φορές τα P_1, P_2 να θεωρούνται γνωστά και το P_x άγνωστο. Έτσι έχουμε εμβαδόν σύμφωνα με τα προηγούμενα:

$E_2 = (2P_2 + 2)(2P_x + 2)$ ή $E_2 = 4(P_2 + P_x + P_2P_x + 1)$ (2).

Άρα $\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{P_x + 1}{P_1 + 1}$ (3).

Εύκολα μπορούμε να κάνουμε έναν πίνακα, με ζεύγη διαδοχικών διδύμων πρώτων, ανά τρία και το πηλίκο των εμβαδών με βάση τη σχέση (3).

Διαδοχικά ζεύγη διδύμων πρώτων αριθμών ανά τριάδες			Πηλίκο εμβαδών: $\dfrac{P_x + 1}{P_1 + 1}$
(3, 5)	(5, 7)	(11, 13)	3
(5, 7)	(11, 13)	(17, 19)	3
(11, 13)	(17, 19)	(29, 31)	2,5
(17, 19)	(29, 31)	(41, 43)	$2\frac{1}{3}$
(29, 31)	(41, 43)	(59, 61)	2
(41, 43)	(59, 61)	(71, 73)	$1\frac{5}{7}$
(59, 61)	(71, 73)	(101, 103)	1,7
(71, 73)	(101, 103)	(107, 109)	1,5

Πίνακας 1.

Ο πίνακας παρουσιάζει λίγα ζεύγη διαδοχικών διδύμων πρώτων ανά τρία (τα οκτώ πρώτα διαδοχικά ζεύγη ανά τρία), αλλά δεν υπάρχει πρόβλημα, γίνεται όσο μεγάλος θέλουμε. Στον πίνακα φαίνεται ότι τα πηλίκα βαίνουν συνεχώς ελαττωμένα. Με την βοήθεια Η/Υ και για τεράστιο αριθμό ζευγών διδύμων επαληθεύεται αυτό. Η μόνη διαφορά όπως το αναφέραμε και πιο πάνω, είναι ότι κατά διαστήματα και «τοπικά», μπορεί να εμφανίζεται μια πολύ μικρή μεταβολή (αυξητική) σε σχέση με το προηγούμενο πηλίκο. Αλλά τα πηλίκα είναι πάντα < 3 εκτός των δύο πρώτων περιπτώσεων του πίνακα που είναι ίσον με το 3. Μάλιστα τα πηλίκα πολύ γρήγορα παίρνουν τιμές (με δεκαδικό τμήμα), συνεχώς ελαττωμένα λίγο πιο πάνω του 1. Πιθανόν να υπάρχει και μαθηματική απόδειξη ότι το πηλίκο των εμβαδών δεν μπορεί ποτέ να είναι μεγαλύτερο του 3. Μια τέτοια απόδειξη θα αναφέρουμε προς το τέλος της εργασίας. Επομένως έχουμε: $\dfrac{P_x + 1}{P_1 + 1} \le 3 \Rightarrow P_x \le 3P_1 + 2$ (4). Ένα ερώτημα που προκύπτει από τα πιο πάνω, είναι αν η εικασία για τους δίδυμους πρώτους, μπορεί να πάψει να είναι εικασία με βάση την ανισότητα (4). Με βάση ένα σταθερό «πλαίσιο» που ισχύει γι' αυτούς. Συγκεκριμένα, θεωρώντας ότι το πλήθος των διδύμων είναι πεπερασμένο και το τελευταίο ζεύγος τους είναι π.χ. $P_\tau, P_\tau + 2$ δια της εις άτοπον απαγωγής να καταλήγουμε, ότι υπάρχει και άλλο ζεύγος διδύμων πέρα από αυτό κ.λπ. Απλώς σαν ερώτημα τίθεται.

Κάποιες άλλες σκέψεις για τους δίδυμους πρώτους αριθμούς, μπορεί να προκύψουν από ένα απλό πρόβλημα ως εξής:

«Μια παρέα από αγόρια και κορίτσια βγήκαν να διασκεδάσουν. Είναι γνωστό ότι τα κορίτσια είναι δύο και ότι ο αριθμός των αγοριών καθώς και το σύνολο των παιδιών, εκφράζεται από πρώτους αριθμούς. Το κάθε αγόρι είχε μαζί του P_α ευρώ και το κάθε κορίτσι P_κ ευρώ. Το P_α και το P_κ είναι πρώτοι αριθμοί. Όλα τα παιδιά μαζί έχουν P ευρώ που είναι και αυτός πρώτος αριθμός. Πόσα είναι τα αγόρια»;

Βλέπουμε εδώ, ότι όλοι οι παράγοντες του προβλήματος είναι πρώτοι αριθμοί, γιατί και το 2 είναι πρώτος (μάλιστα ο μοναδικός άρτιος πρώτος). Ας συμβολίσουμε με Δ_1 τον αριθμό των αγοριών και Δ_2 το σύνολο των παιδιών. Εφ' όσον με βάση το πρόβλημα Δ_1 και Δ_2 πρώτοι, συνεπάγεται ότι Δ_1 και Δ_2 είναι δίδυμοι πρώτοι. Έχουμε το σύστημα των εξισώσεων:

$$2+\Delta_1=\Delta_2$$
$$2P_\kappa+\Delta_1 P_\alpha=P$$

Εύκολα προκύπτει $\Delta_1=\dfrac{P-2P_\kappa}{P_\alpha}$ (5).

Η σχέση (5) συνδέει τέσσερις πρώτους αριθμούς (αν βάλουμε και το 2 πέντε) μεταξύ τους. Ο ένας από αυτούς (Δ_1) είναι το πρώτο μέλος ενός ζεύγους διδύμων πρώτων. Παραδείγματα:

$[\Delta_1=11, P=47, P_\alpha=3, P_\kappa=7]$ ή $[\Delta_1=101, P=1823, P_\alpha=17, P_\kappa=53]$ ή

$[\Delta_1=347, P=3911, P_\alpha=11, P_\kappa=47]$ κ.λπ.

Σε πολλές περιπτώσεις (στα παραδείγματα που χρησιμοποιούμε ισχύει), η παράσταση $P-(P_\alpha+P_\kappa)$ δίνει πρώτο αριθμό. Όχι όμως πάντα.[1] Επίσης μπορεί να έχουμε το εξής: Το ίδιο Δ_1 να προκύπτει από διαφορετικές τιμές των P, P_α, P_κ. Παραδείγματα: $[\Delta_1=3, P=19, P_\alpha=3, P_\kappa=5]$ και $[\Delta_1=3, P=67, P_\alpha=7, P_\kappa=23]$ κ.λπ. Επίσης από την σχέση (5), αν σε δύο τέτοιες τετράδες το Δ_1 είναι ίδιο καθώς και το P_α, εύκολα βρίσκουμε να ισχύει $P'-P''=2\left(P_{\kappa_2}-P_{\kappa_1}\right)$ (6). Η σχέση (5) μπορεί να βοηθήσει να αποδειχθεί ότι $P_x>3P_1+2$ δεν μπορεί να ισχύει ποτέ για ζεύγη διδύμων πρώτων, όπως τα ορίσαμε στην εργασία αυτή. Συγκεκριμένα: Αν για τα P_1 και P_x θεωρήσουμε ίδιο P και P_α (κάτι που μπορεί να ισχύει), καταλήγουμε εύκολα σε άτοπο. Το μηδέν π.χ. μεγαλύτερο από θετικό αριθμό κ.λπ.

Τέλος είναι πολύ πιθανόν, συνδιάζοντας όλα αυτά μεταξύ τους, καθώς και με άλλα δεδομένα για τους δίδυμους πρώτους, να προκύψουν και άλλα ενδιαφέροντα θέματα. Και κάτι της τελευταίας στιγμής για τους δίδυμους πρώτους:

Έστω ότι σε μια διαδοχική εξάδα πρώτων $(P_1,P_2,P_3,P_4,P_5,P_6)$ ισχύει $\dfrac{P_2+P_3+P_5}{P_1+P_4+P_6}<1$ (7).

Έχουμε: $P_2+P_3+P_5<P_1+P_4+P_6 \Rightarrow (P_2-P_1)<(P_4-P_3)+(P_6-P_5)$ (8).

Επομένως αν υποθέσουμε ότι P_3, P_4 είναι δίδυμοι πρώτοι και P_5, P_6 επίσης δίδυμοι πρώτοι, τότε **υποχρεωτικά** και οι P_1, P_2 είναι και αυτοί δίδυμοι πρώτοι. Επίσης με την προϋπόθεση, ότι η ανισότητα αυτή ισχύει στο σύνολο των περιττών πρώτων αριθμών $(P_1\ge 3)$.

Παραδείγματα: Στην διαδοχική εξάδα πρώτων (5,7), (11, 13), (17,19). Επίσης στην διαδοχική εξάδα πρώτων (179,181), (191,193), (197,199). Ας δώσουμε και ένα άλλο παράδειγμα με μεγαλύτερους αριθμούς, όπου στην διαδοχική εξάδα, έχουμε τις τρεις διαδοχικές δυάδες διδύμων πρώτων: (9419, 9421), (9431, 9433), (9437, 9439) κ.λπ. Άρα έχουμε μια βασική αρχή (νόμο) για τους δίδυμους, την οποία μπορούμε να την εκφράσουμε ως εξής: Σε κάθε εξάδα διαδοχικών πρώτων αριθμών, που ανήκει στο σύνολο των περιττών πρώτων και ισχύει η ανισότητα (7), αν ο τρίτος και ο τέταρτος πρώτος είναι δίδυμοι καθώς και ο πέμπτος με τον έκτο επίσης δίδυμοι, τότε **υποχρεωτικά** και ο πρώτος και ο δεύτερος είναι δίδυμοι πρώτοι. (Τριπλέτα διαδοχικών ζευγών, δίδυμων πρώτων αριθμών).

Φυσικά το πηλίκο της σχέσης (7) μπορεί να είναι ίσο ή μεγαλύτερο του 1 σε διάφορες περιπτώσεις. Εμείς απλώς εστιάσαμε το ενδιαφέρον μας στην ειδική περίπτωση, που το πηλίκο είναι μικρότερο της μονάδας.

[1] Μπορούμε να βρούμε και μία σχέση ανισότητας μεταξύ των P, P_α, P_κ ως εξής:
$\Delta_1\ge 3\Rightarrow \Delta_1 P_\alpha\ge 3P_\alpha \Rightarrow 2P_\kappa+\Delta_1P_\alpha\ge 3P_\alpha+2P_\kappa$. Το πρώτο μέλος ισούται με P (από την σχέση 5). Άρα $P\ge 3P_\alpha+2P_\kappa$.

78ος ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΟΣ ΜΑΘΗΤΙΚΟΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ "Ο ΘΑΛΗΣ"

11 Νοεμβρίου 2017

Οι λύσεις των θεμάτων

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση

Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος.

Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$\mathbf{x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0}$$

Λύση

Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.

Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1), (1,1,-1), (3,0,-1), (1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση

Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το

ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.
Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

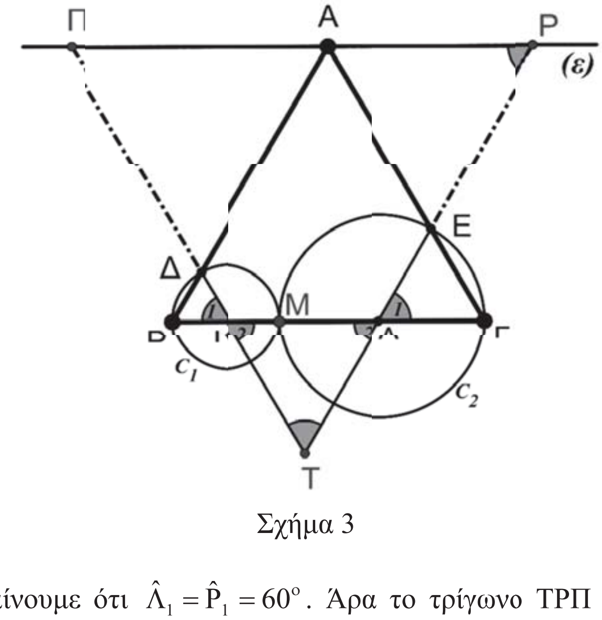
Πρόβλημα 4

Στη πλευρά *ΒΓ* ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, θεωρούμε σημείο Μ (διαφορετικό από το μέσο της ΒΓ) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη ΒΓ. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο Κ του ΜΒ και ακτίνα ΚΒ) τέμνει την ΑΒ στο Δ. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο Λ του ΜΓ και ακτίνα ΛΓ) τέμνει την ΑΓ στο Ε. Οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία Π καιΡ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες ΚΔ και ΛΕ τέμνονται στο σημείο Τ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΠΡΤ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους *α* της πλευράς ΒΓ.

Λύση

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΤΚΛ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισοσκελές (διότι ΚΔ,ΚΒ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\hat{B} = 60^o$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι (τελικά) ισόπλευρο. Οπότε $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 60^o$.

Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2 = 60^o$. Άρα το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:
$$K\Lambda = MK + M\Lambda = \frac{MB}{2} + \frac{M\Gamma}{2} = \frac{MB + M\Gamma}{2} = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον ΑΡ//ΒΓ, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60^o$. Άρα το τρίγωνο ΤΡΠ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60^o$). Το τετράπλευρο ΑΡΛΒ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{B} = \hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60^o$).

Άρα το τρίγωνο ΤΡΠ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς: $\text{ΤΡ} = \text{ΤΛ} + \text{ΛΡ} = \text{ΤΛ} + \text{ΑΒ} = \dfrac{\alpha}{2} + \alpha = \dfrac{3\alpha}{2}$.

Το εμβαδό του τριγώνου ΤΡΠ είναι: $(\text{ΤΡΠ}) = \dfrac{\left(\dfrac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \dfrac{9\alpha^2\sqrt{3}}{16}$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης $x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0$.

Λύση

Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα

$$\left(\rho^3\right)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = \left(3\rho^2 + 4\rho + 2\right) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3$$

$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0$.

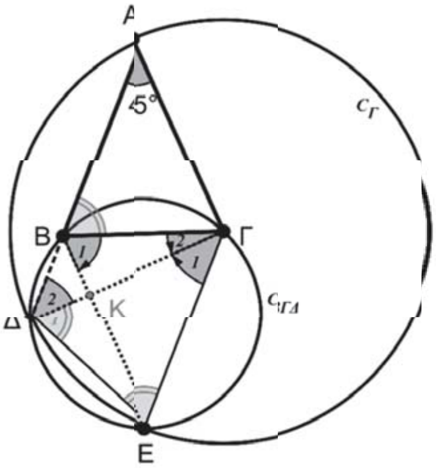
Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_Γ(Γ,ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω $C_{ΒΓΔ}$) τέμνει τον $C_Γ$ στο σημείο Ε Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση

Το τρίγωνο *ΑΓΔ* είναι ισοσκελές, διότι *ΓΑ* και *ΓΔ* είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{Δ}_2 = 45° \qquad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{Δ}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο $C_Γ$. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} = 67{,}5° \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε: $\hat{A}=\hat{\Delta}_2=\hat{\Gamma}_1=45^\circ$.
Άρα ΒΔ//ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.
Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και ΓΔ=ΓΕ (ακτίνες του C_Γ). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.
Άρα $\hat{B}_1=\hat{\Gamma}_1+\hat{\Gamma}_2=67,5^\circ$ και επειδή $\hat{\Gamma}_1=45^\circ$, καταλήγουμε $\hat{\Gamma}_2=22,5^\circ$ και κατά συνέπεια $\hat{B}_1+\hat{\Gamma}_2=67,5^\circ+22,5^\circ=90^\circ$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu\ge 2$, ο αριθμός $A=\dfrac{\nu^7+\nu^6+\nu^5+1}{\nu^2+1}$ είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\nu^7+\nu^6+\nu^5+1=\nu^5\left(\nu^2+1\right)+\left(\left(\nu^2\right)^3+1\right)=\nu^5\left(\nu^2+1\right)+\left(\nu^2+1\right)\left(\nu^4-\nu^2+1\right)$$

$$=\left(\nu^2+1\right)\left(\nu^5+\nu^4-\nu^2+1\right)=\left(\nu^2+1\right)\left[\nu^4\left(\nu+1\right)-\left(\nu+1\right)\left(\nu-1\right)\right]=\left(\nu^2+1\right)\left(\nu+1\right)\left(\nu^4-\nu+1\right).$$

Επομένως έχουμε

$$A=\frac{\nu^7+\nu^6+\nu^5+1}{\nu^2+1}=\left(\nu+1\right)\left(\nu^4-\nu+1\right).$$

Για $\nu\ge 2$ είναι $\nu+1\ge 3$ και $\nu^4-\nu+1=\nu\left(\nu^3-1\right)+1\ge 2\cdot 7+1=15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση

Έστω x,y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy=2(x+y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d=\sqrt{x^2+y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1). Έχουμε ότι $d^2=x^2+y^2=(x+y)^2-2xy\overset{(1)}{=}(x+y)^2-4(x+y)$.
Ισχύει ότι $(x+y)^2\ge 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x-y)^2\ge 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy=8(x+y)$, άρα $(x+y)^2\ge 8(x+y)$, οπότε $x+y\ge 8$. (2)
Θέτουμε $x+y=t$ και τότε $d^2=t^2-4t=(t-2)^2-4\overset{(2)}{\ge}(8-2)^2-4=32$.
Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ υπάρχει $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f\left(\alpha\right)=0 \text{ και } f\left(f\left(x\right)\right)=xf\left(x\right)+\alpha, \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του α και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση

Θέτοντας $x=\alpha$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f\left(f\left(\alpha\right)\right)=\alpha f\left(\alpha\right)+\alpha\Rightarrow f\left(0\right)=\alpha.$$

Για $x=0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f\left(f\left(0\right)\right)=0\cdot f\left(0\right)+\alpha\overset{(1)}{\Rightarrow}f\left(\alpha\right)=\alpha$, οπότε από τη σχέση

$f(\alpha)=0$ έπεται ότι $\alpha=0$.

Για $\alpha=0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f(f(x))=xf(x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x)=x^c$, $c\in\mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f(x^c)=x\cdot x^c \Rightarrow (x^c)^c = x^{c+1} \Rightarrow x^{c^2}=x^{c+1} \Rightarrow c^2=c+1 \Rightarrow c^2-c-1=0 \Rightarrow c=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

Άρα μία συνάρτηση είναι η $f(x)=\begin{cases} 0, \text{ αν } x\le 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, \text{ αν } x>0. \end{cases}$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$\mathbf{x^7+x^6+x^5+1=0}.$$

Λύση

Έχουμε

$$x^7+x^6+x^5+1=x^5(x^2+1)+\left((x^2)^3+1\right)=x^5(x^2+1)+(x^2+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=(x^2+1)(x^5+x^4-x^2+1)=(x^2+1)\left[x^4(x+1)-(x+1)(x-1)\right]=(x^2+1)(x+1)(x^4-x+1).$$

Το πολυώνυμο x^2+1 δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολυώνυμο x^4-x+1 είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\alpha^4-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3-1)+1=0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)+1=0 \Leftrightarrow f(\alpha)+1=0.$$

Όμως για $\alpha\le 0$ ή $\alpha\ge 1$ η παράσταση $f(\alpha)=\alpha(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f(\alpha)+1>0$.

Για $0<\alpha<1$ είναι $\alpha^4>0, -\alpha+1>0$ και $\alpha^4-\alpha+1>0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε: $x^7+x^6+x^5+1=0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x+1)(x^4-x+1)=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\hat{A}=36^o$. Ο κύκλος $C_1(\Gamma,\Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓΑ) τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΒΓΔ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και ότι η ΔΓ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση

Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές, διότι ΓΑ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

$$\hat{A}=\hat{\Delta}_1 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου C_1. Άρα:

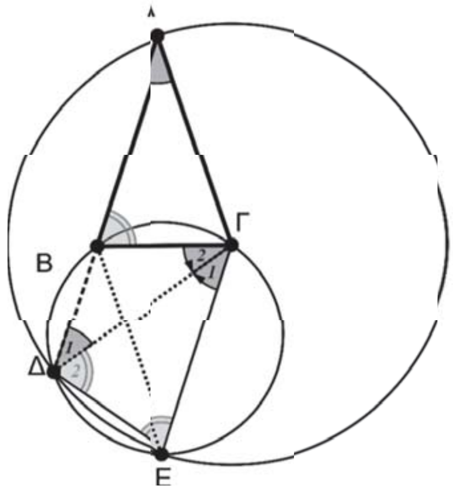
$$\hat{E}=\hat{\Delta}_2 \qquad (2).$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{B}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{E}$. Άρα:

$$\hat{E}=\hat{B} \qquad (3).$$

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) έχουμε: $\hat{A}=\hat{\Delta}_1=\hat{\Gamma}_1=36°$.

Άρα ΒΔ//ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγώνιές του (ΒΕ και ΓΔ) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία Ε και Α ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης ΒΓ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ οπότε η ΑΕ θα είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$.



Σχήμα 5

Από την παραλληλία ΒΔ//ΓΕ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = B\hat{\Gamma}E = 72°$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα. Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma}_1 = 36°$ και η $\hat{\Gamma}_2$ σχηματίζεται από τη ΒΓ, ΔΓ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η ΔΓ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1ος τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9 > 8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow \sqrt{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow \mathbf{4}^{6\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6\cdot\left(\dfrac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2\cdot 3\cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$, που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2ος τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9}\ln 9 > 9^{9^8}\ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $\ln\left(8^{8^9}\ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8}\ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9\ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8\ln 9 + \ln(\ln 8)$.

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι $8^9\ln 8 > 9^8\ln 9 \Leftrightarrow \dfrac{8^9}{9^8} > \dfrac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \dfrac{2^{27}}{3^{16}} > \dfrac{2\ln 3}{3\ln 2} \Leftrightarrow \dfrac{2^{26}}{3^{15}} > \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\dfrac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \dfrac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2\ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\dfrac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \dfrac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.

Ασκήσεις για λύση

Α48. Να προσδιορίσετε όλους τους φυσικούς αριθμούς n για τους οποίους υπάρχουν ακέραιοι α,b τέτοιοι ώστε $\alpha + b = n^2$ και $\alpha^2 + b^2 = n^3$.

Α49. Να προσδιορίσετε όλες τις τριάδες (x, y, z) πραγματικών αριθμών που είναι λύσεις του συστήματος: $x + y - z = -1,\ x^2 - y^2 + z^2 = 1,\ -x^3 + y^3 + z^3 = -1$.

Γ39. Οι πλευρές ΒΓ και ΑΔ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι παράλληλες και οι διαγώνιοι του τέμνονται στο σημείο Ο. Επίσης ισχύουν οι ισότητες ΓΔ = ΑΟ και ΒΓ = ΟΔ. Επιπλέον η ευθεία ΓΑ είναι η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{\Gamma}\Delta$. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι η γωνία $A\hat{B}\Gamma$.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.
συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μανιατοπούλου Αμαλία, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

Ι. τι είναι τα Μαθηματικά;

προλεγόμενα σ' αυτό το τεύχος συνεχίζουμε (όπως σας υποσχεθήκαμε), με ένα ακόμη μέρος της συνέντευξης που παραχώρησε, στη συναδέλφισα Αγγελική Στρατή, ο ομότιμος καθηγητής στο Μαθηματικό Πατρών Κώστας Δρόσος. Λυπούμαστε που, η έλλειψη χώρου, δεν μας επιτρέπει να δημοσιεύσουμε κι άλλες σημαντικές ερωταπαντήσεις.

«Ερώτηση 4 : Μπορείτε να μας αναλύσετε, πιο διεξοδικά, τους ανωτέρω παράγοντες;

α. Εκτεθείσα πλεύρωση (lateralization) του εγκεφάλου

Η πλεύρωση του εγκεφάλου, είναι μια μάλλον "speculative" θεωρία. Παρ' όλο που ο Sperry

The Split Brain Experiments – https://www.nobelprize.org/educational/medicine/split–brain/background.html,

πήρε το Nobel για τα σχετικά πειράματα του. Υπάρχουν και εργασίες που αμφισβητούν την «επιστημονικότητα» της Θεωρίας. Επιτρέψτε μου παρ' όλα αυτά να αμφισβητώ τα αποτελέσματα των εργασιών αυτών, αφού είναι δύσκολο να μετράει κανείς διαδικασίες του αριστερού και δεξιού ημισφαιρίου, όταν μάλιστα κατά τις μετρήσεις τα δυο ημισφαίρια επικοινωνούν μέσω του corpus calosum. Θεωρώ λοιπόν ότι το πρόβλημα είναι ανοικτό. Απέχουμε πολύ από την πλήρη κατανόηση της φύσης της δομικής και συναρτησιακής διαφοράς μεταξύ των ημισφαιρίων.
Πρέπει ακόμα να αναφέρω ότι συμφώνα με την άποψή μου, «η Θεωρία της Πλεύρωσης του εγκεφάλου» έχει μια εξαιρετικά δυνατή εξηγητική δύναμη για την κατανόηση των μαθηματικών καθ' εαυτών. Στη συνέχεια υπάρχει μια μικρή επιλογή σχετικών βιβλίων και εργασιών

Harry A. Whitaker(Ed) *Contemporary Reviews in Neuropsychology.* 1988, Springer–Verlag.

- Bradshaw, J. C. & Nettleton, N. C. 1981 The nature of hemisphere specialization in man. *Beha. Brain Sci.* 4, 51–91.
- K. Hugdahl *Symmetry and asymmetry in the human brain*
- Eran Zaidel, Marco Iacoboni (Eds) The *Parallel Brain: The Cognitive Neuroscience of the Corpus Callosum,* 2003.
- Jamie I.D. Campbell *Handbook of Mathematical Cognition.*
- Michael S. Gazzaniga (Eds.) *Handbook of Cognitive Neuroscience.*
- V. S. Ramachandran *Encyclopaedia of the Human Brain.:*

Αξίζει να αναφέρουμε ότι σχεδόν όλοι οι Ρώσοι Γεωμέτρες, χρησιμοποιούν την πλεύρωση του εγκεφάλου.

β. Ανάγκες πληροφορικής και του αυτοματισμού της μεταβιομηχανικής κοινωνίας

Όπως σημειώσαμε και πιο πάνω, οι ανάγκες αυτοματισμού της παραγωγικής και άλλων διαδικασιών της μεταβιομηχανικής κοινωνίας, οδηγεί αμετάκλητα στην μελέτη της νευροφυσιολογίας του εγκεφάλου, ώστε να διευκολυνθεί η ρομποτική εξομοίωση του ανθρώπου. Ίσως όταν τελικά ο αυτοματισμός ξεφύγει από τα στενά πλαίσια του "κέρδους" του "χρηματοπιστωτικού καπιταλισμού" να δούμε ανθρώπινες κοινωνίες που να προσεγγίζουν «ουτοπίες» που έχουμε ονειρευτεί! (Δείτε π.χ. την τριλογία του Alvin Toffler)
Παρατηρούμε επίσης μια μαζική μετάβαση στην εννοιολογική φύση της Θεωρίας κατηγοριών. Ενδεικτικά αναφέρουμε: ■ Jose L. Fiadeiro *Categories for Software Engineering,* ■ Prakash Panangaden *Probabilistic Relations,* ■ Ernst–Erich Doberkat, *Stochastic Relations: Foundations for Markov Transition Systems.* Chapman & Hall, 2007.:
Μια έρευνα στο internet "Applications of Category Theory", θα αποκαλύψει την πληθώρα των αναφορών.

γ. Μαθηματικά βιολογίας και έμβιων όντων

Τα μοντέρνα μαθηματικά που βασίζονται στη συνολοθεωρία και την δίτιμη λογική, είναι στατικά και αναλυτικά, και ως εκ τούτου ακατάλληλα για την μελέτη έμβιων όντων. Εδώ χρειαζόμαστε δυναμικά και ολιστικά μαθηματικά, όπως είναι η Θεωρία Κατηγοριών και τόπων και τα «πραγματικά μαθηματικά» (αλγεβρική τοπολογία, αλγεβρική γεωμετρία και τα σχετικά) Ας δούμε όμως ποια είναι τα βασικά χαρακτηριστικά αυτής της μετατόπισης. Αυτά τα χαρακτηριστικά περιγράφονται με θαυμάσιο τρόπο στο άρθρο του J.E. Cohen: Mathematics is biology's next microscope, only better; biology is mathematics' nextphysics, only better, *PLOSBiology* 2 (2004) No.12.

«Τα Μαθηματικά είναι το επόμενο μικροσκόπιο της Βιολογίας, μόνο που είναι καλύτερο, η Βιολογία είναι η επόμενη Φυσική των Μαθηματικών, μόνο που είναι καλύτερη»

Στο πιο πάνω άρθρο, διαθέσιμο από την:

https://www.dropbox.com/s/q2x2zyk0iw9wn49/Cohen_Math_%26_Biology.pdf?dl=0,

βρίσκουμε:

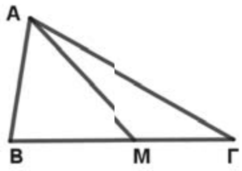
«Η Βιολογία θα υποκινήσει θεμελιωδώς νέα μαθηματικά γιατί η έμβια φύση είναι ποιοτικά πιο ετερογενής (ανομοιόμορφη) από ότι η ανόργανη φύση. Για παράδειγμα, έχει εκτιμηθεί ότι υπάρχουν 2000–5000 είδη πετρωμάτων και ορυκτών στο επιφανειακό στρώμα της γης, τα οποία έχουν παραχθεί από τα περίπου εκατό στοιχεία που εμφανίζονται στη φύση. Αντίθετα υπάρχουν πιθανώς μεταξύ 3 και 100 εκατομμυρίων βιολογικά είδη στη γη που έχουν παραχθεί από ένα μικρό ποσοστό των στοιχείων που εμφανίζονται στη φύση.

Αν τα είδη των πετρωμάτων και ορυκτών μπορούσαν έγκυρα να συγκριθούν με τα είδη των ζώντων οργανισμών, ο έμβιος κόσμος έχει τουλάχιστον εκατονταπλάσια ποικιλομορφία από ότι ο ανόργανος. Για να αντιμετωπιστεί αυτή η υπερποικιλομορφία της ζωής σε κάθε επίπεδο πραγματικότητας της χωρικής και χρονικής οργάνωσης θα χρειαστούν θεμελιώδεις εννοιολογικές εξελίξεις στα μαθηματικά».

ΙΙ. "Ευκλείδεια Γεωμετρία, αγάπη μου"

τρίτη συνέχεια ***«Πως μετατρέπεται η Επιπεδομετρία σε Στερεομετρία» (Αργύρη Καντεμίρη)***

προλεγόμενα συνεχίζουμε, με την τρίτη (και τελευταία) συνέχεια από το ενδιαφέρον βιβλίο του Αργύρη Καντεμίρη **«Πως μετατρέπεται η Επιπεδομετρία σε Στερεομετρία»**. Λόγω έλλειψης διαθέσιμου χώρου, σας παρουσιάζουμε μόνο τις εκφωνήσεις. Σε ευθετώτερο χρόνο θα δώσουμε και τις αποδείξεις



σχήμα (α)

1. το θεώρημα Stewart στο επίπεδο

«Δια το ευθύγραμμον τμήμα ΑΜ, το οποίον συνδέει την κορυφήν Α, τριγώνου ΑΒΓ, με τυχόν σημείον Μ της απέναντι πλευράς ΒΓ, ισχύει η σχέσις:

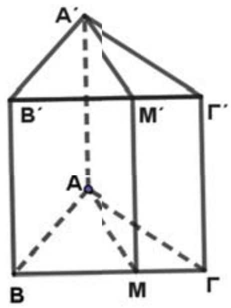
$$AB^2.M\Gamma + A\Gamma^2.BM - AM^2.B\Gamma = MB.M\Gamma.B\Gamma \text{ »} \quad \text{σχ. (α)}$$

2. το θεώρημα Stewart στον χώρο

«Δια το επίπεδον τμήμα, το οποίο διέρχεται εκ της ακμής ΑΑ΄ ορθού τριγωνικού πρίσματος ΑΒΓΑ΄Β΄Γ΄ και τέμνει την απέναντι έδραν αυτού κατά το ευθ. τμήμα ΜΜ΄ ισχύει η σχέση:

$$E^2_{AB'}\cdot E_{M\Gamma'} + E^2_{A\Gamma'}\cdot E_{BM'} - E^2_{AM'}\cdot E_{B\Gamma'} = E_{BM'}\cdot E_{M\Gamma'}\cdot E_{B\Gamma'} \text{ »} \quad \text{σχ. (β)}$$

{όπου: $E_{AB'}$=(ΑΒΒ΄Α΄), $E_{M\Gamma'}$=(ΜΓΓ΄Μ΄), $E_{A\Gamma'}$=(ΑΓΓ΄Α΄), $E_{BM'}$=(ΒΜΜ΄Β΄), $E_{AM'}$=(ΑΜΜ΄Α΄), $E_{B\Gamma'}$=(ΒΓΓ΄Β΄) }



σχήμα (β)

ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

Ποιος έγραψε το κείμενο, απόσπασμα του οποίου σας παραθέτουμε;

«...Οι πτυχιούχοι των μαθηματικών και ως προς την μόρφωσιν και ως προς τας υπ᾽ αυτών ως εκπαιδευτικών λειτουργών παρεχομένας εις την Πολιτείαν υπηρεσίας ουδόλως υστερούν (ίνα μη είπομεν ότι υπερέχουν) των εκ των Πολυτεχνικών και των λοιπών Πανεπιστημιακών ή άλλων Σχολών προερχομένων...»

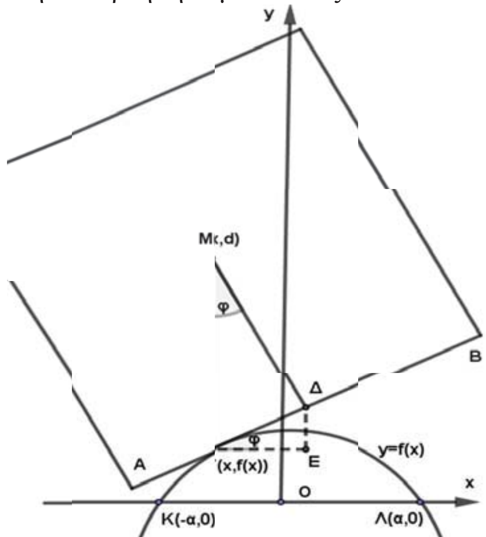
[*η απάντηση στο τέλος της στήλης*]

ΙΙΙ₁. μια χρωστούμενη απόδειξη στο προηγούμενο τεύχος (Νο 105), σας είχαμε υποσχεθεί ότι, στο τεύχος τούτο, θα δίναμε τη μαθηματική απόδειξη για τη δυνατότητα "κίνησης" του ποδήλατου με τετράγωνες ρόδες (από λήμμα: «Αυτό, το ξέρατε;»).

απάντηση το ερώτημα τέθηκε στις παν–ιταλικές εξετάσεις (2017) στο μάθημα των Μαθηματικών. Συγκεκριμένα ζητήθηκε από τους μαθητές να επιβεβαιώσουν ότι ένα ποδήλατο με τετράγωνους τροχούς, με πλευρά τετραγώνου ίση με 2 (αυθαίρετες μονάδες), μπορεί να κινηθεί άνετα σε μια περιοδικά επαναλαμβανόμενη επιφάνεια που καθορίζεται από την *ανεστραμμένη αλυσοειδή καμπύλη* (την είδαμε στο τεύχος, στη σελ. 32) που είναι γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{2} - \dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

Το πρώτο ζητούμενο ήταν να υπολογιστούν τα σημεία στα οποία η συνάρτηση τέμνει το άξονα x. Αυτό υπολογίζεται εύκολα θέτοντας: $f(\alpha) = 0 = \sqrt{2} - \dfrac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{2}$

απ' όπου προκύπτει: $\alpha = \ln\left(\sqrt{2}+1\right)$



σχήμα (γ)

Στη συνέχεια αρκεί να δείξουμε ότι οι εφαπτόμενες της καμπύλης C_f στα σημεία, με τετμημένες: x=α και x=–α, είναι κάθετες μεταξύ τους (έτσι ώστε οι γωνίες της τετράγωνης ρόδας να «εφαρμόζουν» στα σημεία που επαναλαμβάνεται η συνάρτηση).

Οι κλίσεις των ευθειών αυτών είναι $\lambda_1 = f'(\alpha)$ και $\lambda_2 = f'(-\alpha)$.

Αν κάνετε τις πράξεις θα δείτε ότι $\lambda_1.\lambda_2 = -1$, επομένως οι εφαπτόμενες είναι κάθετες μεταξύ τους.

Το επόμενο ερώτημα ζητούσε να δειχθεί ότι το μήκος του τόξου της ανεστραμμένης αλυσοειδούς, από x=α έως x= –α, ισούται με την πλευρά του τετραγώνου. Αρκεί να δειχθεί ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha}\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx = 2$ (υπενθυμίζεται ότι η πλευρά του τετραγώνου δίνεται ίση με 2).

[πηγή: *«https://physicsgg.me/2017/06/28/σε–τι–είδους–επιφάνεια–κυλάει–άνετα–πο/»*]

IV. "Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν–ερωτούν"

1ο θέμα: "Ιχνηλατώντας τα εμπνευσμένα μονοπάτια του M. C. Escher", της Γεωργίας Μαραγκού

προλεγόμενα κατά τη διάρκεια των εργασιών του 34ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας της Ε.Μ.Ε στη Λευκάδα παρουσιάστηκε η εργασία *"Ιχνηλατώντας τα εμπνευσμένα μονοπάτια του M. C. Escher"*. Η εισηγήτρια κ. Μαραγκού Γεωργία, μαθηματικός στο 1ο Γυμνάσιο Σκάλας Ωρωπού Αττικής, αναφέρθηκε στην ετήσια καθοδήγηση των μαθητών της από την ίδια ώστε να «...ακολουθήσουν τα μονοπάτια αυτού του μαέστρου του παράδοξου...», και στην επίβλεψη επίσης των έργων τους στη συνέχεια.

«...Δεν υπάρχει περίπτωση να γίνει λόγος για «Τέχνη και Μαθηματικά» χωρίς αναφορά στον Escher. Υπήρξε ένας από τους σημαντικότερους εικαστικούς καλλιτέχνες του αιώνα που πέρασε.

Πράγματι οι μαθητές στο "Μαθηματικό Εργαστήρι" που έχει στήσει η διδάσκουσα εδώ και πλέον έξι διαδοχικά σχολικά έτη στη σχολική μονάδα παράλληλα με τη διδασκαλία του μαθήματος. Ετοίμασαν μια τρίωρη παρουσίαση των εργασιών τους, αξιοποιώντας δυναμικά λογισμικά Γεωμετρίας και συνοδεύοντας όπως και τα *προηγούμενα χρόνια και τη φετινή 6η Έκθεσή τους Μαθηματικών με ζωντανή μουσική αφού ο Πυθαγόρας ήταν αυτός που εδώ και πλέον 26 αιώνες ανακάλυψε τους νόμους της αρμονίας. Η "6η Έκθεση Μαθηματικών", λοιπόν, αποτέλεσε και παράδειγμα διαθεματικότητας βρίσκοντας το απόγειό της στο "πάντρεμα" των Μαθηματικών με τη ζωντανή μουσική που απέδωσαν οι μαθητές με αρμόνιο, ηλεκτρική κιθάρα, ντραμς και τραγούδι, όπως είχαν κάνει και σε προηγούμενες έχοντας αναλάβει την παρουσίαση με θέμα "Η μουσική και τα κλάσματα".*

Η συναδέλφισα μας υπενθυμίζει ότι ο M.C. Escher είχε πει: *«Με το να αντιμετωπίζω με ζέση τα αινίγματα που μας περιβάλλουν και με το να εξετάζω και να αναλύω τις παρατηρήσεις τις οποίες είχα κάνει, κατέληξα στη σφαίρα αρμοδιότητας των Μαθηματικών. Αν και παντελώς αμέτοχος οποιασδήποτε εκπαίδευσης ή γνώσης θετικών επιστημών, συχνά ανακαλύπτω ότι έχω περισσότερα κοινά σημεία με τους μαθηματικούς από ότι με συναδέλφους μου»...*

2ο θέμα: Gottfried Wilhelm Leibniz (1.7.1646–14.11.1716), του Χάρη Τσουλουχά

προλεγόμενα ο συνεργάτης της στήλης Χάρης Τσουλουχάς (από Φρανκφούρτη), μας έστειλε ένα σημείωμα, με αναφορά στον **Gottfried Wilhelm Leibniz, ιδωμένο από μια διαφορετική οπτική. Λόγω έλλειψης χώρου, το δημοσιεύουμε σε δυο συνέχειες.**

πρώτο μέρος

«Το 2016 συμπληρώθηκαν 300 χρόνια από τον θάνατο του Leibniz. Ο Leibniz υπήρξε εκπρόσωπος του ορθολογισμού του 17ου αιώνα, μια πολυσχιδής προσωπικότητα με καθοριστική συμβολή στην φιλοσοφία, τα μαθηματικά, τη λογική, τη φυσική, τη μηχανική, θεμελιωτής μαζί με τον Newton του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού, πρωτοπόρος της συνδυαστικής ανάλυσης, κατασκευαστής υπολογιστικής μηχανής. Ο Leibniz θεωρείται ένας «δύσκολος» φιλόσοφος, όχι τόσο λόγω ενδεχόμενων ασαφειών της σκέψης του, αλλά διότι οι ευρείες εγκυκλοπαιδικές του γνώσεις, οι οποίες εκτείνονται σε ολόκληρο το φιλοσοφικό του σύστημα, αναγκάζουν τον εκάστοτε μελετητή του έργου του να ασχοληθεί με τις ξεχωριστές επιστήμες, τα μαθηματικά, την φυσική και ιδίως με την λογική.

Η μεγάλη σύλληψη του Leibniz είναι η δημιουργία μιας γλώσσας συμβόλων με την οποία θα ήταν δυνατό να εκφραστούν όλες οι βασικές έννοιες, ενώ οι σύνθετες έννοιες θα εκφράζονταν με έναν συνδυασμό συμβόλων. Έτσι σε κάθε βασική έννοια αντιστοιχίζεται ένας χαρακτηριστικός πρώτος αριθμός, ενώ μια σύνθετη έννοια εκφράζεται ως το γινόμενο των πρώτων αριθμών που αντιστοιχούν στις βασικές έννοιες που την συναπαρτίζουν (το 1678). Επιτυγχάνεται έτσι μια αμφιμονοσήμαντη («1–1») αντιστοιχία εννοιών και αριθμών (συμβόλων), οπότε οι συλλογισμοί ανάγονται σε υπολογισμούς (το 1686). Η γλώσσα αυτή, η characteristica universalis, της οποίας το λεξικό θα περιείχε τους χαρακτηριστικούς αριθμούς όλων των εννοιών, θα ήταν εύκολο να διδαχτεί και θα μπορούσε να χρησιμεύσει στην παραγωγή νέας γνώσης. Πρέπει να σημειωθεί ότι τέτοιες αναζητήσεις απασχολούσαν τους φιλοσόφους του 17ου αιώνα (λ.χ. τον Descartes το 1629).

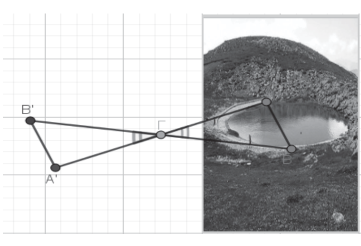
Για τον Leibniz κάθε ανθρώπινη σκέψη επιτυγχάνεται μέσω κάποιων συμβόλων. Θεωρεί δηλαδή ο Leibniz ότι τα σύμβολα είναι αναγκαία για την σκέψη, και θέλει να διερευνήσει τη σχέση ανάμεσα στην μέσω εννοιών γνώση και των συμβόλων που την εκφράζουν, ώστε να καταστεί δυνατός ο υπολογιστικός χειρισμός των σκέψεων (η νοητική διαδικασία είναι υπολογισμός και για τον Hobbes) και η παραγωγή νέας γνώσης. Αυτό το φιλόδοξο πρόγραμμα, όπως και άλλες απόπειρες του Leibniz για δημιουργία παραγωγικού συστήματος στο πλαίσιο της συμβολικής γλώσσας δεν ολοκληρώθηκε. Σήμερα μολονότι είναι γνωστό (Kurt Gödel) ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο, το λεγόμενο «πρόγραμμα Leibniz» εξακολουθεί να παρουσιάζει ενδιαφέρον για τους ασχολούμενους με την επιστήμη της λογικής και την ιστορία της. Ο Gottlob Frege αποτιμώντας την πολύπλευρη προσφορά του Leibniz γράφει το 1880: «Ο Leibniz διέσπειρε στα γραπτά του μια τέτοια αφθονία σπερμάτων σκέψης, που είναι ζήτημα αν μπορεί κάποιος άλλος να τον ανταγωνιστεί. Ένα μέρος αυτών εξελίχθηκε ήδη στην εποχή του, ένα άλλο έπεσε στην λησμονιά, αργότερα ανακαλύφθηκε εκ νέου και έτυχε περαιτέρω ανάπτυξης. Αυτό μας δίνει το δικαίωμα να προσδοκούμε ότι κάποια στοιχεία στα έργα του, τα οποία φαινομενικά τώρα βρίσκονται νεκρά και θαμμένα, θα γιορτάσουν αργότερα την ανάστασή τους».

4ο θέμα: "εφαρμοσμένη" Γεωμετρία Α΄ Λυκείου, του Στέργιου Τουρναβίτη

προλεγόμενα ο φίλος της στήλης Στ. Τουρναβίτης (Αθήνα), μας έστειλε ένα σημείωμα στο οποίο προτείνει τέσσερα προβλήματα, για να πειστούν τα παιδιά της Α΄ Λυκείου, πως η Γεωμετρία που μαθαίνουν μπορεί να τα βοηθήσει, μεταξύ άλλων, σε θέματα του κήπου τους και όχι μόνο. Γράφει:

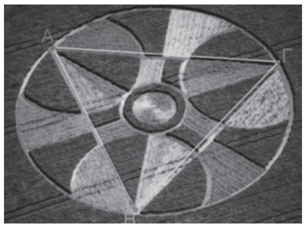
« Ένας από τους στόχους αυτής της εργασίας, είναι να αναδείξουμε τη συμβολή της Γεωμετρίας και της Αναλυτικής Γεωμετρίας στην επίλυση προβλημάτων από την καθημερινή ζωή που μερικά από αυτά ενδεχομένως να έχουν εφαρμογή σε άλλους τομείς επιστημών π.χ. Τοπογραφία, Φυσική κ.ά.

1ο πρόβλημα. Ένας τοπογράφος θέλει να μετρήσει την απόσταση ΑΒ δύο σημείων που βρίσκονται στις απέναντι όχθες μιας λίμνης. Για τον σκοπό αυτό τοποθετεί δύο πασσάλους–δείκτες στα σημεία Α, Β και ένα δείκτη Γ τέτοιο ώστε οι αποστάσεις ΓΑ και ΓΒ να μπορούν να μετρηθούν στην στεριά. Στη συνέχεια παίρνει στην προέκταση της ΓΒ ευθύγραμμο τμήμα ΓΒ΄=ΓΒ και στην προέκταση της ΓΑ ευθύγραμμο τμήμα ΓΑ΄=ΓΑ. Με ποιο τρόπο μπορεί να αξιοποιηθεί αυτό το σχήμα για να μετρηθεί η απόσταση ΑΒ;



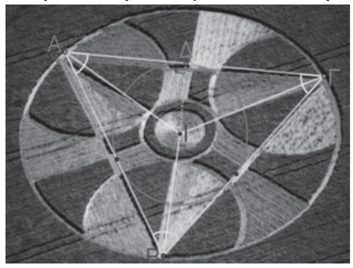
απάντηση τα τρίγωνα ΑΓΒ και Α΄ΓΒ΄ από το 1^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΠΓΠ) είναι ίσα γιατί έχουν δύο πλευρές (ΑΓ=Α΄Γ, ΓΒ=ΓΒ΄) και τις περιεχόμενες γωνίες ($B\hat{\Gamma}A = B\hat{\Gamma}A'$) αντίστοιχα ίσες. Από την ισότητα των τριγώνων προκύπτει ότι ΑΒ=Α΄Β΄.
Έτσι ο τοπογράφος αντί να μετρήσει την απόσταση ΑΒ, μετράει την ίση με αυτήν χερσαία απόσταση Α΄Β΄ και βρίσκει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

2^{ο} *πρόβλημα.* στα σημεία Α, Β, Γ έχουμε εγκαταστήσει 3 αισθητήρες υγρασίας του εδάφους και θέλουμε επίσης να εγκαταστήσουμε σε κάποιο σημείο του κήπου έναν αναμεταδότη, ο οποίος να λαμβάνει με την ίδια ένταση το σήμα από τα σημεία Α, Β, Γ και να το αναμεταδίδει σ' έναν server. Θέλουμε με άλλα λόγια ο αναμεταδότης αυτός να απέχει εξίσου από τα Α, Β, Γ. Μπορείτε να βοηθήσετε τον ηλεκτρονικό που συνεργάζεται με τον γεωπόνο να εντοπίσει το σημείο αυτό;



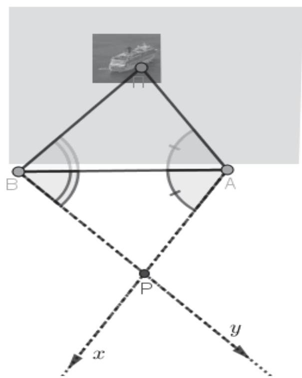
απάντηση το σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ, βρίσκεται εσωτερικά αυτού και είναι το περίκεντρό του (κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου)

3^{ο} *πρόβλημα.* εσωτερικά του προηγούμενου τριγωνικού παρτεριού ΑΒΓ θέλουμε να φυτέψουμε τριαντάφυλλα στην περιφέρεια ενός κύκλου που να εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου και το κέντρο αυτού του κύκλου να ισαπέχει από τις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ. Πως θα προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου;



απάντηση το κέντρο του κύκλου θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου (έγκεντρο του τριγώνου) και ακτίνα η απόσταση του Ι από μία πλευρά του. Το σημείο τομής των τριών διχοτόμων θα ισαπέχει από τις πλευρές και των τριών γωνιών–πλευρών του τριγώνου.

4^{ο} *πρόβλημα.* Ένας παρατηρητής για να μετρήσει την απόσταση ΑΠ ενός πλοίου Π από ένα σημείο Α της ακτής, θεωρεί ένα δεύτερο σημείο Β της ακτής και με ένα γωνιόμετρο μετρά τις γωνΠΑΒ, γωνΠΒΑ. Στη συνέχεια μετρά τις γωνΒΑx, γωνΑΒy, ίσες αντίστοιχα με τις προηγούμενες. Μπορείτε να εξηγήσετε σε τι αποβλέπει καθώς και πως μπορεί να υπολογίσει την απόσταση ΑΠ με την μέθοδο αυτή;



απάντηση τα τρίγωνα ΠΑΒ και ΡΑΒ είναι ίσα από το 2^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων (ΓΠΓ) γιατί έχουν: γωνΠΑΒ=γωνΒΑΡ, ΑΒ κοινή, γωνΠΒΑ=γωνΑΒΡ. Επομένως θα έχουν και τα υπόλοιπα στοιχεία τους ίσα, άρα ΑΠ=ΑΡ**.** Η συνέχεια είναι να μετρήσει την χερσαία απόσταση ΑΡ και είναι σαν να μετράει την ίδια απόσταση από το σημείο Α μέχρι το πλοίο Π.

[Βιβλιογραφία: «Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου», έκδ. ΟΕΔΒ, 1999]

V. Ειδήσεις – ειδησούλες

1^{η}. *οι μπαλαρίνες του κλασικού μπαλέτου κι η Γεωμετρία*

Ο Γ. Καρουζάκης (Θαλής+Φίλοι), μας ξάφνιασε ευχάριστα, αναρτώντας ένα ευρηματικό video για τη ...σχέση κλασικού μπαλέτου και Γεωμετρίας. Γράφει, μεταξύ άλλων: «Η ιαπωνική ομάδα σχεδιαστών EUPHRATES, συνδυάζοντας στοιχεία από τη φυσική και την εικονική πραγματικότητα, δημιούργησε ένα βίντεο στο οποίο οι κινήσεις της μπαλαρίνας Kurimu Urabe των *Μπαλέτων Μπολσόι* συνυπάρχουν με τη γεωμετρική αντανάκλασή τους και αλληλοεπιδρούν με την χορεύτρια». Το video θα το βρείτε στη διεύθυνση:
https://thalesandfriends.org/el/2017/11/15/horografia–geometrikon–sximaton/

2^{η}. *Η προέλευση του "μηδέν"*

Η Γιώτα Ζώτου (απόφοιτος του Τμήματος Εφαρμοσμένων Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης), μας παραπέμπει στη διεύθυνση: *www.geekd.gr/επιστήμες/μελέτη–σε–αρχαίο–κείμενο–αποκαλύπτει–νέα–στοιχεία–για–την–προέλευση–του–μηδενός/* , όπου υπάρχει σημείωμα για μια νέα έρευνα που πραγματοποιήθηκε από την Bodleian βιβλιοθήκη του Πανεπιστημίου της Οξφόρδης, πάνω σ' ένα αρχαίο κείμενο, το οποίο αποκαλύπτει νέα στοιχεία για την προέλευση του μηδενός

3η. *John Forbes Nash για πάντα...*

Από την καλή φίλη Ευαγγελία Λώλη λάβαμε ένα σύντομο φωτογραφικό άλμπουμ, αφιερωμένο στον, τιμημένο με το Nobel, μεγάλο μαθηματικό John Forbes Nash. Στη φωτογραφία ο John F. Nash (γνωστός και ως ...."Beautiful Mind"), κατά την αποφοίτησή του από το Princeton το 1950.
[πηγή: https://newsly.social/22988/11–amazing–facts–about–nobel–laureate]

4η. *Μια αισιόδοξη διαβεβαίωση*

Ο συνάδελφος Νίκος Κανέλλος (Σκύρος), μας διαβεβαιώνει πως:
- τα Μαθηματικά είναι ένα ιδιαίτερο μάθημα.
- κάποιοι υποστηρίζουν ότι αποτελεί μια ξεχωριστή γλώσσα.
- Έχουν το δικό τους "αλφάβητο", τη δική τους "γραμματική" και το δικό τους "συντακτικό".
- Βέβαια, η "προφορά" του καθενός εξαρτάται από το πόσο καλά θα εξασκηθεί.

Εσείς συμφωνείτε;
[πηγή:http://www.eviaportal.gr/content.asp?ID=49335]

5η. *Η διδακτορική διατριβή του Stephen W. Hawking*

Τον περασμένο Οκτώβριο, το *Πανεπιστήμιο του Cambridge* δημοσιοποίησε και διέθεσε ελεύθερα στο Διαδίκτυο τη διδακτορική διατριβή του Stephen Hawking. *Σε μια σπάνια φωτογραφία, ο μεγάλος Stephen W. Hawking σε ηλικία 12 ετών*
[πηγή: https://thalesandfriends.org/el/2017/12/19/i–diatrivi–tou–hawking–sto–diadiktio/]

6η. *Το Βραβείο Νόμπελ, για το 2017*:

- ***Φυσικής,*** απονεμήθηκε στους φυσικούς Kip Thorne, Rainer Weiss και Barry Barish, για την καθοριστική συνεισφορά τους στην ανάπτυξη του παρατηρητηρίου LIGO και στην ανίχνευση των βαρυτικών κυμάτων —μια θεωρία που πρώτος διατύπωσε ο Άλμπερτ Αϊνστάιν.
- ***Ιατρικής και Φυσιολογίας,*** μοιράζονται φέτος τρεις επιστήμονες, οι Τζέφρι Χολ, Μάικλ Ρόσμπας και ο Μάικλ Γιανγκ για τις ανακαλύψεις τους στους μοριακούς μηχανισμούς που ελέγχουν το βιολογικό ρολόι φυτών και ζώων.
- ***Ειρήνης,*** στη «Διεθνή Εκστρατεία για την Κατάργηση των Πυρηνικών Όπλων» (ICAN)**.** Η ICAN συγκροτήθηκε το 2007 στη Βιέννη, στο περιθώριο διεθνούς διάσκεψης της Συνθήκης Μη Διάδοσης των Πυρηνικών Όπλων, και απαρτίζεται από 468 οργανώσεις σε 101 χώρες.

7η βαρυτικά κύματα

Στη διεύθυνση http://www.lifo.gr/print/buzz/172928, αλιεύσαμε την παρακάτω είδηση:
1. Δύο αστέρες νετρονίου συγκρούστηκαν κι έφεραν επανάσταση στην αστρονομία Οι επιστήμονες κήρυξαν φέτος την επίσημη έναρξη της εποχής των βαρυτικών κυμάτων στην αστρονομία. Η ανίχνευσή τους έγινε μόλις φέτος τον Οκτώβριο, όταν διαπιστώθηκε ότι το συγκεκριμένο φαινόμενο δεν προέρχεται από τις μαύρες τρύπες αλλά από τη σύγκρουση δύο άστρων νετρονίου.

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε; "

Είναι απόσπασμα από υπόμνημα που υπόβαλε το προεδρείο της ΕΜΕ, στους Υπουργούς της Παιδείας, της Εθνικής Οικονομίας, καθώς και στον Πρόεδρο της Βουλής, το 1919 (ένα χρόνο μετά την ίδρυσή της). Τη χρονιά εκείνη, Πρόεδρος και Γεν. Γραμματέας ήταν οι καθηγητές Νικόλαος Χατζηδάκης και Νείλος Σακελλαρίου, αντίστοιχα *[πηγή: «Υπόμνημα της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας περί οικονομικής βελτιώσεως της θέσεως των Μαθηματικών καθηγητών», υποβλήθηκε στις 29–11–19]*

Υπεύθυνοι τάξης: Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Εξισώσεις - Ανισώσεις

των Κωνσταντίνου Λάττα και Φραγκίσκου Γ. Μπερσίμη

Άσκηση 1η: Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση (1ου βαθμού). $\frac{x-2}{3}-\left[\frac{1-x}{4}-\left(\frac{x-3}{12}-1\right)+2\right]=2 \quad (1)$

Λύση: Πρώτα κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων και στη συνέχεια απαλοιφή των παρονομαστών με ΕΚΠ των παρονομαστών ίσο με 12. Έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \frac{x-2}{3}-\left(\frac{1-x}{4}-\frac{x-3}{12}+1+2\right)=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-2}{3}-\frac{1-x}{4}+\frac{x-3}{12}-3=2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12\cdot\frac{x-2}{3}-12\cdot\frac{1-x}{4}+12\cdot\frac{x-3}{12}=12\cdot 5\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot(x-2)-3\cdot(1-x)+x-3=60\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-8-3+3x+x-3=60\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x=74\Leftrightarrow x=\frac{74}{8}\Leftrightarrow x=\frac{37}{4}$$

Συντομότερα: Θα μπορούσαμε να πολλαπλασιάσουμε μόνο τους αριθμητές με το πηλίκο του ΕΚΠ με κάθε παρονομαστή. Η απλοποίηση που επιτυγχάνεται έτσι φαίνεται καθαρά στην 3η άσκηση.

Άσκηση 2η: Να λυθεί η παρακάτω παραμετρική εξίσωση: $\lambda^2(x-1)-x(5\lambda-3)+4=-5-3x$

Λύση: Είναι: $\lambda^2x-\lambda^2-5\lambda x+3x+4=-5-3x\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lambda^2x-5\lambda x+3x+3x=\lambda^2-5-4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2x-5\lambda x+6x=\lambda^2-9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(\lambda^2-5\lambda+6)=\lambda^2-9 \quad (1)$$

Παρατηρούμε ότι:

$\lambda^2-5\lambda+6=0\Leftrightarrow(\lambda-2)(\lambda-3)=0\Leftrightarrow\lambda\in\{2,3\}$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Για $\lambda=2$ έχουμε:

  $(1)\Leftrightarrow x\cdot 0=2^2-9\Leftrightarrow 0x=-5,$ αδύνατη εξίσωση
- Για $\lambda=3$ έχουμε:

  $(1)\Leftrightarrow x\cdot 0=(-3)^2-9\Leftrightarrow 0x=0,$ αόριστη εξίσωση και μάλιστα ταυτοτική.
- Για $\lambda\neq 2$ και $\lambda\neq 3$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow x=\frac{\lambda^2-9}{(\lambda-2)(\lambda-3)}\Leftrightarrow x=\frac{(\lambda-3)(\lambda+3)}{(\lambda-2)(\lambda-3)}\Leftrightarrow x=\frac{\lambda+3}{\lambda-2}$$

Παρατήρηση: Το γεγονός ότι για λ=3 βρήκαμε α=β=0 μας βεβαιώνει ότι το κλάσμα $\frac{\beta}{\alpha}$ απλοποιείται με $(\lambda-3)$

Άσκηση 3η: Να λυθεί η παρακάτω κλασματική εξίσωση: $\frac{4(x-1)}{x+1}+\frac{2-3x}{x+3}=\frac{11x+2}{x^2+4x+3} \quad (1)$

Λύση: Έχουμε: $p_1=x+1,\ p_2=x+3,$

$p_3=x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

Άρα ΕΚΠ $(p_1,p_2,p_3)=(x+1)(x+3)$

Για να ορίζεται η (1) πρέπει και αρκεί $x\neq-1$ και $x\neq-3$. Έχει δηλαδή σύνολο ορισμού το $A=\mathbb{R}-\{-1,-3\}$. Στο Α έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow \overset{x+3}{\frac{4(x-1)}{x+1}}+\overset{x+1}{\frac{2-3x}{x+3}}=\overset{1}{\frac{11x+2}{(x+1)(x+3)}}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x-1)(x+3)+(x+1)(2-3x)=11x+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2-x+3x-3)+2x+2-3x^2-3x=11x+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+12x-12+2x+2-3x^2-3x=11x+2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-12=0 \quad (2)$$

Η εξίσωση (2) έχει διακρίνουσα

$\Delta=(-4)^2-4\cdot1\cdot(-12)=64>0$ και ρίζες τις

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{4+8}{2}=\frac{12}{2}=6$ και

$x_2=\frac{4-8}{2}=\frac{-4}{2}=-2$ Αυτές είναι και λύσεις της (1), αφού ανήκουν στο Α.

Άσκηση 4η: Να λυθεί η παρακάτω εξίσωση.

$$|x^2-1|+|x^2-3x+2|=0$$

Λύση: $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-1=0\\x^2-3x+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(x+1)=0\\(x-1)(x-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\in\{1,-1\} \text{ και } x\in\{1,2\}\Leftrightarrow x\in\{1,-1\}\cap\{1,2\}\Leftrightarrow x=1$$

Άσκηση 5η: Αν x_1,x_2 οι ρίζες της εξίσωσεις $x^2-5x+3=0$ να υπολογισθούν οι παραστάσεις :i) x_1+x_2 ii) x_1x_2 iii) $x_1^2+x_2^2$ iv) $x_1^3+x_2^3$

Λύση: Προφανώς $\Delta=25-12=13>0.$ Άρα η εξίσωση έχει ρίζες και σύμφωνα με τους τύπους VIETA ισχύουν: **i)** $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}=-\frac{(-5)}{1}=5$ και

ii) $x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{3}{1}=3$

iii) $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=5^2-2\cdot3=25-6=19$

iv) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1\cdot x_2+x_2^2)=5\cdot(19-3)=5\cdot16=80$

Άσκηση 6η: α) Να λυθεί η ανίσωση

$$\frac{2x+1}{3}-\frac{2x-2}{3}>1+\frac{x-1}{4}\quad(1)$$

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (2), (3) που ακολουθούν. $\frac{2x+6}{4}>x-\frac{3x+1}{2}$ **(2)** **και** $2(x+4)-\frac{3x+15}{2}\geq0$ **(3).**

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων (1), (2), (3).

Λύση: α) Για την (1) έχουμε: ΕΚΠ(3, 4)=12 οπότε: $(1)\Leftrightarrow 12\frac{2x+1}{3}-12\frac{2x-2}{3}>12\cdot1+12\frac{x-1}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(2x+1)-4(2x-2)>12+3(x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 8x+4-8x+8>12+3x-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x>-4-8+12-3\Leftrightarrow -3x>-3\Leftrightarrow x<\frac{-3}{-3}\Leftrightarrow x<1$

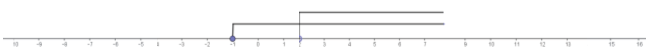
β) Για την (2) έχουμε: ΕΚΠ(2,4) = 4 οπότε:

$(2)\Leftrightarrow 4\frac{2x+6}{4}>4x-4\frac{3x+1}{2}\Leftrightarrow$

$2x+6>4x-2(3x+1)\Leftrightarrow 2x+6>4x-6x-2\Leftrightarrow$

$2x-4x+6x>-6-2\Leftrightarrow 4x>-8\Leftrightarrow x>-\frac{8}{4}\Leftrightarrow x>-2$

Για την (3) έχουμε: ΕΚΠ(1,2) = 2 οπότε



$(3)\Leftrightarrow 2\cdot2(x+4)-2\frac{3x+15}{2}\geq2\cdot0\Leftrightarrow$

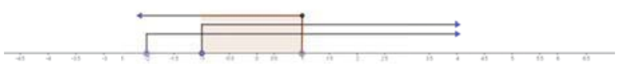
$4(x+4)-(3x+15)\geq0\Leftrightarrow 4x+16-3x-15\geq0\Leftrightarrow$

$4x-3x\geq15-16\Leftrightarrow x\geq-1$

Οι κοινές λύσεις των (2), (3) είναι οι τιμές του διαστήματος $[-1,+\infty)$

γ) Οι κοινές λύσεις των (1), (2), (3) ανήκουν στην τομή $[-1,+\infty)\cup(-\infty,1]=[-1,1]$

Αλλά $x\in\mathbb{Z}$, οπότε $x\in\{0,-1\}$.



Άσκηση 7η

1) Να βρεθούν οι τιμές του x που επαληθεύουν και τις δύο ανισώσεις: $\frac{3x+2}{4}<x-1<\frac{2-x}{3}$ **(I)**

2) Να λυθούν οι παρακάτω ανισώσεις $|2x-1|>3-\left|x-\frac{1}{2}\right|$ **(II)**

$$\frac{3|x-2|+4}{4}-\frac{6-2|x-2|}{2}<\frac{|2-x|}{3}-2\quad\text{(III)}$$

Λύση: 1) Έχουμε: $(I)\Leftrightarrow\frac{3x+2}{4}<x-1$ (i) και $x-1<\frac{2-x}{3}$ (ii) Αλλά $(i)\Leftrightarrow3x+2<4x-4\Leftrightarrow x>6$ και $(ii)\Leftrightarrow 3x-3<2-x\Leftrightarrow x<\frac{5}{4}$

Το σύστημα λοιπόν των (i), (ii) είναι αδύνατο

2) Έχουμε: $(II)\Leftrightarrow |2x-1|>3-\frac{|2x-1|}{2}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|2x-1|=y\\ y>3-\frac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|2x-1|=y\\ y>2\end{cases}\Leftrightarrow|2x-1|>2$$

$\Leftrightarrow 2x-1>2$ ή $2x-1<-2\Leftrightarrow 2x>3$ ή $2x<-1\Leftrightarrow x>\frac{3}{2}$ ή $x<-\frac{1}{2}$

Επειδή $|2-x|=|x-2|$ θα έχουμε:

$$(III)\Leftrightarrow\begin{cases}|x-2|=y\\ \frac{3y+4}{4}-\frac{6-2y}{2}<\frac{y}{3}-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|x-2|=y\\ y<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$|x-2|<0$, αδύνατη.

Άσκηση 8η: Δίνονται οι παραστάσεις:

$$K(x)=\big||x|-3\big|,\ \Lambda(x)=\left|\frac{2|x|-1}{|x|+3}\right|,\ \Phi(x)=|x-1|-4$$

α) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση K(x) υπερβαίνει την τιμή 2.

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση Λ(x) είναι το πολύ 1.

γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η παράσταση Φ(x) παίρνει τουλάχιστον την τιμή 1 και το πολύ την τιμή 3.

Λύση: α) Η παράσταση K(x) υπερβαίνει την τιμή 2 όταν και μόνον $K(x)>2$

Αλλά: $K(x)>2\Leftrightarrow\big||x|-3\big|>2\Leftrightarrow$

$|x|-3<-2$ ή $|x|-3>2\Leftrightarrow|x|<-2+3$ ή $|x|>2+3\Leftrightarrow|x|<1$ ή $|x|>5\Leftrightarrow -1<x<1$ ή $(x<-5$ ή $x>5)\Leftrightarrow x\in(-\infty,-5)\cup(-1,1)\cup(5,+\infty)$

β) Η παράσταση Λ(x) είναι το πολύ 1 όταν και μόνο $\Lambda(x)\leq1$. Αφού $|x|\neq-3$, η Λ(x) ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό και

$$\Lambda(x)\le 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2|x|-1}{|x|+3}\right|\le 1 \Leftrightarrow \big|2|x|-1\big|\le \big||x|+3\big| \Leftrightarrow$$

$$\big|2|x|-1\big|^2 \le \big||x|+3\big|^2 \Leftrightarrow (2|x|-1)^2 \le (|x|+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$4|x|^2-4|x|+1\le |x|^2+6|x|+9 \Leftrightarrow 3|x|^2-10|x|-8\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|x|=y\\ 3y^2-10y-8\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x|=y\\ (y-4)(3y+2)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}|x|=y\\ -\frac{2}{3}\le y\le 4\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3}\le |x|\le 4 \Leftrightarrow |x|\le 4 \Leftrightarrow -4\le x\le 4$$

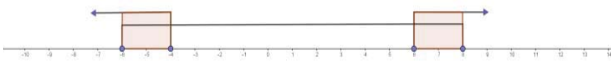
γ) Η παράσταση Φ(x) είναι τουλάχιστον 1 και το πολύ 3, όταν και μόνο $1\le \Phi(x)\le 3$. Αλλά

$$1\le \Phi(x)\le 3 \Leftrightarrow 1\le |x-1|-4\le 3 \Leftrightarrow$$

$$5\le |x-1|\le 7 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}1\le |x-1|-4\\ |x-1|-4\le 3\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}|x-1|\ge 5\\ |x-1|\le 7\end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}|x-1|\ge 5\\ |x-1|\le 7\end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix}x-1\le -5 \text{ ή } x-1\ge 5\\ -7\le x-1\le 7\end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{Bmatrix}x\le -4 \text{ ή } x\ge 6\\ -6\le x\le 8\end{Bmatrix} \Leftrightarrow -6\le x\le -4 \text{ ή } 6\le x\le 8$$



Άσκηση 9η: Να βρεθεί ο $\lambda\in \mathbf{R}$ ώστε η ανίσωση: $\lambda^2x-5\lambda\le 4\lambda^2-\lambda x$ (1)

α) Να είναι αδύνατη, β) Να αληθεύει για κάθε x.

Λύση: Έχουμε: $(1)\Leftrightarrow \lambda^2x+\lambda x\le 4\lambda^2+5\lambda \Leftrightarrow$ $\lambda(\lambda+1)x\le \lambda(4\lambda+5)$. Για να είναι αδύνατη πρέπει: $\lambda(\lambda+1)=0$ δηλαδή $\lambda=0$ ή $\lambda=-1$.

α) Αν $\lambda=-1$, τότε η ανίσωση γίνεται $0x\le -1$, και είναι αδύνατη.

β) Αν $\lambda=0$, τότε η ανίσωση γίνεται $0x\le 0$, και ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Τελικά πρέπει και αρκεί $\lambda=-1$.

Άσκηση 10η: α) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των παρακάτω ανισώσεων:

$$\mathbf{4-x^2\le 0\ (1) \text{ και } x^2-2x-8\le 0\ (2)}$$

β) Αν οι αριθμοί ρ_1, ρ_2 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)=2x^2-7x-1$ τότε να δείξετε ότι και ο αριθμός $S=\rho_1+\rho_2$ ανήκει στο σύνολο των κοινών λύσεων των δύο ανισώσεων.

Λύση: α) $(1)\Leftrightarrow x^2\ge 4\Leftrightarrow |x|\ge 2\Leftrightarrow x\le -2$ ή $x\ge 2$ και $(2)\Leftrightarrow (x+2)(x-4)\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 4$

Άρα $-2\le x\le 4$, οπότε οι κοινές λύσεις τους είναι οι τιμές $x\in[2,4]\cup\{-2\}$

β) Το $f(x)$ έχει $\Delta>0$, οπότε $S=\rho_1+\rho_2=\frac{7}{2}$ και προφανώς $\frac{7}{2}\in[2,4]$

Άσκηση 11η: Δίνεται το τριώνυμο $A(x)=-x^2+3x-2$.

α) Να λυθεί η εξίσωση A(x) = 0.

β) Αν A(x) > 0 να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$B=\frac{|x-2|+|x+3|}{|x-1|+|x-4|}$$

Λύση: α) Το A(x) έχει διακρίνουσα Δ=1>0 και ρίζες $x_1=1$ και $x_2=2$

β) $A(x)>0\Leftrightarrow x^2-3x+2<0\Leftrightarrow (x-1)(x-2)<0\Leftrightarrow 1<x<2$

γ) Αν A(x)>0 τότε 1<x<2, οπότε x–1>0, x–2<0, x–4<0, x+3>0

Άρα $B=\frac{|x-2|+|x+3|}{|x-1|+|x-4|}=\frac{-x+2+x+3}{x-1-x+4}=\frac{5}{3}$

Άσκηση 12η: Δίνεται η εξίσωση

$$\mathbf{(\lambda-2)x^2-2\lambda x+2\lambda-3=0}.$$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, η εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες.

β) Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες της εξίσωσης, να λύσετε την ανίσωση $|x_1+x_2+4|>2$.

Λύση: α) Έχουμε:

$\Delta=(-2\lambda)^2-4(\lambda-2)(2\lambda-3)=4\lambda^2-4(2\lambda^2-7\lambda+6)=$

$=-4\lambda^2+28\lambda-24$. Για να έχει η εξίσωση δύο ρίζες ίσες πρέπει και αρκεί $\lambda\ne 2$ και Δ=0. Αλλά $\Delta=0\Leftrightarrow \lambda^2-7\lambda+6=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-6)=0\Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=6$, δεκτές τιμές αφού είναι διάφορες του 2.

β) Αφού η εξίσωση έχει ρίζες άνισες θα έχουμε $\lambda\ne 2$ και Δ>0. Αλλά $\Delta>0\Leftrightarrow \lambda^2-7\lambda+6<0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow(\lambda-1)(\lambda-6)<0\Leftrightarrow 1<\lambda<6$ Τελικά λοιπόν έχουμε: $\lambda\in(1,2)\cup(2,6)$. Άρα

$$x_1+x_2=-\frac{-2\lambda}{\lambda-2}=\frac{2\lambda}{\lambda-2}$$

Οπότε: $|x_1+x_2+4|>2 \Leftrightarrow \left|\frac{2\lambda}{\lambda-2}+4\right|>2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left|\frac{6\lambda-8}{\lambda-2}\right|>2\Leftrightarrow |3\lambda-4|>|\lambda-2|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |3\lambda-4|^2>|\lambda-2|^2\Leftrightarrow (3\lambda-4)^2>(\lambda-2)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\lambda^2-24+16>\lambda^2-4\lambda+4\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\lambda^2-5\lambda+3>0\Leftrightarrow \lambda<-1$ ή $\lambda>\frac{3}{2}$. Αλλά έχουμε $\lambda\in(1,2)\cup(2,6)$, οπότε τελικά

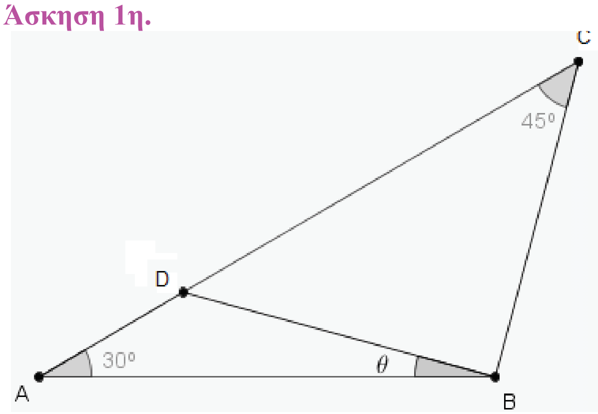
$|x_1+x_2+4|>2\Leftrightarrow \lambda\in\left(\frac{3}{2},2\right)\cup(2,6)$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ Παράλληλες Ευθείες – Παραλληλόγραμμα – Εγγράψιμα

Μιχάλης Νάννος 1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας, **Χρήστος Π. Τσιφάκης** 3ο ΓΕΛ Κερατσινίου

Οι συνάδελφοι Μιχάλης Νάνος και Χρήστος Τσιφάκης, είχαν την ιδέα να φιλοξενήσουμε μερικά ενδιαφέροντα θέματα από το διαδίκτυο «http://mathematica.gr/forum/» ώστε να γίνουν γνωστά και στους αναγνώστες μας, αναφερόμενοι όπως αρμόζει στα ονόματα των εισηγητών και των λυτών. Στα περισσότερα θέματα παραθέτουμε περισσότερες από μια λύσεις πράγμα που καθιστά την αντιμετώπισή τους πρόσφορη σε διδακτική προσέγγιση. Θεωρήσαμε γι' αυτό το λόγο γνωστή την ομοιότητα τριγώνων και το Πυθαγόρειο Θεώρημα.

Άσκηση 1η.



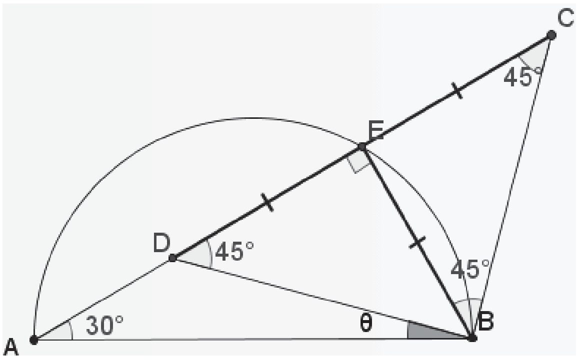
Στο τρίγωνο ABC του παραπάνω σχήματος ισχύει: AB=DC. Υπολογίστε τη γωνία θ.

(Φάνης Θεοφανίδης)

Λύση 1. Αν φέρουμε την $BE \perp DC$, τότε

$\hat{A} = 30^o \Rightarrow EB = \frac{AB}{2} = \frac{DC}{2}$ και

$\hat{C} = 45^o \Rightarrow CE = EB \Rightarrow DE = EB \Rightarrow \angle EDB = 45^o \Rightarrow$
$\theta = 45^0 - 30^0 = 15^0$.



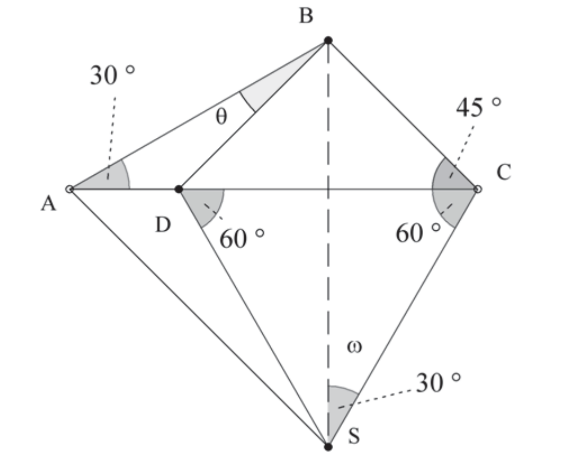
(Μιχάλης Τσουρακάκης)

Λύση 2. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο SDC με τα S,B εκατέρωθεν της DC. Τότε

$B\hat{C}S = 45^o + 60^o = 105^o$ και

$A\hat{B}C = 180^o - (30^o + 45^o) = 105^o$.

Άμεση συνέπεια: $\overset{\triangle}{ABC} = \overset{\triangle}{SCB}$ $(AB = SC, BC = CB,$ $\widehat{ABC} = \widehat{SCB})$. Άρα $\hat{\omega} = \hat{A} = 30^\circ \Rightarrow$ SB είναι μεσοκάθετος του $DC \Rightarrow BD = BC \Rightarrow B\hat{D}C = 45^o \Rightarrow$
$\theta = B\hat{D}C - \hat{A} = 45^o - 30^o = 15^o$.

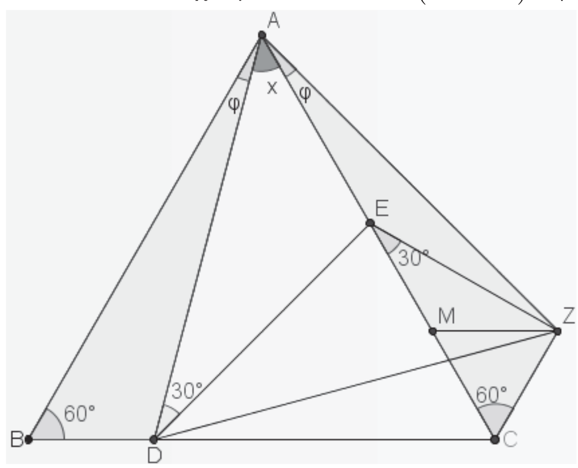


(Νίκος Φραγκάκης)

Άσκηση 2η. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ABC και στις πλευρές του BC και CA θεωρούμε τα σημεία D,E αντιστοίχως με CE=2BD. Αν $\widehat{ADE} = 30^\circ$ να βρείτε τη γωνία $\widehat{DAE}$.

(Νίκος Φραγκάκης)

Λύση 1. Κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ADZ. Τότε θα έχουμε $B\hat{A}D = C\hat{A}Z(= 60 - x) = \hat{\varphi}$



Ακόμη DE μεσοκάθετος της AZ. Άρα $AE = EZ$ και $E\hat{Z}A = E\hat{A}Z = \hat{\varphi}$.

Έχουμε: $\overset{\triangle}{ABD} = \overset{\triangle}{ACZ}$, $(\Pi - \Gamma - \Pi)$, οπότε $BD = ZC$ και $\angle ACZ = 60^0$.

Τώρα, αν M το μέσον της CE θα έχουμε

$EM = MC = CZ = MZ \Rightarrow \angle EZC = 90^0 \Rightarrow$

$\angle CEZ = 30^0 = 2\varphi \Rightarrow \varphi = 15^0 \Rightarrow x = 45^0$.

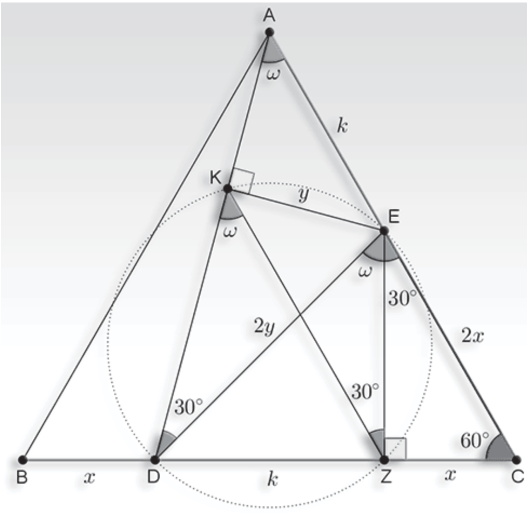
(Μιχάλης Τσουρακάκης)

Λύση 2. Μία λύση με ομοιότητα.

Έχουμε $C\hat{E}Z = 30^o \Rightarrow CZ = x \Rightarrow$

$DZ = \alpha - 2x = AE = k$, όπου $\alpha = AB = BC = CA$

Αν $EZ \perp BC, EK \perp AD$, τότε KEZD εγγράψιμο



Από $E\hat{Z}K = E\hat{D}K = 30^\circ = Z\hat{E}C \Rightarrow KZ \parallel AC$

και $\left.\begin{matrix}KE = y\\ DE = 2y\end{matrix}\right\}$ Εξάλλου $D\hat{E}Z = D\hat{K}Z = D\hat{A}C = \omega \Rightarrow$

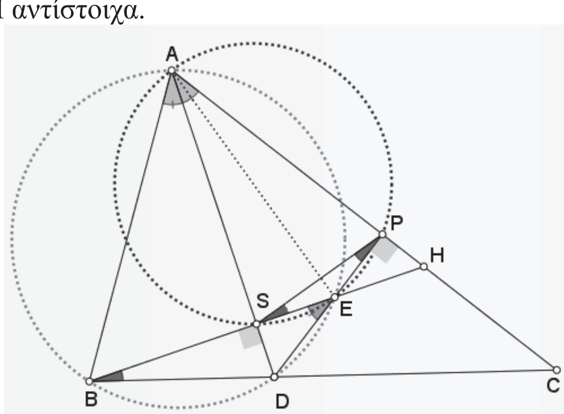
$\triangleleft AKE \sim \triangleleft EZD \Rightarrow \frac{y}{k} = \frac{k}{2y} \Rightarrow k = y\sqrt{2} \Rightarrow$

$\hat{\omega} = D\hat{A}E = 45^\circ \Rightarrow D\hat{K}Z = 45^\circ \Rightarrow \hat{\omega} = 45^\circ$.

(Μιχάλης Νάννος)

Άσκηση 3η. Η AD είναι διχοτόμος του σκαληνού τριγώνου ABC και S,P είναι οι προβολές των B, D στις AD,AC αντιστοίχως. Δείξτε ότι: $\widehat{DBS} = \widehat{DPS}$. (Θανάσης Καραντάνας)

Λύση 1. Έστω ότι η BS τέμνει τις DP, AC στα E, H αντίστοιχα.



$S\hat{H}C = 90^0 + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow E\hat{S}P + E\hat{P}S = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow ASEP \Rightarrow$

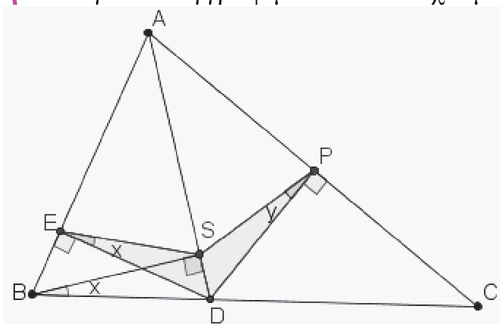
$S\hat{E}D = S\hat{A}P = B\hat{A}D \Rightarrow$ ABDE εγγράψιμο.

Άρα: $D\hat{B}S = S\hat{A}E = S\hat{P}E \Rightarrow D\hat{B}S = D\hat{P}S$.

Για την ιστορία οι γωνίες είναι ίσες με $\frac{|\hat{B} - \hat{C}|}{2}$.

(Γιώργος Βισβίκης)

Λύση 2. Λόγω του εγγράψιμου ESDB έχουμε

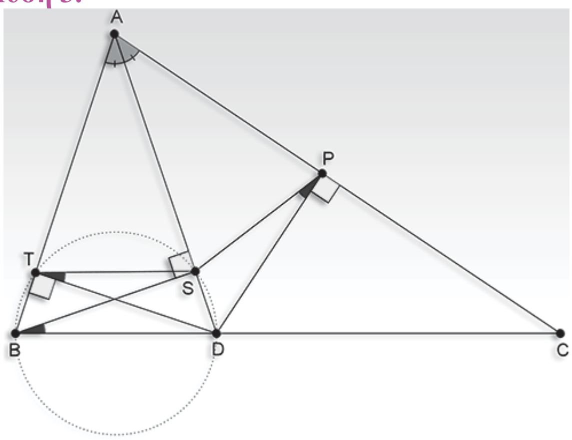


$D\hat{B}S = D\hat{E}S = x \Rightarrow \angle SDE = \angle PDA$,

$DE = DP, SD = SD \Rightarrow ESD = PSD \Rightarrow y = x$.

(Μιχάλης Τσουρακάκης)

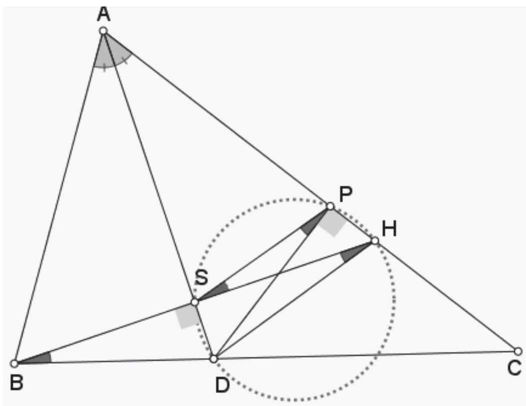
Λύση 3.



Με $DT \perp AB$ η άσκηση ξεκλειδώνει… (γιατί;;;)

(Μιχάλης Νάννος)

Λύση 4. Άλλη μία λύση χωρίς λόγια.. (γιατί;;;)

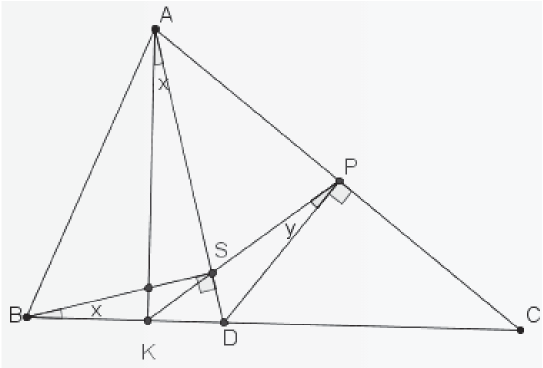


(Γιώργος Βισβίκης)

Λύση 5. $AK \perp BC \Rightarrow K\hat{A}D = x = D\hat{B}S = x$ (ως οξείες με πλευρές κάθετες) $\Rightarrow$

AKDP εγγράψιμο $\Rightarrow P\hat{K}D = \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow P\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{2}$

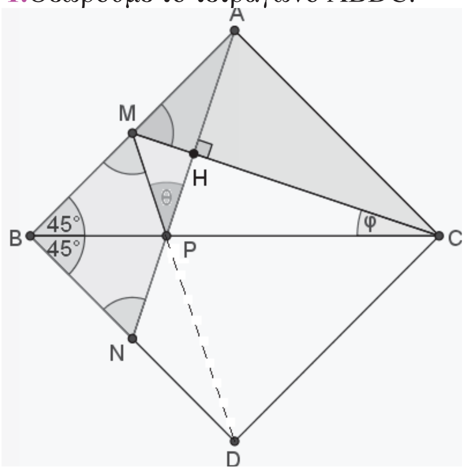
Ακόμη, AKDP εγγράψιμο $\Rightarrow P\hat{K}D = P\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{2}$



Άρα, $S\hat{K}D = P\hat{K}D \Rightarrow K,S,P$ συνευθειακά και $x = y$. **(Μιχάλης Τσουρακάκης)**

Άσκηση 4η. Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ABC(AB=AC) η κάθετη από την κορυφή A στη διάμεσο CM τέμνει την υποτείνουσα στο P. Να δείξετε ότι $A\hat{M}C = B\hat{M}P$. (Γιώργος Βισβίκης)

Λύση 1. Θεωρούμε το τετράγωνο ABDC.



Τα τρίγωνα CAM, ABN είναι ίσα, όπως και τα τρίγωνα MBP, NBP, συνεπώς:

$\widehat{AMC} = \widehat{ANB} = \widehat{BMP}$ και $M\hat{P}B = N\hat{P}B = A\hat{P}C$.

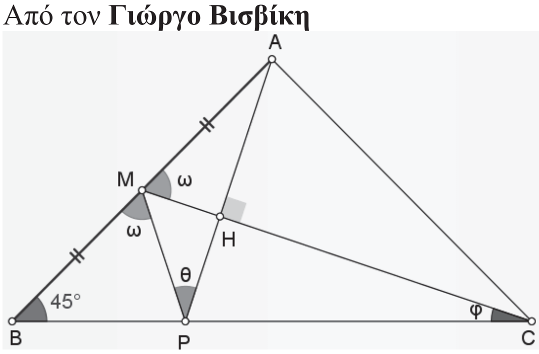
Και ένα πρόσθετο ερώτημα:

Βρείτε τη σχέση των γωνιών $\widehat{MCB} = \widehat{APM}$.

(Θανάσης Καραντάνας)

Απάντηση στο πρόσθετο ερώτημα

α) Από τον **Γιώργο Βισβίκη**



$\theta = 90^0 - P\hat{M}H = 90^0 - (180^0 - 2\omega) = 2(\omega - 45^0) = 2(A\hat{M}C - 45^0) \Rightarrow \theta = 2\varphi$.

β) Από τον **Χρήστο Τσιφάκη** με την επιπλέον παρατήρηση ότι τα M,P, D είναι συνευθειακά.

Βρήκαμε $M\hat{P}B = N\hat{P}B = A\hat{P}C$ (1) Αλλά

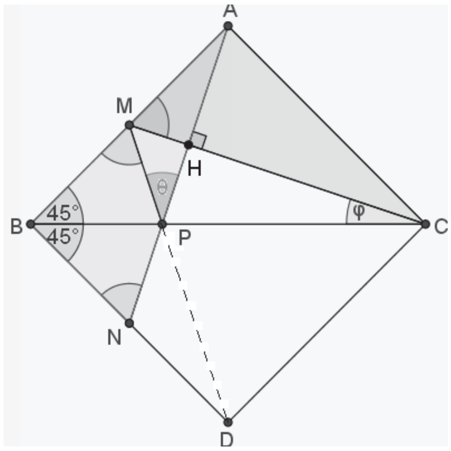
$M\hat{P}B = \hat{M}_1 + \hat{\varphi} = 90^o - \hat{\theta} + \hat{\varphi}$ και

$A\hat{P}C = 90^o - \hat{\varphi} \Rightarrow 90^o - \hat{\theta} + \hat{\varphi} = 90^o - \hat{\varphi} \Rightarrow \theta = 2\varphi$.

Παρατήρηση:

Προφανώς $D\overset{\triangle}{P}C = A\overset{\triangle}{P}C \Rightarrow D\hat{P}C = A\hat{P}C$ (2), οπότε

$(1),(2) \Rightarrow D\hat{P}C + M\hat{P}C = M\hat{P}B + M\hat{P}C = 180^o \Rightarrow M,P,D$ συνευθειακά

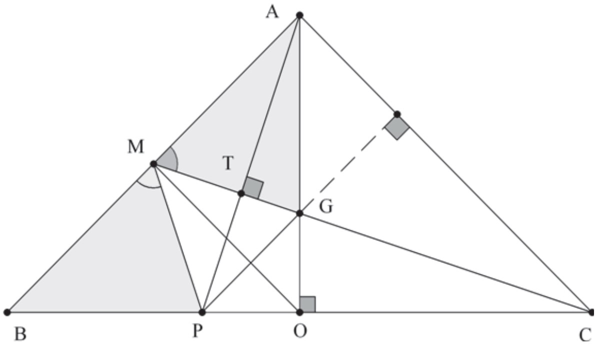


Βρήκαμε ότι $M\hat{P}B = N\hat{P}B = A\hat{P}C$ (1).

Αλλά $M\hat{P}B = \hat{M}_1 + \hat{\varphi} = 90^o - \hat{\theta} + \hat{\varphi}$ και

$A\hat{P}C = 90^o - \hat{\varphi} \Rightarrow 90^o - \hat{\theta} + \hat{\varphi} = 90^o - \hat{\varphi} \Rightarrow \theta = 2\varphi$.

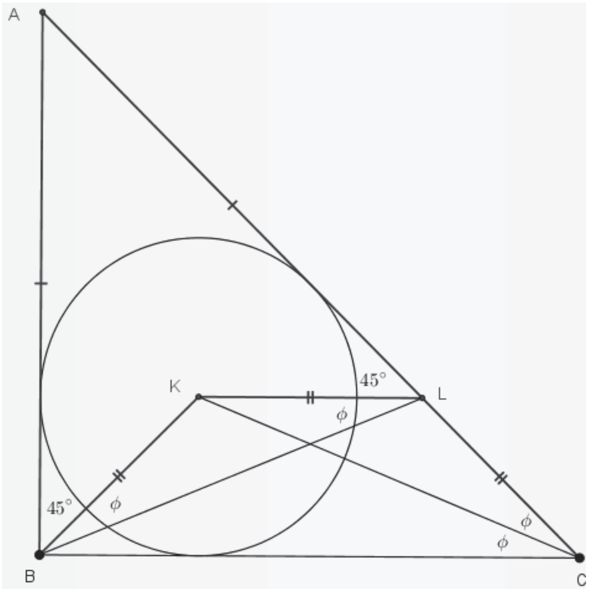
Λύση 2. Έστω O το μέσο του BC και G το βαρύκεντρο του τριγώνου ABC που είναι προφανώς ορθόκεντρο του τριγώνου APC.



Επειδή $OG = OP$ και $PM // AC$ θα είναι η OM διχοτόμος της ορθής γωνίας $\widehat{GOP}$ με άμεση συνέπεια, τα τρίγωνα $GOM = POM \Rightarrow MG = MP$ και αφού $BP = AG \Leftrightarrow BP + PO = AG + GO$ θα είναι τα τρίγωνα $AMG = BMP$ και το ζητούμενο προφανές. **(Νίκος Φραγκάκης)**

Άσκηση 5η. Δίνεται ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\angle B = 90^0$) και ο εγγεγραμένος κύκλος του με κέντρο το Κ. Δείξτε ότι $ΑΓ = ΑΒ + ΒΚ$. (Φάνης Θεοφανίδης)

Λύση 1. Θεωρούμε σημείο L της πλευράς AC ώστε $KL//BC$.



Προφανώς, το K είναι το έκκεντρο του τριγώνου ABC. Άρα, $\widehat{KBC}=45^{\circ}=\widehat{LCB}$, και αφού το KLCB είναι τραπέζιο $(KL \parallel BC)$ είναι και ισοσκελές τραπέζιο. Συνεπώς $KB=LC$ (1). Επίσης η KC διχοτομεί την γωνία $\hat{C}$, άρα $\widehat{KCL}=\widehat{KCB}$ (2).

Το KLCB ως ισοσκελές τραπέζιο, είναι και εγγράψιμο. Άρα, $\widehat{KBL}=\widehat{KCL}\overset{(2)}{=}\widehat{KCB}=\widehat{KLB}$, οπότε $\widehat{KBL}=\widehat{KLB}$ (3).

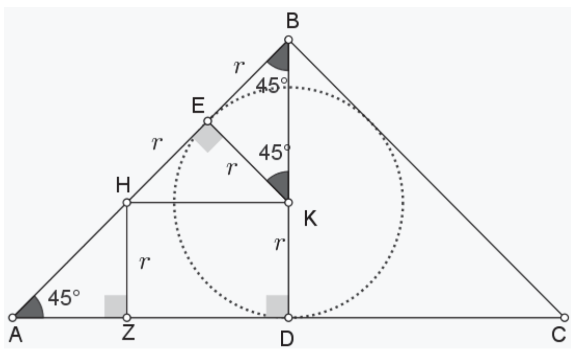
Ακόμη, $\widehat{ALK}=\hat{C}=45^{\circ}=\widehat{ABK}\Rightarrow\widehat{ABK}=\widehat{ALK}$ (4).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (3), (4) παίρνουμε $\widehat{ABL}=\widehat{ALB}\Rightarrow AB=AL$ (5).

Από (1), (5), $AB+BK=AL+LC=AC$, ό.έ.δ.

(Ορέστης Λιγνός)

Λύση 2. Έστω ότι D,E είναι τα σημεία επαφής του έγκυκλου με τις AC,AB και $KH//AC$, $HZ//BD$.



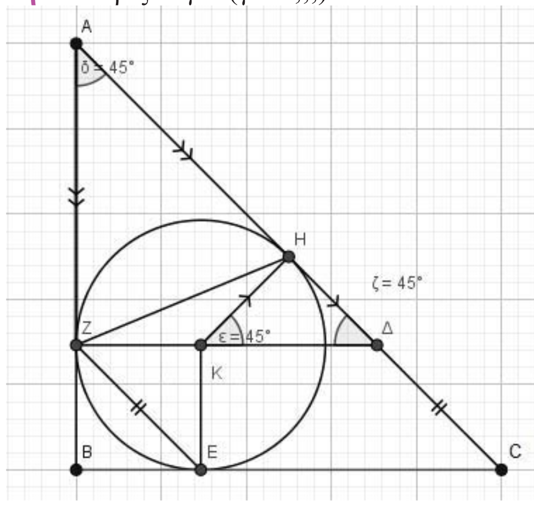
Τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ZAH, EBK είναι ίσα, άρα $AH=BK$ (1).

$AC=2AD=2AE=2(AB-r)=$

$AB+AB-2r=AB+AH\overset{(1)}{\Leftrightarrow}AC=AB+BK$.

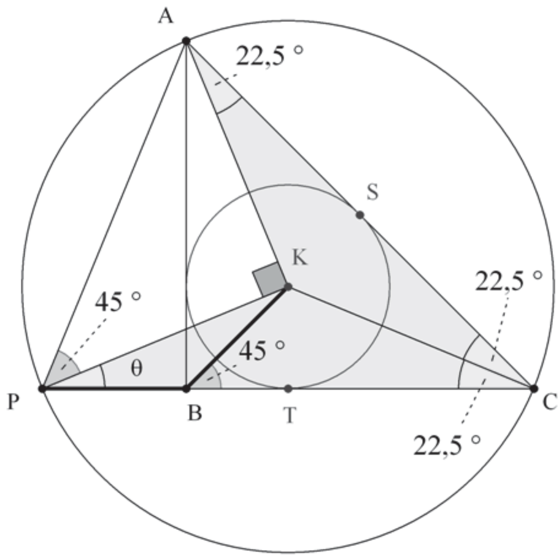
(Γιώργος Βισβίκης)

Λύση 3. Χωρίς λόγια (γιατί;;;)



(Φωτεινή Καλδή)

Λύση 4. Γράφω το κύκλο (K,KA) που τέμνει ακόμα τη BC στο P.



$KP=KA=KC\Rightarrow\hat{\theta}=22,5^{\circ}$. Προφανώς δε $\widehat{PAC}=\widehat{APC}=67,5^{\circ}\Rightarrow AC=PC$ (1).

Όμως $P\hat{K}B=K\hat{B}C-\hat{\theta}=45^{o}-\hat{\theta}=22,5^{o}\Rightarrow$ $BK=PB$ (2). Έχουμε όμως $AB=BC$ και λόγω των (1) και (2): $AC=PC=PB+BC=BK+AB$.

(Νίκος Φραγκάκης)

Λύση 5. Επί της προεκτάσεως της AB, προς το B, θεωρώ σημείο P τέτοιο ώστε $BP=BK$.

Φέρνω τα ευθύγραμμα τμήματα $K\Gamma, KP, PC$.

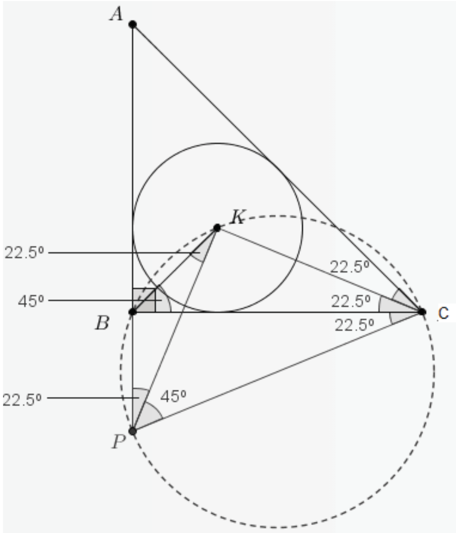
Από το ισοσκελές τρίγωνο PBK έχω

$\angle KPB=\angle BKP=22,5^{0}$ (αφού $\angle PBK=135^{0}$).

Όμως και $K\hat{C}B=A\hat{C}K=22,5^{0}$.

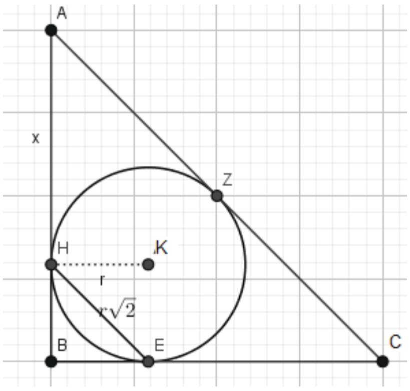
Οπότε το $PBK\Gamma$ είναι εγγράψιμο.

Άρα και $C\hat{P}K=45^{0}$.



Συνεπώς το τρίγωνο PAC είναι ισοσκελές $\Rightarrow$
$\Rightarrow AP = AC \Rightarrow \ AB + BP = AC \Rightarrow$
$\Rightarrow AB + BK = AC$. **(Φάνης Θεοφανίδης)**

Λύση 6. Έχουμε CZ=ZA=HA=x. Θέλουμε να δείξουμε ότι $2x = x + r + r\sqrt{2}$, δηλαδή $x = r(1+\sqrt{2})$



αυτό προκύπτει από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΗΕ, ΒΑΓ . Πράγματι

$$\frac{HE}{AC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2x} = \frac{r}{r+x} \Rightarrow$$

$r + x = \sqrt{2}x \Rightarrow x = r(\sqrt{2}+1)$. **(Φωτεινή Καλδή)**

Λύση 7. Αρκεί να δείξουμε ότι AC=AB+AZ–r (Προυγούμενο σχήμα), αφού B,K,Z συνευθειακά (γιατί;). Έχουμε AB=BC=α

$$\Rightarrow \beta = AC = \alpha\sqrt{2} \Rightarrow AZ = ZC = ZA = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$$

Εξάλλου

$$r = BE = \tau - AC = \frac{2\alpha+\beta}{2} - \beta = \alpha - \frac{\beta}{2} = \alpha - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}.$$

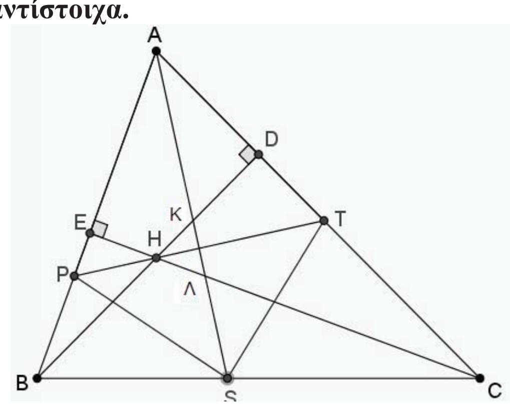
Άρα:

$$AB + AZ - r = \alpha + \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} - \left(\alpha - \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}\right) = \alpha\sqrt{2} = A\Gamma$$

(Χρήστος Τσιφάκης)

Άσκηση 6η.

Τα ύψη BD, CE του τριγώνου ABC τέμνονται στο σημείο H. Η κοινή διχοτόμος των $\widehat{EHB}, \widehat{DHC}$, τέμνει τις πλευρές AB, AC στα P, T αντίστοιχα.



Αν η AS είναι διχοτόμος του τριγώνου, δείξτε ότι $SP = ST$. **(Θανάσης Καραντάνας)**

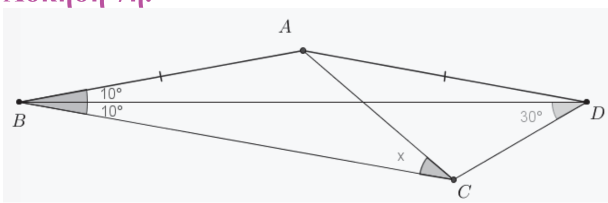
Λύση 1. $A\hat{P}T = A\hat{T}P$ ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $E\hat{H}P, T\hat{H}D$, άρα $AP = AT$ κι επειδή η AS είναι διχοτόμος θα είναι μεσοκάθετος του PT και το ζητούμενο έπεται. **(Γιώργος Βισβίκης)**

Λύση 2. Έχουμε: $A\hat{K}B = 90^o + K\hat{A}D = 90^o + \frac{\hat{A}}{2}$ και

$$E\hat{\Lambda}S = 90^o + K\hat{A}B = 90^o + \frac{\hat{A}}{2} \Rightarrow A\hat{K}B = E\hat{\Lambda}S \Rightarrow$$

$\Rightarrow HK = H\Lambda \Rightarrow PT \perp K\Lambda \Rightarrow AS$ μεσοκάθετος του $PT \Rightarrow SP = ST$. Τα παραπάνω ισχύουν και όταν $K \equiv \Lambda \equiv H$ (γιατί;).

Άσκηση 7η.

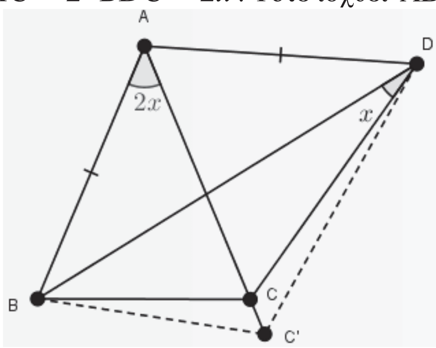


Να βρεθεί η γωνία x. **(Νίκος Φραγκάκης)**

Λύση 1. Θα χρησιμοποιηθεί το εξής:

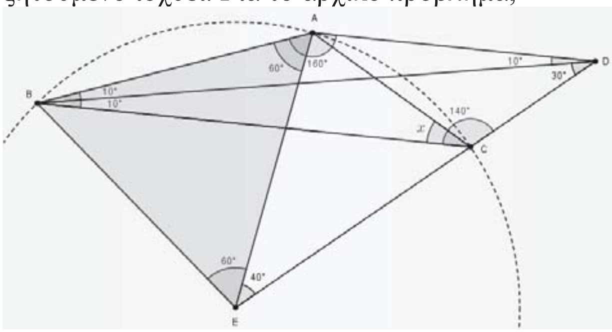
Λήμμα

Έστω τρίγωνο ABC και σημείο D ώστε $AB = AD$ και $\widehat{BAC} = 2 \cdot \widehat{BDC} = 2x$. Τότε ισχύει $AB = AC$.



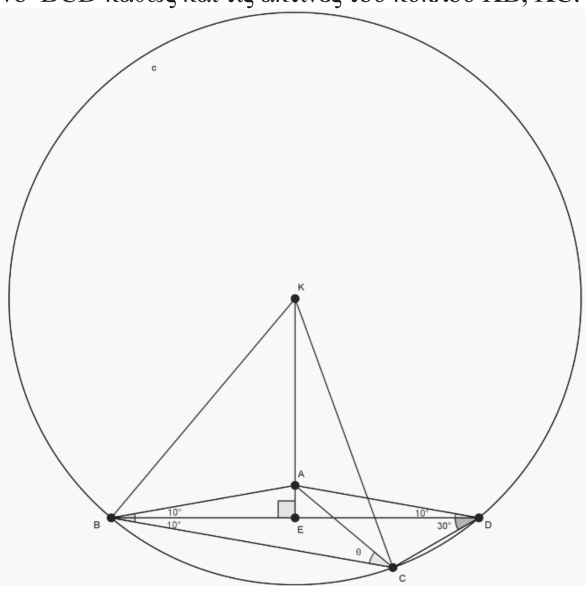
Έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει, και υπάρχει άλλο σημείο C' στην AC ώστε $AB = AC'$. Τότε τα σημεία B, C' και D βρίσκονται πάνω σε κύκλο με

κέντρο το A. Άρα $\widehat{BAC'} = 2 \cdot \widehat{BDC'}$ (επίκεντρη και αντίστοιχη εγγεγραμμένη), επομένως $\widehat{BDC'} = x$.
Όμως έχουμε ότι $\widehat{BDC} = x$, άρα $C \equiv C'$ και το ζητούμενο ισχύει. Για το αρχικό πρόβλημα,



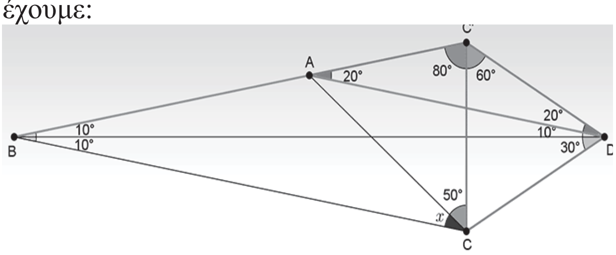
Σχεδιάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ABE, με το σημείο E να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το σημείο C σε σχέση με την AB.
Θα αποδείξουμε αρχικά ότι τα σημεία D, C και E είναι συνευθειακά. Ισχύει ότι $\widehat{ADC} = 40^o$ (1)
Στο ισοσκελές τρίγωνο ADE έχουμε ότι $\widehat{DAE} = 160^o - 60^o = 100^o$ και επομένως $\widehat{ADE} = \dfrac{180^o - 100^o}{2} = 40^o$ (2)
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα σημεία είναι συνευθειακά. Έχουμε λοιπόν ότι $\widehat{AEC} = 40^o$.
Εφαρμόζουμε το λήμμα στο τρίγωνο AEC, όπου ισχύει ότι $EA = EB$ και $\widehat{AEC} = 2 \cdot \widehat{ABC} = 2 \cdot 20^o$
Άρα $EA = EC$ και επειδή $EA = EB$, προκύπτει ότι τα σημεία B, A και C βρίσκονται πάνω σε κύκλο με κέντρο το E. Άρα $\widehat{AEB} = 2 \cdot \widehat{ACB} = 2x$ (επίκεντρη και αντίστοιχη εγγεγραμμένη), άρα $x = 30^o$. **(Διονύσιος Αδαμόπουλος)**

Λύση 2. Φέρω τον περιγεγραμμένο κύκλο στο τρίγωνο BCD καθώς και τις ακτίνες του κύκλου KB, KC.



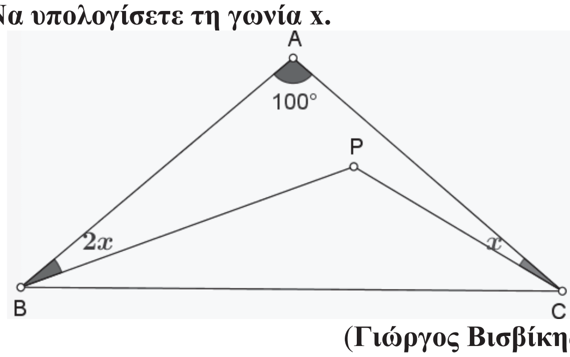
Το τρίγωνο KBC είναι ισόπλευρο, (ισοσκελές και η επίκεντρη γωνία $\widehat{BKC} = 60^o$, αφού η αντίστοιχή της εγγεγραμμένη, η οποία βαίνει στο ίδιο με αυτήν τόξο είναι $\widehat{BDC} = 30^o$).
Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία K, A είναι η μεσοκάθετος της χορδής BD.
Το παραπάνω ισχύει διότι τα σημεία K και A ισαπέχουν από τα άκρα του BD.
Δηλαδή το KE είναι το απόστημα της χορδής BD.
Συνεπώς στο ορθογώνιο τρίγωνο KEB έχουμε: $\widehat{KBE} = \widehat{KBA} + \widehat{ABE} = 40^o + 10^o = 50^o$.
Άρα $\widehat{KBA} = \widehat{BKA} = 40^o$, οπότε AK=AB και αφού CK=CB η CK θα είναι μεσοκάθετος KB, δηλαδή διχοτόμος της BCK. Άρα $x = \dfrac{\widehat{KCB}}{2} = 30^o$.
(Σταμάτης Γλάρος)

Λύση 3. Με C', το συμμετρικό του C ως προς BD, έχουμε:



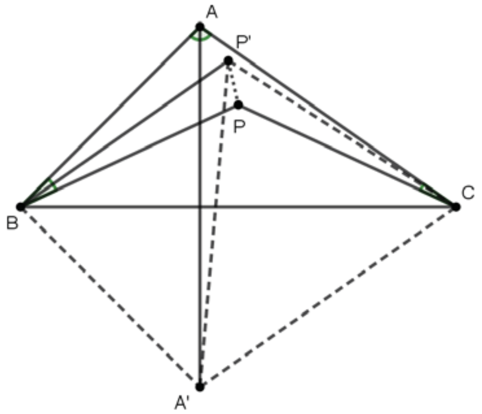
Το ισοσκελές $\triangleleft BCC'(20^\circ, 80^\circ, 80^\circ)$, το ισόπλευρο $\triangleleft DCC'$, το ισοσκελές $\triangleleft C'AD(140^\circ, 20^\circ, 20^\circ)$ και το ισοσκελές $\triangleleft C'CA(80^\circ, 50^\circ, 50^\circ)$.
Έτσι, $x = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ$. **(Μιχάλης Νάννος)**

Άσκηση 8η. Στο εσωτερικό ισοσκελούς τριγώνου ABC με γωνία κορυφής $\hat{A} = 100^o$ θεωρούμε σημείο P, ώστε $BP = BA$ και $A\hat{B}P = 2A\hat{C}P = 2x$. Να υπολογίσετε τη γωνία x.



(Γιώργος Βισβίκης)

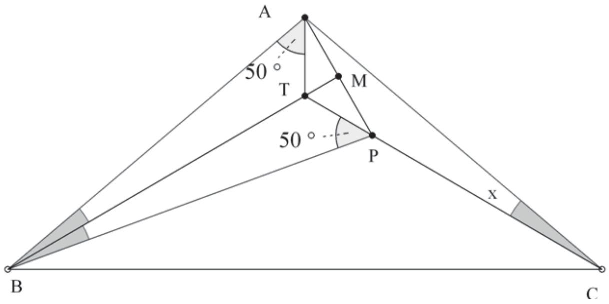
Λύση 1. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο P με τη δοθείσα ιδιότητα.
Έστω P' επί της διχοτόμου της $\angle B$ τέτοιο ώστε $BP' = AB$ και A' το συμμετρικό του A ως προς την BC.
Ισχύει $\angle P'BA' = 60^o$ και $BP' = BA'$, άρα το $\triangle BA'P'$ είναι ισόπλευρο.
Επομένως $A'B = A'P' = A'C$ και αφού $\angle P'BC = 20^o$, έπεται ότι $\angle P'A'C = 40^o$.



Άρα $\angle A'P'C = 70^o$ και κατά συνέπεια $\angle BP'C = 130^o$. Άρα $\angle BCP' = 180^o - 130^o - 20^o = 30^o$ και $\angle P'CA = 10^o$. Δηλαδή ισχύει $\angle ABP' = 2\angle ACP' = 20^o$. Συνεπώς λόγω της μοναδικότητας $P' \equiv P$ και $x = 10^o$.

(Γρηγόρης Κακλαμάνος)

Λύση 2. Φέρνω τη διάμεσο BM του ισοσκελούς BAP που είναι διχοτόμος και ύψος. Η ευθεία CP τέμνει την BM στο T.



Τα τρίγωνα ABT, ACT έχουν AB= AC, AT=AT, $\widehat{BAT} = \widehat{BPT} = 50^\circ$ και

$A\hat{T}B + A\hat{T}C > A\hat{T}B + A\hat{T}M = 180^o$ οπότε είναι ίσα (έμμεσο κριτήριο ισότητας τριγώνων – βλέπε Σχολική Γεωμετρία Α΄Λυκείου των Α. Αλιμπινίση, Γ. Δημάκο, Θ. Εξαρχάκο, Δ. Κοντογιάννη, Γ. Τασσόπουλου, άσκηση 1 σελίδα 71,

$\widehat{BPT} = \widehat{PCB} + \widehat{PBT} = 40^\circ - \hat{x} + 40^\circ - 2\hat{x}$.

Επομένως

$50^o = \widehat{BPT} = \widehat{PCB} + \widehat{PBT} = 40^\circ - \hat{x} + 40^\circ - 2\hat{x} = 80^o - 3x \Rightarrow x = 10^o$

(Νίκος Φραγκάκης)

Λύση 3. Παίρνουμε το περίκεντρο K του τριγώνου APC. Από το ισοσκελές BAP, $\widehat{BAP} = 90^\circ - x$, και αφού $\widehat{BAC} = 100^\circ$, $\widehat{PAC} = x + 10^\circ$ (1).

Τα τρίγωνα ABP, AKP έχουν κοινή πλευρά AP και είναι ισοσκελή, (αφου BA=BP, από υπόθεση, και $KA = KP$ λόγω του περικέντρου) και $A\hat{K}P = A\hat{C}P = 2x = A\hat{B}P$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι είναι ίσα, συνεπώς $AC = AB = BP = KP = KA = KC$, οπότε το KAC είναι ισόπλευρο. Είναι (λόγω του περικέντρου), $60^\circ = \widehat{AKC} = \widehat{AKP} + \widehat{PKC} =$

$2\widehat{PCA} + 2\widehat{PAC} \overset{(1)}{=} 2x + 20^\circ + 2x = 4x + 20^\circ \Rightarrow$

$x = 10^\circ$. **(Ορέστης Λιγνός)**

Λύση 4. Παίρνουμε το συμμετρικό T του C ως προς την AP. Λόγω συμμετρίας, $\widehat{ATP} = \widehat{ACP} = x$, οπότε $2x = \widehat{ABP} = 2\widehat{ATP}$, και αφού $BA = BP$, και τα B, T είναι προς το ίδιο μέρος της AP, το B θα είναι περίκεντρο του APT και $AC = BA = BP = BT$, οπότε το BAT είναι ισόπλευρο.

Είναι $60^\circ = \widehat{ABT} = \widehat{ABP} + \widehat{PBT} = 2(\widehat{TAP} + \widehat{ATP}) =$

$2(180^\circ - \widehat{APT}) \Rightarrow \widehat{APT} = 150^\circ \Rightarrow \widehat{APC} = 150^\circ$.

Άρα, από το τρίγωνο APC, $\widehat{PAC} = 30^\circ - x$, και από το ισοσκελές τρίγωνο BAP, $\widehat{BAP} = 90^\circ - x$.

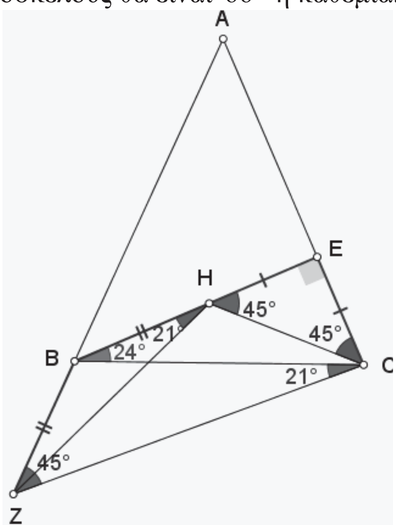
Συνοψίζοντας,

$100^\circ = \widehat{BAC} = \widehat{BAP} + \widehat{PAC} = 30^\circ - x + 90^\circ - x$

$\Rightarrow x = 10^\circ$. **(Ορέστης Λιγνός)**

Άσκηση 9η. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ABC(AB = AC)$, φέρνω το ύψος BE και στην προέκταση της AB προς το B θεωρώ σημείο Z τέτοιο ώστε: $BE = BZ + EC$. Αν $\widehat{CBE} = 24^\circ$ να βρείτε την $\widehat{BCZ}$. **(Νίκος Φραγκάκης)**

Λύση 1. Έστω σημείο H του BE ώστε $BZ = BH$, οπότε $HE = EC$. Επειδή $C\hat{B}E = 24^0$, οι ίσες γωνίες του ισοσκελούς θα είναι 66^0 η καθεμία.

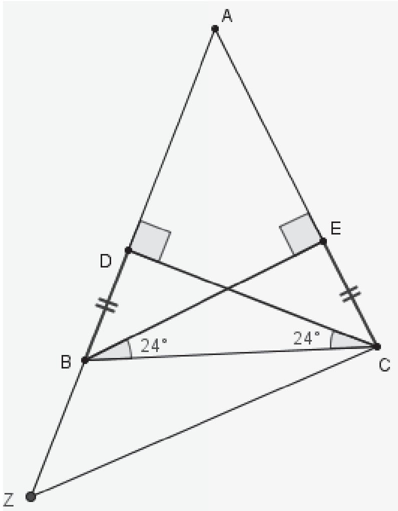


Είναι ακόμα $B\hat{H}Z = B\hat{Z}H = 21^0$ αφού $H\hat{B}A = 66^o - 24^o = 42^o$ και $E\hat{H}C = E\hat{C}H = 45^0$. Άρα $H\hat{C}B = 66^o - 45^o = 21^o$ Επομένως το BHCZ είναι εγγράψιμο και προφανώς $B\hat{C}Z = B\hat{H}Z = 21^0$.

(Γιώργος Βισβίκης)

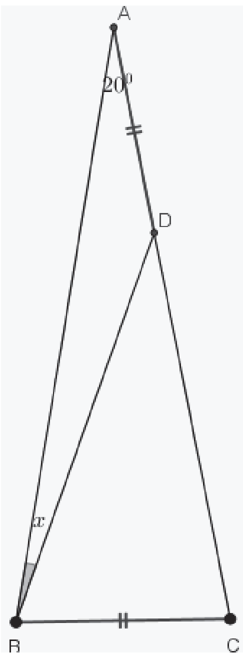
Λύση 2. Θεωρούμε ότι το τρίγωνο ABC είναι οξυγώνιο ώστε $\hat{C} > 45^o$ και $EC < EB$.

Από τα ίσα τρίγωνα BCD, BCE είναι $BD = CE$ και $\widehat{DCB} = \widehat{EBC} = 24^o$.



Τότε, $ZD = BZ + BD = BZ + EC = BE$ δηλαδή το τρίγωνο CDZ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
Οπότε: $\widehat{BCZ} = 45^o - \widehat{DCB} = 45^o - 24^o = 21^o$.

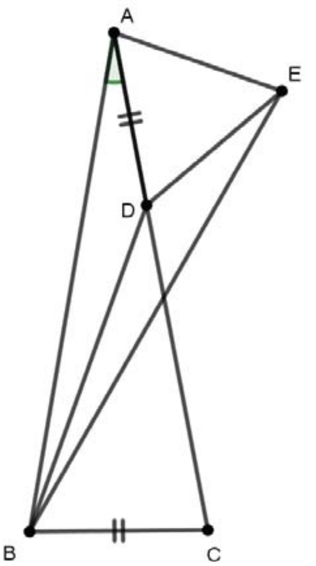
(nikkru)



Άσκηση 10η. Θεωρούμε ένα ισοσκελές τρίγωνο ABC με γωνία κορυφής $\hat{A} = 20^\circ$. Στην πλευρά AC παίρνουμε σημείο D ώστε $AD = BC$. Να βρείτε την γωνία $\widehat{ABD} = x$.

(Ορέστης Λιγνός)

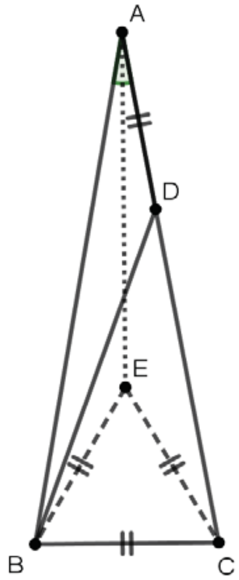
Λύση 1. Φτιάχνω το ισόπλευρο ADE. Τα τρίγωνα ABC, BAE είναι ίσα (έχουν AB=AB, AE=AD=BC, $B\hat{A}E = 20^o + 60^o = 80^o = A\hat{B}C$) και άρα το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές.



Από αυτό έπεται ότι η BD διχοτομεί την ABE δηλαδή $ABD = 10$ μοίρες.

Λύση 2. Φτιάχνουμε το ισόπλευρο τρίγωνο BCE, με E εσωτερικό σημείου του τριγώνου.

Προφανώς το E θα ανήκει στη μεσοκάθετο του BC, όπως και το A. Επομένως έχουμε πως η AE είναι η μεσοκάθετος του BC, δηλαδή η AE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAC}$.



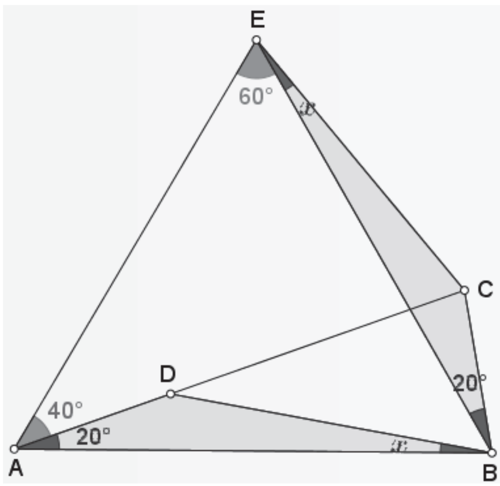
Επομένως $\widehat{EAB} = \widehat{EAC} = 10^o$. Ταυτόχρονα αφού η $\widehat{ABC} = 80^o$ και $\widehat{EBC} = 60^o$, έχουμε πως $\widehat{EBA} = 20^o$.

Τα τρίγωνα AEB και ADB είναι ίσα, καθώς η BA είναι κοινή, $BE = BC = AD$ και $\widehat{BAD} = \widehat{EBA} = 20^o$.

Άρα έχουμε: $x = \widehat{ABD} = \widehat{EAB} = 10^o$.

(Διονύσιος Αδαμόπουλος)

Λύση 3. Κατασκευάζω το ισόπλευρο τρίγωνο ABE (B, E εκατέρωθεν της AC) οπότε τα τρίγωνα ADB, BCE είναι προφανώς ίσα και $D\hat{B}A = C\hat{E}B = x$.



Αλλά, $AC = AE, C\hat{A}E = 40^0 \Rightarrow A\hat{E}C = 70^0 \Leftrightarrow x = 10^0$.

(Γιώργος Βισβίκης)

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης, Απ. Κακκαβάς

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Τριγωνομετρία – Πολυώνυμα

των Φραγκίσκου Γ. Μπερσίμη & Βασίλη Καρκάνη

Άσκηση 1η

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\alpha - 1 + 4\text{συν}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)$, $\alpha>0$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο Α(0,9).

α) Να βρείτε το α.

Για $\alpha = 3$:

β) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f.

γ) Να βρείτε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f.

δ) Να βρείτε αν υπάρχει, τιμή του $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ για την οποία η f(x) γίνεται μέγιστη.

ε) Να γίνει η γραφική παράσταση της f σε διάστημα πλάτους μιας περιόδου.

Λύση

α) $A \in C_f \Rightarrow f(0)=9 \Rightarrow 2\alpha - 1 + 4 = 9 \Rightarrow \alpha = 3$

β) Για $\alpha = 3$ η συνάρτηση f γράφεται: $f(x) = 5 + 4\text{συν}\left(\dfrac{x}{3}\right)$, οπότε $\omega = \dfrac{1}{3}$. Επομένως η βασική περίοδος είναι $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{1}{3}} = 6\pi$.

γ) Για κάθε $x \in R$ ισχύει:

$$-1 \le \text{συν}\frac{x}{3} \le 1 \Rightarrow -4 \le 4\text{συν}\frac{x}{3} \le 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5 - 4 \le 5 + 4\text{συν}\frac{x}{3} \le 5 + 4 \Rightarrow 1 \le f(x) \le 9$$

Αλλά 9=f(0) και 1=f(3π). Άρα $\max f(x) = 9$ και $\min f(x) = 1$.

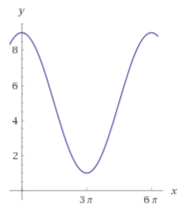
δ) Με $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ έχουμε $f(x) = \max f(x) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 + 4\text{συν}\frac{x}{3} = 9 \Leftrightarrow 4\text{συν}\frac{x}{3} = 4 \Leftrightarrow \text{συν}\frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{x}{3} = 2\kappa\pi \Leftrightarrow x = 6\kappa\pi, \kappa \in Z$. Όμως $0 < x < \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$ $0 < 6\kappa\cancel{\pi} < \dfrac{\cancel{\pi}}{2} \Leftrightarrow 0 < \kappa < \dfrac{1}{12}$, αδύνατο στο Z. Άρα δεν υπάρχει τιμή του $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ ώστε $f(x) = \max f(x)$.

ε) Για το διάστημα $[0, 6\pi]$ έχουμε:

x	0	3π/2	3π	9π/2	6π
x/3	0	π/2	π	3π/2	2π
συν x/3	1	0	–1	0	1
4 συν x/3	4	0	–4	0	4
5+4 συν x/3	9	5	1	5	9



Άσκηση 2η

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = -3 + 2\eta\mu 3x.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει περίοδο $T = \dfrac{2\pi}{3}$

β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -1$

δ) i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g, όταν

$$g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

ii. Να βρείτε τις τετμημένες των κοινών σημείων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f, g.

iii. Ποια από τα παραπάνω κοινά σημεία των f,g έχουν τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$;

Λύση

α) Για την $f(x) = -3 + 2\eta\mu 3x$ ισχύει ω=3, οπότε $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{3}$

β) Για κάθε $x \in R$ ισχύει: $-1 \le \eta\mu 3x \le 1 \Rightarrow$ $-2 \le 2\eta\mu 3x \le 2 \Rightarrow -3 - 2 \le -3 + 2\eta\mu 3x \le -3 + 2$ $\Rightarrow -5 \le f(x) \le -1$. Αλλά $-1 = f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$ και $-5 = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$. Άρα $\max f(x) = -1$ και $\min f(x) = -5$.

γ) Είναι $f(x) = -1 \Leftrightarrow -3 + 2\eta\mu 3x = -1 \Leftrightarrow 2\eta\mu 3x = 2$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 3x = 1 \Leftrightarrow 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\kappa\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

δ) i) Είναι $g(x)=f\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-3+2\eta\mu 3\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$=-3+2\eta\mu\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)=-3+2\sigma\upsilon\nu 3x$

ii) Είναι $f(x)=g(x)\Leftrightarrow -3+2\eta\mu 3x=-3+2\sigma\upsilon\nu 3x$

$\Leftrightarrow \eta\mu 3x=\sigma\upsilon\nu 3x \quad (1)$

Αν $\sigma\upsilon\nu 3x=0$, τότε $\eta\mu 3x=\pm 1$, οπότε η (1) δεν ισχύει. Αν $\sigma\upsilon\nu 3x\neq 0$, τότε:

$(1)\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 3x=1\Leftrightarrow \varepsilon\varphi 3x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow 3x=\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{12}, \kappa\in Z$, δεκτές τιμές (γιατί;)

iii) $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}<\frac{\kappa\pi}{3}+\frac{\pi}{12}<\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{5}{4}<\kappa<\frac{11}{4}\Leftrightarrow\kappa=2$. Για $\kappa=2$ είναι $x=\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{12}=\frac{9\pi}{12}=\frac{3\pi}{4}$ και $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-3+2\eta\mu\frac{9\pi}{4}=$

$=-3+2\eta\mu\left(2\pi+\frac{\pi}{4}\right)=-3+2\eta\mu\frac{\pi}{4}=-3+\sqrt{2}$ οπότε

$A\left(\frac{3\pi}{4},-3+\sqrt{2}\right)$ είναι το ζητούμενο σημείο.

Άσκηση 3η

Δίνεται η παράσταση $A=\frac{2\eta\mu^2x-5}{2\sigma\upsilon\nu x-1}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α.

β) Να λύσετε την εξίσωση Α = 3.

γ) Να βρείτε τις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (2π, 3π).

Λύση

α) Για να ορίζεται η Α πρέπει και αρκεί:

$$2\sigma\upsilon\nu x-1\neq 0 \quad (1)$$

Αλλά $(1)\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x\neq\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z}$

β) Για $x\neq 2\kappa\pi\pm\frac{\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z}$ έχουμε: Α=3

$\Leftrightarrow\frac{2\eta\mu^2x-5}{2\sigma\upsilon\nu x-1}=3\Leftrightarrow 2\eta\mu^2x-5=3(2\sigma\upsilon\nu x-1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(1-\sigma\upsilon\nu^2x)-5=6\sigma\upsilon\nu x-3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2x+6\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x+3)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu x=0$, (αφού $\sigma\upsilon\nu x\neq -3$) $\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$

γ) $x\in(2\pi,3\pi)\Leftrightarrow 2\pi<\kappa\pi+\frac{\pi}{2}<3\pi$

$\frac{3}{2}<\kappa<\frac{5}{2}\Leftrightarrow\kappa=2\Leftrightarrow x=2\pi+\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x=\frac{5\pi}{2}$.

Άσκηση 4η

Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=x^4+(\sigma\upsilon\nu 2\theta)\cdot x^3-(3\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot x^2+2x-1$ με $\theta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$, να δείξετε ότι:

$$2\sigma\upsilon\nu^2\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta+1=0.$$

β) Αν το $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$, να βρεθεί η τιμή του $\theta\in[0,\pi]$.

Λύση

α) Το x–1 είναι παράγοντας του $P(x)\Rightarrow P(1)=0$

$\Rightarrow 1+\sigma\upsilon\nu 2\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta+1=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 1+2\sigma\upsilon\nu^2\theta-1-3\sigma\upsilon\nu\theta+1$

$\Rightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta-3\sigma\upsilon\nu\theta+1=0 \quad (1)$

β) Έχουμε:

$$(1)\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\theta=\omega\\ 2\omega^2-3\omega+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sigma\upsilon\nu\theta=\omega\\ \omega=1 \ \text{ή} \ \omega=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=1$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta=2\kappa\pi$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}\Rightarrow$

$\theta=2\kappa\pi$ ή $\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$ ή $\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}, \kappa\in\mathbb{Z}$.

Αν $\theta=2\kappa\pi$, τότε $\theta\in[0,\pi]\Rightarrow 0\leq 2\kappa\pi\Rightarrow 0\leq\kappa\leq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow\kappa=0$. Αν $\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}$, τότε:

$\theta\in[0,\pi]\Rightarrow 0\leq 2\kappa\pi+\frac{\pi}{3}\leq\pi\Rightarrow -\frac{1}{6}\leq\kappa\leq\frac{2}{6}\Rightarrow\kappa=0$

Αν $\theta=2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}$, τότε

$\theta\in[0,\pi]\Rightarrow 0\leq 2\kappa\pi-\frac{\pi}{3}\leq\pi\Rightarrow\frac{1}{6}\leq\kappa\leq\frac{4}{6}$, αδύνατο στο Z.

Τελικά με $\theta\in[0,\pi]$ βρίσκουμε θ=0 ή $\theta=\frac{\pi}{3}$

Άσκηση 5η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+\alpha x^2-5x+\beta$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x-2$ να είναι ίσο με –4 να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha=-2$ και $\beta=6$ τότε:

Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$ (i)

Να λυθεί η ανίσωση P(x)>6–2x (ii)

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}P(1)=0\\ P(2)=-4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}1+\alpha-5+\beta=0\\ 8+4\alpha-10+\beta=-4\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=4\\ 4\alpha+\beta=-2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=-2\\ \beta=6\end{array}\right\}$$

β) Για α= –2, β=6 είναι: $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$ και $(i)\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0$ Με σχήμα Horner βρίσκουμε:

$$(i)\Leftrightarrow(x-1)(x+2)(x-3)=0\Leftrightarrow x\in\{1,-2,3\}$$

$$\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -5 & 6 & 1\\ & 1 & -1 & -6 & \\ \hline 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

Εξάλλου $(ii)\Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6-6+2x>0$

$x^3-2x^2-3x>0\Leftrightarrow x(x^2-2x-3)>0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x+1)(x-3)>0\Leftrightarrow x\in(-1,0)\cup(3,+\infty)$

$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$		$+$	

Άσκηση 6η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\alpha x^2+\beta x+2$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

α) **Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του με το $x+1$ είναι ίσο με –6, να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.**

β) **Αν $\alpha=-5$ και $\beta=1$ να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$ και η ανίσωση $P(x)>0$.**

γ) **Να λυθεί η εξίσωση**
$2\sigma\upsilon\nu^3\omega+5\eta\mu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0$ (1) στο $[0,2\pi)$.

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}P(2)=0\\ P(-1)=-6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}16+4\alpha+2\beta+2=0\\ -2+\alpha-\beta+2=-6\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}4\alpha+2\beta=-18\\ \alpha-\beta=-6\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha=-5\\ \beta=1\end{array}\right\}$$

β) Για α=–5, β=1 είναι: $P(x)=2x^3-5x^2+x+2$ οπότε από σχήμα Horner βρίσκουμε:

$P(x)=(x-2)(x-1)(2x+1)$

$$\begin{array}{cccc|c}2 & -5 & 1 & -2 & 2\\ & 4 & -2 & 2 & \\ \hline 2 & -1 & -1 & 0 & \end{array}$$

Άρα $P(x)=0\Leftrightarrow x\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}$ και

$P(x)>0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{1}{2},1\right)\cup(2,+\infty)$

$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
	$-$		$+$		$-$		$+$	

γ) Με $\omega\in[0,2\pi)$ έχουμε

$(1)\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\omega+5\left(1-\sigma\upsilon\nu^2\omega\right)+\sigma\upsilon\nu\omega-3=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^3\omega-5\sigma\upsilon\nu^2\omega+\sigma\upsilon\nu\omega+2=0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\omega=x\\ 2x^3-5x^2+x+2=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\sigma\upsilon\nu\omega=x\\ P(x)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=x$ και $x\in\left\{2,1,-\frac{1}{2}\right\}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\omega=1$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega=-\frac{1}{2}$

(Αφού $\sigma\upsilon\nu\omega\neq2$) $\Leftrightarrow\omega\in\left\{0,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

Άσκηση 7η

Δίνεται το πολυώνυμο

$P(x)=x^4-x^3+\kappa x^2+x+\lambda$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$.

α) **Να βρείτε τις τιμές των $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ έχει ρίζα το 1 και παράγοντα το $x+2$.**

β) **Για $\kappa=-7$ και λ=6 να λυθεί:**

η εξίσωση $P(x)=0$. (i)

και η ανίσωση $\frac{P(x)}{x-5}\geq0$. (ii)

Λύση

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}P(1)=0\\ P(-2)=0\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}1-1+\kappa+1+\lambda=0\\ 16+8+4\kappa-21+\lambda=0\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\kappa+\lambda=-1\\ 4\kappa+\lambda=-22\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{array}{l}\kappa=-7\\ \lambda=6\end{array}\right\}$$

β) Για κ=–7, λ=6 είναι: $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$ οπότε (i) $\Leftrightarrow P(x)=0\Leftrightarrow x^4-x^3-7x^2+x+6=0$.

Από σχήμα Horner βρίσκουμε:

$P(x)=0\Leftrightarrow(x-1)(x+2)(x+1)(x-3)\Leftrightarrow x\in\{1,-2,-1,3\}$.

Με $x\neq5$ έχουμε (ii) $\Leftrightarrow$ $(x-5)P(x)\geq0\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$

$(x-5)(x-1)(x+2)(x+1)(x-3)\geq0\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow x\in[-2,-1]\cup[1,3]\cup(5,+\infty)$.

Άσκηση 8η

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=4x^3-\beta x+4\alpha^2-1$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ και $-1\leq\alpha\leq1$.

α) **Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ τότε:**

i. **Να εκφράσετε το β συναρτήσει του α**
ii. **Να δείξετε ότι το σημείο Μ (α,β) ανήκει σε παραβολή**

iii. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο β.

β) Για β=3 να λυθεί η εξίσωση P(x)=0 .

γ) Να βρείτε όλα τα ζεύγη (α,β) με β. ακέραιο, για τα οποία η εξίσωση P(x)=0 έχει εκτός της ρίζας $x_0 = 1$ και άλλες ακέραιες ρίζες τις οποίες και να βρείτε.

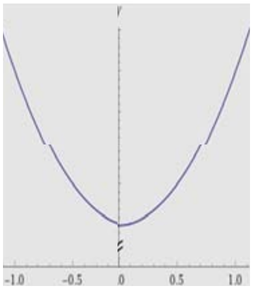
Λύση

α) i) Από τα δεδομένα έχουμε $P(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - \beta + 4\alpha^2 - 1 = 0 \Rightarrow \beta = 4\alpha^2 + 3 \quad (1)$

ii) Λόγω της (1) το σημείο Μ (α,β) ανήκει στη παραβολή $y = 4x^2 + 3$

iii) Προφανώς $4\alpha^2 \geq 0 \Rightarrow 4\alpha^2 + 3 \geq 3 \Rightarrow \beta \geq 3$ με το ίσον μόνο για α=0. Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο β είναι το 3 για α=0.



β) Για β=3, α=0 έχουμε:

$P(x) = 4x^3 - 3x - 1$ οπότε

$P(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x-1)(2x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left\{ x = 1 \quad \text{ή} \quad x = -\frac{1}{2} \right. \text{ (διπλή ρίζα)}$$

γ) Έχουμε:

$-1 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow |\alpha| \leq 1 \Rightarrow \alpha^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 4\alpha^2 \leq 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \leq 4\alpha^2 + 3 \leq 7 \Rightarrow 3 \leq \beta \leq 7 \Rightarrow \beta \in \{3,4,5,6,7\}$

Για β=3,4,5,6,7 βρίσκουμε διαδοχικά α=0, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, ± 1

Μόνο τα ζεύγη (α,β) = $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$, $(\alpha,\beta) = \left(-\frac{1}{2}, 4\right)$ δίνουν και άλλες ακέραιες ρίζες τις $x_1 = 0, x_2 = -1$.

Σχόλιο: Σχετικά με τη χρήση βοηθητικού αγνώστου και την ισοδυναμία εξίσωσης με σύστημα

Από τον Γιώργο Σ. Τασσόπουλο

Με αφορμή μια ενδιαφέρουσα συζήτηση που έλαβε χώρα στη συνεδρίαση της Συντακτικής επιτροπής του Ευκλείδη Β΄» στις 11 / 12 / 2017 θα αναφερθώ σε δύο θέματα που όπως διαπίστωσα είναι πιθανό να δημιουργήσουν παρεξηγήσεις.

Αρχικά παρατηρήστε ότι κάθε εξίσωση f(x)=0, μπορεί να θεωρηθεί εξίσωση με δύο ή περισσότερους αγνώστους υπό την έννοια ότι:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) + 0 \cdot y = 0 \Leftrightarrow f(x) + 0 \cdot y + 0 \cdot \omega = 0$ κ.λπ. Έτσι οι λύσεις της x_i μπορούν να δοθούν με μορφή ζευγών (x_i, y_i) ή τριάδων (x_i, y_i, ω_i) κ.λπ. και η εξίσωση να θεωρηθεί ισοδύναμη με κάποιο σύστημα δύο ή περισσοτέρων αγνώστων π.χ.

$$\sqrt{x^2+3} = 2|x| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} = 2|x| + 0y \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3 = 4x^2 \\ \sqrt{y^2} = |y| \end{cases} \text{κ.λπ.}$$

Σχετικά τώρα με το θέμα της χρήσης βοηθητικού αγνώστου για την επίλυση μιας εξίσωσης ή μιας ανίσωσης θα πρέπει να γίνει κατανοητό το εξής:

Η συνάρτηση για παράδειγμα:

h(x) =2ημ^{2}x – 3ημx +1 είναι σύνθεση της συνάρτησης g(x)=ημx με τη συνάρτηση

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

Ο μηδενισμός λοιπόν της f(g(x)), επιτυγχάνεται όταν και μόνο η g(x) γίνει ίση με κάποια από τις ρίζες x_i (=y) της f(x), δηλαδή μόνο όταν ημx = x_i όπου $2x_i^2 - 3x_i + 1 = 0$.

Συμβολικά:

h(x)=0 ⇔ f(g(x))=0 ⇔ g(x)=x_i, όπου f(x_i) =0 ⇔

$$\left.\begin{matrix} \eta\mu x = x_i \\ 2x_i^2 - 3x_i + 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \eta\mu x = x_i \\ x_i = 1 \quad \text{ή} \quad x_i = \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \text{ημx=1}$$

ή ημx=$\frac{1}{2}$ κ.λ.π. Όταν γράφουμε λοιπόν:

$$\text{h(x)=0} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} \eta\mu x = y \\ 2y^2 - 3y + 1 = 0 \end{matrix}\right\},$$

τότε στην θέση του y εννοούμε προφανώς κάποια από τις ρίζες της f(x)=2x^2 – 3x +1, δηλαδή συγκεκριμένο αριθμό. Δεν πρόκειται λοιπόν εδώ για σύστημα με δύο αγνώστους ισοδύναμο της εξίσωσης h(x)=0, με την προηγούμενη έννοια, αλλά για την εξίσωση ημx=y, όπου η παράμετρος y ικανοποιεί τη συνθήκη 2y^2 – 3y +1=0, δηλαδή $y \in \{1, \frac{1}{2}\}$.

Εντελώς όμοια σκεφτόμαστε για τις αντίστοιχες ανισώσεις, π.χ. την h(x)<0.

Για να ισχύει λοιπόν η f(g(x)) <0 , πρέπει και αρκεί η g(x) = ημx να πάρει τις τιμές x_i (=y) που καθιστούν την f(x)=2x^2 – 3x +1 αρνητική.

Συμβολικά: h(x)<0 ⇔ $\left.\begin{matrix} \eta\mu x = x_i \\ 2x_i^2 - 3x_i + 1 < 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$

$$\left.\begin{matrix} \eta\mu x = x_i \\ \frac{1}{2} < x_i < 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \eta\mu x < 1$$ κ.λ.π., όπου κατά κανόνα ως παράμετρο x_i θεωρούμε το y.

Εξισώσεις της μορφής $h(x)+\gamma x+\delta=\sqrt[\nu]{\alpha x+\beta}$ όπου $h(x)$ κατάλληλη συνάρτηση και $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbb{R}$, $\alpha>0$, $\nu\in\mathbb{N}^*-\{1\}$.

Διονύσης Γιάνναρος, Πύργος

Στο παρόν άρθρο, παρουσιάζουμε μια μέθοδο επίλυσης εξισώσεων της παραπάνω μορφής καθώς και έναν τρόπο δημιουργίας τέτοιων εξισώσεων.

Παράδειγμα 1: Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x+x+1=\sqrt{x+3}$ (1)

Λύση: Προφανώς η (1)έχει πεδίο ορισμού το $A=(0,+\infty)$. Αυτό που μας ενδιαφέρει για την ανάπτυξη της μεθόδου είναι να παρατηρήσουμε αρχικά ότι μια προφανής ρίζα της είναι η $x_0=1$. Στη συνέχεια ότι στο A η συνάρτηση $h(x)=\ln x$ είναι γνησίως αύξουσα με h(1)=0 και $x+1>\sqrt{x+3}\Leftrightarrow(x+1)^2>x+3\Leftrightarrow x^2+x-2>0\Leftrightarrow(x+2)(x-1)>0\Leftrightarrow x>1$, οπότε $x+1<\sqrt{x+3}\Leftrightarrow 0<x<1$.

Επομένως $x>1\Rightarrow\begin{cases}\ln x>\ln 1=0\\ x+1>\sqrt{x+3}\end{cases}\Rightarrow\ln x+x+1>\sqrt{x+3}$, ενώ. $0<x<1\Rightarrow\begin{cases}\ln x<\ln 1=0\\ x+1<\sqrt{x+3}\end{cases}$

$\Rightarrow\ln x+x+1<\sqrt{x+3}$.Τελικά $(1)\Leftrightarrow x=1$

- Οι μορφές που ακολουθούν ή έχουν την παραπάνω μορφή ή μπορούν να αναχθούν σε τέτοια μορφή, ανεξαρτήτως του αν επιδέχονται και άλλους τρόπους λύσης.

Παράδειγμα 2: Να λυθεί η εξίσωση $3x-1=\sqrt{x+3}$ (1)

Λύση: Πέραν του κλασσικού τρόπου επίλυσης θα δούμε ότι μπορεί να αναχθεί στην προηγούμενη μορφή. Προφανώς η (1) έχει πεδίο ορισμού το $A=[-3,+\infty)$.

Παρατηρούμε ότι οι ρίζες της εξίσωσης θα πρέπει να ικανοποιούν την ανίσωση $x\geq\frac{1}{3}$. Διαπιστώνουμε ότι ο αριθμός $x_0=1$ είναι ρίζα της. Θα αποδείξουμε ότι είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης. Η εξίσωση γράφεται $h(x)+x+1=\sqrt{x+3}$ όπου $h(x)=2x-2$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $h(1)=0$ και όπως στο **<u>Παράδειγμα 1</u>** βρίσκουμε: $x+1>\sqrt{x+3}\Leftrightarrow x>1$, ενώ $x+1<\sqrt{x+3}\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq x<1$. Επομένως:

$x>1\Rightarrow\begin{cases}h(x)>h(1)=0\\ x+1>\sqrt{x+3}\end{cases}\Rightarrow h(x)+x+1>\sqrt{x+3}$ ενώ $\frac{1}{3}\leq x<1\Rightarrow\begin{cases}h(x)<h(1)=0\\ x+1<\sqrt{x+3}\end{cases}\Rightarrow h(x)+x+1<\sqrt{x+3}$.

Άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα , την $x_0=1$.

- Ο τρόπος αντιμετώπισης εξισώσεων αυτής της μορφής είναι γνωστός άρα θα μπορούσε να τεθεί το ερώτημα «τι ιδιαίτερο έχει ο συγκεκριμένος τρόπος επίλυσης της εξίσωσης;». Η απάντηση είναι πως μπορούμε να αντικαταστήσουμε την συνάρτηση $2x-2$ με οποιαδήποτε άλλη γνησίως αύξουσα συνάρτηση $h(x)$ με $h(1)=0$ και να δημιουργήσουμε πλήθος εξισώσεων με μοναδική ρίζα τη $x_0=1$ των οποίων η αντιμετώπιση θα είναι ακριβώς η ίδια με την προηγηθείσα. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού έγινε στο πρώτο παράδειγμα. Μπορούμε επομένως να θεωρήσουμε π.χ. ως συνάρτηση $h(x)$ κάποια από τις επόμενες συναρτήσεις $(x-2)^3+1$, $(x-1)\cdot|x-1|$, $2^{x-1}-1$ κ.λπ. και να φέρουμε τις παρακάτω εξισώσεις:
  $(x-2)^3+x+2=\sqrt{x+3}$, $(x-1)\cdot|x-1|+x+1=\sqrt{x+3}$, $2^{x-1}+x=\sqrt{x+3}$ στη μορφή $h(x)+x+1=\sqrt{x+3}$. Οι παραπάνω εξισώσεις έχουν μοναδική ρίζα τη $x_0=1$ και αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο.
- Μια δεύτερη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε αναφερόμενοι στο **<u>Παράδειγμα 2</u>** είναι πως είναι δυνατό να αντικαταστήσουμε τη συνάρτηση $x+1$ με άλλη της μορφής $\gamma x+\delta$ ώστε να ισχύει

$3x-1>\gamma x+\delta>\sqrt{x+3}$ για $x>1$ και $3x-1<\gamma x+\delta<\sqrt{x+3}$ για $\frac{1}{3}\le x<1$. Μία τέτοια συνάρτηση είναι π.χ. η $\gamma x+\delta=2x$ οπότε έχουμε μια καινούργια ομάδα εξισώσεων της μορφής $h(x)+2x=\sqrt{x+3}$ με την $h(x)$ να είναι γνησίως αύξουσα και $h(1)=0$.

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε τώρα να αντιμετωπίσουμε για παράδειγμα τις εξισώσεις: $(x-2)^5+2x+1=\sqrt{x+3}$, $\quad 2^{x-1}+2x-1=\sqrt{x+3}$, $\quad (x-1)\cdot|x-1|+2x=\sqrt{x+3}$, $\ln x+2x=\sqrt{x+3}$ κ.λπ.

Μια ακόμη συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες είναι η $\gamma x+\delta=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ (γιατί;). Εκτός από τις τρείς συναρτήσεις: $x+1.,2x,\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ που βρήκαμε υπάρχει άραγε άλλη συνάρτηση $\gamma x+\delta$ με αυτές τις ιδιότητες;

Παράδειγμα 3: Να λυθεί η εξίσωση $x\cdot(|x|+2)+1=\sqrt{x+1}$

Λύση: Η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού το διάστημα $[-1,+\infty)$ και προφανής λύση τη $x_0=0$ γράφεται δε: $h(x)+2x+1=\sqrt{x+1}$ (1), όπου $h(x)=x|x|$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση (γιατί;) με $h(0)=0$ και

$$2x+1>\sqrt{x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{1}{2}\\4x^2+4x+1>x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\frac{1}{2}>-\frac{3}{4}\\x(4x+3)>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0 \text{ ενώ } 2x+1<\sqrt{x+1}$$

$$\Leftrightarrow -1\le x<-\frac{1}{2} \text{ ή } \begin{cases}x\ge-\frac{1}{2}>-\frac{3}{4}\\x(4x+3)<0\end{cases}\Leftrightarrow -1\le x<-\frac{1}{2} \text{ ή } -\frac{1}{2}\le x<0\Leftrightarrow -1\le x<0.$$

Επομένως: $x>0\Rightarrow\begin{cases}h(x)>h(0)=0\\2x+1>\sqrt{x+1}\end{cases}\Rightarrow h(x)+2x+1>\sqrt{x+1}$ ενώ

$-1\le x<0\Rightarrow\begin{cases}h(x)<h(0)=0\\2x+1<\sqrt{x+1}\end{cases}\Rightarrow h(x)+2x+1<\sqrt{x+1}$. Άρα $(1)\Leftrightarrow x=0$.

Διαφορετικά: $x>0\Rightarrow 2x+1>x+1>1\Rightarrow 2x+1>(x+1)^1>(x+1)^{\frac{1}{2}}>(x+1)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{x+1}$, ν= 3, 4, 5, …

και $-1\le x<0\Rightarrow 2x+1<x+1<1\Rightarrow 2x+1<(x+1)^1<(x+1)^{\frac{1}{2}}<(x+1)^{\frac{1}{\nu}}=\sqrt[\nu]{x+1}$ κλπ.

Με την μέθοδο αυτή μπορούμε να δείξουμε γενικότερα ότι: $x\cdot(|x|+2)+1=\sqrt[\nu]{x+1}\Leftrightarrow x=0$

$x\cdot(|x|+2)+1>\sqrt[\nu]{x+1}\Leftrightarrow x>0$ και $x\cdot(|x|+2)+1<\sqrt[\nu]{x+1}\Leftrightarrow -1\le x<0$, για κάθε $\nu=2,3,4,\ldots$

- Μπορούμε να κάνουμε και εδώ τις ίδιες παρατηρήσεις και να δημιουργήσουμε πλήθος εξισώσεων με μοναδική ρίζα τη $x_0=0$, απλά αντικαθιστώντας την συνάρτηση $x|x|$ με άλλη συνάρτηση $h(x)$ γνησίως αύξουσα με $h(0)=0$, είτε αντικαθιστώντας την συνάρτηση $2x+1$ με άλλη κατάλληλη συνάρτηση της μορφής $\gamma x+\delta$ και προσαρμόζοντας σ' αυτήν την καινούργια $h(x)$. Επομένως για παράδειγμα μπορούμε να έχουμε τις εξισώσεις:

$$x^3+2x+1=\sqrt[3]{x+1},\quad x^5+3x+1=\sqrt[3]{x+1},\quad 2^x+2x=\sqrt[3]{x+1},\quad (x+1)^3+2x=\sqrt[3]{x+1}$$

Παράδειγμα 4: Να λυθεί η εξίσωση: $x^3+2x-11=\sqrt[4]{2x-3}$

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[\frac{3}{2},+\infty)$ και προφανή λύση τη $x_0=2$. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική. Η εξίσωση γράφεται $h(x)+2x-3=\sqrt[4]{2x-3}$ όπου $h(x)=x^3-8$, γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $h(2)=0$ και

$2x-3>\sqrt[4]{2x-3} \Leftrightarrow (2x-3)^4 > 2x-3 \Leftrightarrow (2x-3)\left[(2x-3)^3-1\right]>0 \Leftrightarrow 2x-3>1 \Leftrightarrow x>2$ ενώ

$2x-3<\sqrt[4]{2x-3} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x<2$. Επομένως $x>2 \Rightarrow \begin{cases} h(x)>h(2)=0 \\ 2x-3>\sqrt[4]{2x-3} \end{cases} \Rightarrow h(x)+2x-3>\sqrt[4]{2x-3}$ ενώ

$\frac{3}{2}\le x<2 \Rightarrow \begin{cases} h(x)<h(2)=0 \\ 2x-3\le\sqrt[4]{2x-3} \end{cases} \Rightarrow h(x)+2x-3<\sqrt[4]{2x-3}$. Άρα $(1) \Leftrightarrow x=2$.

Διαφορετικά: $x>2 \Rightarrow 2x-3>1 \Rightarrow (2x-3)^1 > (2x-3)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2x-3>\sqrt[4]{2x-3}$,

ενώ $\frac{3}{2}\le x<2 \Rightarrow 0\le 2x-3<1 \Rightarrow (2x-3)^1 \le (2x-3)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow 2x-3\le\sqrt[4]{2x-3}$ κλπ.

Ως προτεινόμενες εξισώσεις εδώ θα μπορούσαμε να έχουμε π.χ. τις εξισώσεις
$x^2+x-5=\sqrt[4]{2x-3}, \quad (x-2)\cdot|x-2|+2x-3=\sqrt[4]{2x-3}, \quad 2^x+2x-7=\sqrt[4]{2x-3}$ κλπ.

Παράδειγμα 5: Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x}{x^2+1}+3x+1=\sqrt{3x+1}$.

Λύση: Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\frac{1}{3},+\infty)$ και η $x_0=0$ είναι ρίζα της. Θα αποδείξουμε ότι αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $h(x)=\frac{x}{x^2+1}$ ΔΕΝ είναι γνησίως αύξουσα, όμως ο προτεινόμενος τρόπος και εδώ μας οδηγεί σε ανάλογα συμπεράσματα. Έχουμε: $3x+1>\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ (3x+1)^2>3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\frac{1}{3} \\ 3x(3x+1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0$, ενώ $3x+1<\sqrt{3x+1} \Leftrightarrow -\frac{1}{3}<x<0$.

Προφανώς $h(0)=0$ και οι σχέσεις $x>0 \Rightarrow h(x)>0$ και $-\frac{1}{3}\le x<0 \Rightarrow h(x)<0$ προκύπτουν τώρα άμεσα και όχι μέσω της μονοτονίας της $h(x)$.

Άρα: $x>0 \Rightarrow \begin{cases} h(x)>0 \\ 3x+1>\sqrt{3x+1} \end{cases} \Rightarrow h(x)+3x+1>\sqrt{3x+1}$ και $-\frac{1}{3}\le x<0 \Rightarrow \begin{cases} h(x)<0 \\ 3x+1\le\sqrt{3x+1} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow h(x)+3x+1<\sqrt{3x+1}$. Τελικά $(1) \Leftrightarrow x=1$.

Διαφορετικά: $x>0 \Rightarrow 3x+1>1 \Rightarrow (3x+1)^1 > (3x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3x+1>\sqrt{3x+1}$, ενώ

$-\frac{1}{3}\le x<0 \Rightarrow 0\le 3x+1<1 \Rightarrow (3x+1)^1 \le (3x+1)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow 3x+1\le\sqrt{3x+1}$ κλπ.

Εξισώσεις αυτού του χαρακτήρα θα μπορούσαν να ήταν π.χ. οι $\frac{x}{x^2-x+1}+3x+1=\sqrt{3x+1}$,

$\eta\mu x+3x+1=\sqrt{3x+1}$ κλπ.

Παράδειγμα 6: Να λυθεί η εξίσωση $x^3+x-7=\sqrt{x^2+5}$ (1)

Λύση: Παρατηρούμε ότι αυτή η εξίσωση ΔΕΝ είναι της μορφής που εξετάζουμε (αντί της $\alpha x+\beta$ έχουμε τη x^2+5). Ωστόσο μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε με την ίδια μέθοδο.

Προφανής ρίζα η $x_0=2$ και $(1) \Leftrightarrow h(x)+x+1=\sqrt{x^2+5}$, όπου γνησίως αύξουσα συνάρτηση με

$h(2)=0$ και $x+1>\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x^2+2x+1>x^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x>2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$, ενώ $x+1<\sqrt{x^2+5} \Leftrightarrow$

$x<-1$ ή $\begin{cases} x\ge -1 \\ x^2+2x+1<x^2+5 \end{cases} \Leftrightarrow x<-1$ ή $-1\le x<2 \Leftrightarrow x<2$.

Επομένως: $x>2\Rightarrow\begin{cases}h(x)>h(2)=0\\x+1>\sqrt{x^2+5}\end{cases}\Rightarrow h(x)+x+1>\sqrt{x^2+5}$

και $x<2\Rightarrow\begin{cases}h(x)<h(2)=0\\x+1<\sqrt{x^2+5}\end{cases}\Rightarrow h(x)+x+1<\sqrt{x^2+5}$. Άρα $(1)\Leftrightarrow x=2$.

Αν αντικαταστήσουμε στην παραπάνω εξίσωση τη συνάρτηση x^3-8 με γνησίως αύξουσα συνάρτηση $g(x)$ με $g(2)=0$ δημιουργούμε και πάλι πλήθος εξισώσεων με μοναδική ρίζα $x_0=2$.

Παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων είναι οι: $(x-1)^5+x=\sqrt{x^2+5},\quad (x-1)\cdot|x-1|+x=\sqrt{x^2+5}$

$2^{x-2}+x=\sqrt{x^2+5},\ \ln(x-1)+x+1=\sqrt{x^2+5}$ κλπ

Παράδειγμα 7: Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+3}=\sqrt[4]{x+3}$ (1)

Λύση: Παρατηρούμε ότι η $x_0=-2$ είναι ρίζα της εξίσωσης, ενώ το πεδίο ορισμού της είναι το διάστημα $[-2,+\infty)$. Αυτή η εξίσωση είναι διαφορετικής μορφής από τις προηγούμενες (αντί της γx+δ έχουμε τη $\sqrt{x+3}$), ωστόσο και αυτή μπορεί να αντιμετωπιστεί ομοίως.

Έχουμε: $(1)\Leftrightarrow h(x)+\sqrt{x+3}<\sqrt[4]{x+3}$ όπου $h(x)=\sqrt[3]{x+2}$ γνησίως αύξουσα συνάρτηση με $h(-2)=0$

και $\sqrt{x+3}>\sqrt[4]{x+3}\Leftrightarrow(x+3)^2>x+3\Leftrightarrow(x+3)\cdot(x+2)>0\Leftrightarrow x>-2$. Επομένως:

$x>-2\Rightarrow\begin{cases}h(x)>h(-2)=0\\\sqrt{x+3}>\sqrt[4]{x+3}\end{cases}\Rightarrow h(x)+\sqrt{x+3}>\sqrt[4]{x+3}$. Άρα $(1)\Leftrightarrow x=-2$.

Διαφορετικά: $x>-2\Rightarrow x+3>1\Rightarrow(x+3)^{\frac{1}{2}}>(x+3)^{\frac{1}{4}}\Rightarrow\sqrt{x+3}>\sqrt[4]{x+3}$ κλπ.

Παρόμοιες εξισώσεις είναι οι: $x^3+\sqrt{x+3}+8=\sqrt[4]{x+3},\quad 2^{x+2}+\sqrt{x+3}-1=\sqrt[4]{x+3}$.

Σχόλιο: Σχετικά με κάποιες οδηγίες του Ι.Ε.Π.

Με αφορμή την παραπάνω μεθοδολογία για τις άρρητες εξισώσεις παραθέτουμε το παρακάτω σχόλιο που συνδέει τις ρίζες και τις δυνάμεις με ρητό εκθέτη.

Στη συζήτηση που έγινε κατά τη συνεδρίαση της Συντακτικής Επιτροπής του «Ευκλείδη Β΄» στις 4/12/2017 τέθηκε το θέμα αν επιτρέπεται ή όχι να παραλείψουμε τις ιδιότητες $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}=\sqrt[\nu\cdot\mu]{\alpha}$ και $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ αφού σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. αντιμετωπίζονται ευκολότερα μέσω των δυνάμεων με ρητό εκθέτη. Είναι προφανές ότι αυτό είναι **ανακόλουθο** και **παραπλανητικό**, αφού οι ιδιότητες των δυνάμεων με ρητό εκθέτη αποδεικνύονται μέσω των ιδιοτήτων των ριζών και όχι αντίστροφα. Αρχικά χωρίς τις ιδιότητες των ριζών δεν μπορούμε να αποδείξουμε καν ότι ο ορισμός $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ όταν $\alpha\ge0$ είναι ανεξάρτητος της μορφής του ρητού $\frac{\mu}{\nu}$. Δηλαδή ότι αν $\frac{\mu}{\nu}=\frac{\kappa}{\lambda}$ (1), τότε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}=\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$, που σημαίνει $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}$. Πράγματι, γι' αυτό αρκεί: $\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\nu\cdot\lambda}=\left(\sqrt[\lambda]{\alpha^{\kappa}}\right)^{\nu\cdot\lambda}$, ή $\sqrt[\nu]{(\alpha^{\mu})^{\nu\cdot\lambda}}=\sqrt[\lambda]{(\alpha^{\kappa})^{\nu\cdot\lambda}}$, ή τελικά αρκεί $\alpha^{\mu\cdot\lambda}=\alpha^{\kappa\cdot\nu}$ που ισχύει, αφού (1) ⇒μ·λ=κ·ν. Μετά από αυτό έχουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}=\alpha^{\frac{\mu_1}{\rho}}\cdot\alpha^{\frac{\kappa_1}{\rho}}=\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu_1}}\cdot\sqrt[\rho]{\alpha^{\kappa_1}}=\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu_1}\cdot\alpha^{\kappa_1}}=\sqrt[\rho]{\alpha^{\mu_1+\kappa_1}}=\alpha^{\frac{\mu_1+\kappa_1}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu_1}{\rho}}\cdot\alpha^{\frac{\kappa_1}{\rho}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\cdot\alpha^{\frac{\kappa}{\lambda}}$$

Επίσης $\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}}=\sqrt[\lambda]{\left(\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\kappa}}=\sqrt[\lambda]{\left(\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}\right)^{\kappa}}=\sqrt[\lambda]{\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu\cdot\kappa}}}=\sqrt[\nu\cdot\lambda]{\alpha^{\mu\cdot\kappa}}=\alpha^{\frac{\mu\cdot\kappa}{\nu\cdot\lambda}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}\cdot\frac{\kappa}{\lambda}}$ κ.λ.π. (βλέπε Αντώνη Κ. Κυριακόπουλου «Υποψηφιακαί Ασκήσεις και Βασικωτέρα Θεωρία Άλγεβρας σελίδες 82–83, έκδοση 1975). Εξάλλου η ιδιότητα $\sqrt[\nu\cdot\rho]{\alpha^{\mu\cdot\rho}}=\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ έπρεπε να τονιστεί ότι για να ισχύει δεν είναι απαραίτητο να είναι α≥0 αλλά $\alpha^{\mu}\ge0$. Πιθανόν λοιπόν να είναι α<0 και μ άρτιος.

Τότε όμως δεν έχουμε: $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, αλλά $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}=\sqrt[\nu]{(-\alpha)^{\mu}}=(-\alpha)^{\frac{\mu}{\nu}}$.

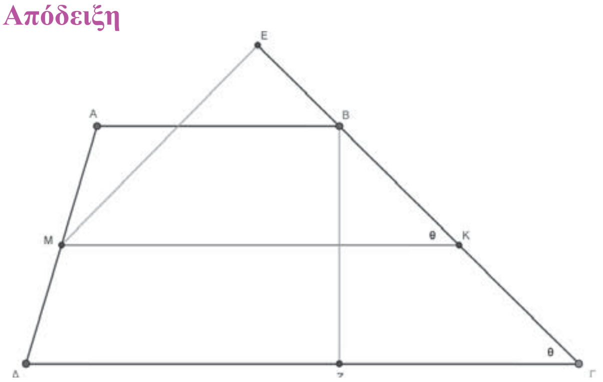
Γεωμετρία Β΄ Λυκείου (Εμβαδά)

Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς – Κεφαλονιά

1^{ο} Θέμα: Πρόκειται για την Άσκηση 5 από τις «Αποδεικτικές Ασκήσεις» της ενότητας 10.3 του τρέχοντος σχολικού βιβλίου. Η παρακάτω λύση είναι διαφορετική από αυτήν του βιβλίου λύσεων και αξίζει να τη δούμε.

Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.

Απόδειξη



Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ, όπου ΑΒ, ΓΔ οι βάσεις του κα;ι ΒΖ το ύψος του. Είναι γνωστό από την Α΄ Λυκείου ότι αν Μ, Κ τα μέσα των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα, τότε η ΜΚ είναι παράλληλη των βάσεων και ίση με το ημιάθροισμά τους. Άρα.. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $MK \cdot BZ = ME \cdot B\Gamma$, ή $\dfrac{MK}{B\Gamma} = \dfrac{ME}{BZ}$ που ισχύει αφού τα ορθογώνια τρίγωνα ΖΓΒ, ΕΚΜ είναι όμοια ($M\hat{K}E = Z\hat{\Gamma}B$, ως εντός, εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΜΚ, ΔΓ που τέμνονται από τη ΒΓ).

2^{ο} Θέμα: Το παρακάτω θέμα δόθηκε στον Πολυτεχνικό Κύκλο το 1974.

Να υπολογιστεί το άθροισμα:

$$\Sigma = \frac{\rho_\alpha \cdot \rho_\beta \cdot \rho_\gamma}{\rho^2} - \frac{\rho \cdot \rho_\beta \cdot \rho_\gamma}{\rho_\alpha^{\ 2}} - \frac{\rho \cdot \rho_\gamma \cdot \rho_\alpha}{\rho_\beta^{\ 2}} - \frac{\rho \cdot \rho_\alpha \cdot \rho_\beta}{\rho_\gamma^{\ 2}}$$

Απόδειξη: Από τη θεωρία είναι γνωστό ότι $\rho = \dfrac{E}{\tau}$,

$\rho_\alpha = \dfrac{E}{\tau - \alpha}$, $\rho_\beta = \dfrac{E}{\tau - \beta}$, $\rho_\gamma = \dfrac{E}{\tau - \gamma}$

Αν γίνουν οι αντικαταστάσεις και οι απλοποιήσεις έχουμε:

$$\Sigma = \frac{E \cdot \tau^2}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} - \frac{E \cdot (\tau-\alpha)^2}{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} - \frac{E \cdot (\tau-\beta)^2}{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)} - \frac{E \cdot (\tau-\gamma)^2}{\tau(\tau-\beta)(\tau-\alpha)} =$$

$$= \frac{E \cdot \left[\tau^3 - (\tau-\alpha)^3 - (\tau-\beta)^3 - (\tau-\gamma)^3\right]}{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)\tau} =$$

$$= \frac{E \cdot \left[\tau^3 - (\tau-\alpha)^3 - (\tau-\beta)^3 - (\tau-\gamma)^3\right]}{E^2} =$$

$$= \frac{\tau^3 - \left[(\tau-\alpha)^3 + (\tau-\beta)^3 + (\tau-\gamma)^3\right]}{E}$$

Από την Άλγεβρα γνωρίζουμε ότι ισχύει

$x^3 + y^3 + z^3 = (x+y+z)^3 - 3(x+y)(y+z)(z+x)$ και

έτσι $(\tau-\alpha)^3 + (\tau-\beta)^3 + (\tau-\gamma)^3 =$

$= (\tau-\alpha+\tau-\beta+\tau-\gamma)^3 -$

$-3(\tau-\alpha+\tau-\beta)(\tau-\beta+\tau-\gamma)(\tau-\gamma+\tau-\alpha) = \tau^3 - 3\alpha\beta\gamma$

$= \tau^3 - 3\alpha\beta\gamma$. Συνεπώς

$$\Sigma = \frac{\tau^3 - (\tau^3 - 3\gamma\alpha\beta)}{E} = \frac{3\gamma\alpha\beta}{E} = \frac{3 \cdot 4R \cdot E}{E} = 12R$$

3^{ο} Θέμα: Το παρακάτω θέμα προτάθηκε από το Ισραήλ στη Διεθνή Μαθηματική Ολυμπιάδα του 1985. Βέβαια είναι τελείως απλό για διαγωνισμό τόσο μεγάλης σημασίας, ωστόσο είναι κατάλληλο για να το δουν μαθητές λυκείου.

Αποδείξτε ότι το γινόμενο δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι πάντα μεγαλύτερο από το γινόμενο των διαμέτρων του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

Απόδειξη: Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$\beta + \gamma > \alpha \Rightarrow \beta + \gamma + \alpha > 2\alpha \Rightarrow 2\tau > 2\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \tau > \alpha \Rightarrow 4R \cdot \rho \cdot \tau > 4R \cdot \rho \cdot \alpha \Rightarrow$

$4R \cdot E > 4R \cdot \rho \cdot \alpha \Rightarrow \dfrac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{E} \cdot E > 4R \cdot \rho \cdot \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \cdot \beta \cdot \gamma > 4R \cdot \rho \cdot \alpha \Rightarrow \beta \cdot \gamma > 2R \cdot 2\rho$

Β΄ τρόπος: Για να είναι $\beta\gamma > 2R \cdot 2\rho$, αρκεί $\beta\gamma > 2\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4E} 2\dfrac{E}{\tau}$, ή τ>α, ή β+γ>α που ισχύει.

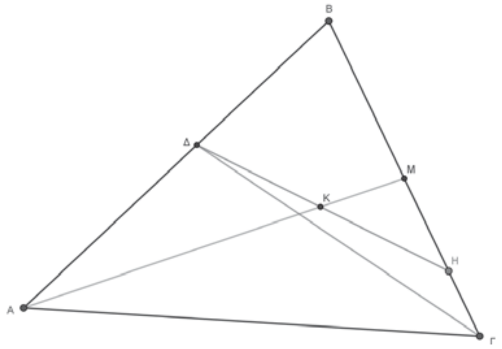
- Με αντίστοιχες σκέψεις προκύπτει ότι $\alpha \cdot \gamma > 2R \cdot 2\rho$ και $\alpha \cdot \beta > 2R \cdot 2\rho$.

  Οπότε $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha \geq 12R\rho$.

4^{ο} Θέμα: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α > β. Θεωρούμε τη διχοτόμο ΓΔ και σημείο Η της ΒΓ τέτοιο ώστε $BH = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τη ΔΗ στο Κ, να αποδείξετε ότι

i) $(B\Delta H) = \dfrac{1}{2}(AB\Gamma)$ **ii)** $(B\Delta KM) = (AKH\Gamma)$

Απόδειξη: i) Φυσικά είναι γνωστό ότι $B\Delta = \dfrac{\gamma\alpha}{\beta+\alpha}$.



Τα τρίγωνα ΒΔΗ, ΑΒΓ έχουν τη γωνία Β κοινή.

Άρα $\dfrac{(B\Delta H)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{B\Delta \cdot BH}{BA \cdot B\Gamma} = \dfrac{\dfrac{\gamma\alpha}{\alpha+\beta}\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\gamma\alpha} = \dfrac{1}{2}$

Συνεπώς $(B\Delta H) = \dfrac{1}{2}(AB\Gamma)$.

ii) Παρατηρούμε αρχικά ότι: $\alpha > \beta \Rightarrow 2\alpha > \beta + \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha > \dfrac{\beta+\alpha}{2} > \dfrac{\alpha}{2} \Rightarrow B\Gamma > BH > BM$. Το σημείο Η βρίσκεται μεταξύ του Μ και του Γ, οπότε $(B\Delta KM) = (B\Delta H) - (HKM) =$

$= \dfrac{1}{2}(AB\Gamma) - (HKM) = (A\Gamma M) - (HKM) = (AKH\Gamma)$

5^{o} Θέμα: **Το** θέμα που ακολουθεί είναι το δεύτερο από τα έξι που δόθηκαν στην IMO 1961, η οποία έγινε στην Ουγγαρία. Το πρότεινε η Πολωνία. Πρόκειται για την περίφημη ανισότητα Weitzenböck. Πρέπει να γραφεί ότι σε εκείνες τις πρώτες IMO μετείχαν μόνο χώρες του λεγόμενου «Συμφώνου της Βαρσοβίας». Παλιές ιστορίες…

Έστω α, β και γ τα μήκη πλευρών τριγώνου του οποίου το εμβαδόν είναι Ε.

Αποδείξτε ότι $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ge 4\sqrt{3}\cdot E$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Απόδειξη: Η παρακάτω απόδειξη είναι μία από τις πολλές που υπάρχουν και μου την έδειξε ο συνάδελφος Θάνος Μάγκος. Από το 1^{o} Θεώρημα Διαμέσου είναι γνωστό ότι

$2\beta^2 + 2\gamma^2 = \alpha^2 + 4{\mu_\alpha}^2 \Rightarrow 2\beta^2 + 2\gamma^2 + 2\alpha^2 = 3\alpha^2 + 4{\mu_\alpha}^2$.

Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται ότι $2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = (\alpha\sqrt{3})^2 + (2\mu_\alpha)^2$. Αν εφαρμόσουμε τη γνωστή ανισότητα $x^2 + y^2 \ge 2xy$ θέτοντας στη θέση του x το $\alpha\sqrt{3}$ και στη θέση του y το $2\mu_\alpha$, προκύπτει ότι $(\alpha\sqrt{3})^2 + (2\mu_\alpha)^2 \ge 2\cdot\alpha\sqrt{3}\cdot 2\mu_\alpha$, δηλαδή $(\alpha\sqrt{3})^2 + (2\mu_\alpha)^2 \ge 4\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot\mu_\alpha$.

Όμως $\mu_\alpha \ge \upsilon_\alpha \Rightarrow 4\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot\mu_\alpha \ge 4\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot\upsilon_\alpha$

$\Rightarrow 4\sqrt{3}\cdot\alpha\cdot\mu_\alpha \ge 4\sqrt{3}\cdot 2E$ Άρα: $2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) \ge 4\sqrt{3}\cdot 2E$, οπότε $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \ge 4\sqrt{3}\cdot E$

6^{o} Θέμα: Το παρακάτω θέμα υπήρχε στο σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας Β΄ Λυκείου των Ν. Βαρουχάκη, Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Αλιμπινήση, Δ. Κοντογιάννη. Συγκεκριμένα πρόκειται για τη 12 της σελίδας 77.

Η μεσοκάθετη στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ "αποκόβει" ένα τρίγωνο με εμβαδόν $\dfrac{1}{3}(AB\Gamma)$. Να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.

Απόδειξη: Έστω ότι η μεσοκάθετος στην υποτείνουσα ΒΓ τέμνει τη ΒΓ στο Μ και την ΑΒ στο Ν. Σύμφωνα με τα δεδομένα $(BMN) = \dfrac{1}{3}(AB\Gamma)$. Φέρνω τη ΓΝ. Η ΝΜ είναι διάμεσος στο τρίγωνο ΒΓΝ, άρα λοιπόν ισχύει: $(BMN) = (\Gamma NM) = \dfrac{1}{3}(AB\Gamma) \quad (1)$.

Συνεπώς $(A\Gamma N) = (AB\Gamma) - (BMN) - (\Gamma NM) =$

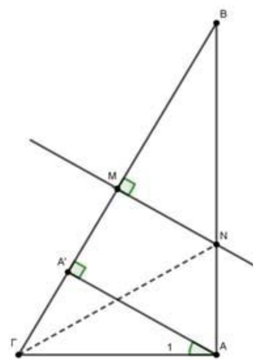
$= (AB\Gamma) - \dfrac{1}{3}(AB\Gamma) - \dfrac{1}{3}(AB\Gamma) = \dfrac{1}{3}(AB\Gamma)$.

Άρα $(1) \Rightarrow \dfrac{1}{2}AN\cdot A\Gamma = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}AB\cdot A\Gamma \Rightarrow AN = \dfrac{1}{3}AB$.

Αυτό σημαίνει ότι $BN = \dfrac{2}{3}AB$. Το ΑΓΜΝ είναι εγγράψιμο γιατί δυο απέναντι γωνίες του είναι ορθές. Αν πάρω τη δύναμη του Β ως προς τον κύκλο που διέρχεται από τα Α,Γ,Μ,Ν προκύπτει ότι $AB\cdot BN = BM\cdot B\Gamma \Rightarrow$

$\Rightarrow AB\cdot\dfrac{2}{3}AB = \dfrac{1}{2}B\Gamma\cdot B\Gamma \Rightarrow AB^2 = \dfrac{3}{4}B\Gamma^2$.

Με εφαρμογή του Πυθαγορείου Θεωρήματος στο τρίγωνο ΑΒΓ βρίσκεται εύκολα ότι $A\Gamma^2 = \dfrac{1}{4}B\Gamma^2$.



Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $A\Gamma = \dfrac{1}{2}B\Gamma$, δηλαδή ότι $B = 30^{o}$.

Προφανώς πλέον $\Gamma = 60^{o}$.

Β΄ Τρόπος: Αν ΑΑ΄ το ύψος του ΑΒΓ, τότε $\eta\mu B = \eta\mu A_1 = \dfrac{A'\Gamma}{\beta} = \dfrac{A'\Gamma}{\alpha\eta\mu B} \Rightarrow \eta\mu^2 B = \dfrac{A'\Gamma}{\alpha}$.

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το Α΄Γ ως συνάρτηση (πολλαπλάσιο) του α.

Έχουμε: $\dfrac{1}{3} = \dfrac{(BMN)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{BM\cdot BN}{B\Gamma\cdot BA} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{BN}{BA} \Rightarrow \dfrac{BA}{BN} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{BA'}{BM}=\frac{3}{2}\Rightarrow BA'=\frac{3}{2}BM=\frac{3}{2}\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{3\alpha}{4}\Rightarrow A\Gamma'=\frac{\alpha}{4}$$

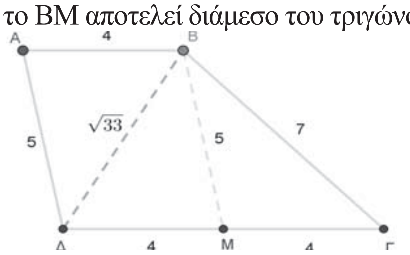
Άρα: $\eta\mu^2 B=\frac{A\Gamma'}{\alpha}=\frac{\frac{\alpha}{4}}{\alpha}=\frac{1}{4}\Rightarrow \eta\mu B=\frac{1}{2}\Rightarrow \hat{B}=30^o$

και $\hat{\Gamma}=60^o$. Αν το Ν ήταν σημείο της πλευράς ΑΓ τότε $\hat{\Gamma}=30^o, \hat{B}=60^o$. Προφανώς $N\not\equiv A$.

7ο Θέμα: Το θέμα υπάρχει ως άλυτο στο σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας Λυκείου των Πούλου, Θωμαίδη και Ξένου, στην παράγραφο 10.2.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ=4, ΓΔ=8 και μη παράλληλες πλευρές ΑΔ=5, ΒΓ=7. Να βρεθεί το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

Απόδειξη: Σχεδιάζουμε την παράλληλη από το Α προς την ΑΔ που τέμνει την ΔΓ στο Μ.Το ΑΒΜΔ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα ΒΜ=ΑΔ=5. Επίσης ΔΜ=ΑΒ=4. Έτσι λοιπόν ΜΓ=ΔΓ–ΔΜ=8–4=4. Συνεπώς το ΒΜ αποτελεί διάμεσο του τριγώνου ΒΓΔ.



Αν εφαρμοστεί το 1ο Θεώρημα της Διαμέσου στο τρίγωνο αυτό έχουμε ότι $B\Delta^2+B\Gamma^2=2\cdot BM^2+\frac{\Delta\Gamma^2}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow B\Delta^2=2\cdot BM^2+\frac{\Delta\Gamma^2}{2}-B\Gamma^2\Rightarrow B\Delta^2=2\cdot 5^2+\frac{8^2}{2}-7^2$$

και βρίσκουμε ότι $B\Delta=\sqrt{33}$. Αν εφαρμοστεί ο τύπος του Ήρωνα στο τρίγωνο ΒΓΔ έχω ότι:

$$(B\Gamma\Delta)=\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}\cdot\frac{\sqrt{33}-1}{2}\cdot\frac{\sqrt{33}+1}{2}\cdot\frac{15-\sqrt{33}}{2}}=$$

$=...=2^3\sqrt{6}$. Τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ έχουν ίσα ύψη. Άρα $\frac{(AB\Delta)}{(B\Gamma\Delta)}=\frac{AB}{\Delta\Gamma}\Rightarrow\frac{(AB\Delta)}{(B\Gamma\Delta)}=\frac{4}{8}\Rightarrow\frac{(AB\Delta)}{(B\Gamma\Delta)}=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{(AB\Delta)+(B\Gamma\Delta)}{(B\Gamma\Delta)}=\frac{1+2}{2}$ και έτσι $(AB\Gamma\Delta)\frac{3}{2}(B\Gamma\Delta)$.

Συνεπώς $(AB\Gamma\Delta)=\frac{3}{2}\cdot 2^3\sqrt{6}=12\sqrt{6}$.

8ο Θέμα: Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $R\geq 2\rho$.

Πρόκειται για μια ανισότητα του Euler. $R\geq 2\rho$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{\alpha\beta\gamma}{4E}\geq\frac{2E}{\tau}$, ή $\alpha\beta\gamma\geq\frac{8E^2}{\tau}$, ή $\alpha\beta\gamma\geq 8(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$.

Πράγματι $\alpha^2\geq\alpha^2-(\beta-\gamma)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\alpha^2\geq(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha^2\geq(2\tau-2\beta)(2\tau-2\gamma)\Rightarrow\alpha^2\geq 4(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$$

Ομοίως $\beta^2\geq(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)$ και $\gamma^2\geq(\tau-\alpha)(\tau-\beta)$.

Άρα $\alpha^2\beta^2\gamma^2\geq 64(\tau-\alpha)^2(\tau-\beta)^2(\tau-\gamma)^2$, οπότε $\alpha\beta\gamma\geq 8(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$.

Σημείωση: Η κλασική απόδειξη προκύπτει από την ισότητα $(IO)^2=R^2-2R\rho$ (1), όπου Ι το έγκεντρο και Ο το περίκεντρο του ΑΒΓ η οποία αποδεικνύεται μέσω της $\Delta^{I}_{(O,R)}=-2R\rho$ (2). Μια σύντομη απόδειξη της (2) βρίσκουμε στη Σχολική Θεωρητική Γεωμετρία Β΄ Λυκείου των: Α. Αλιμπινίση – Γ. Δημάκου – Π. Δρακόπουλου – Α. Κυριαζή – Γ. Τασσόπουλου, Άσκηση 11, σελίδα 153 την εξής: $\Delta^{I}_{(O,R)}=IM\cdot IA=-M\Gamma\cdot IA=$

$$=-MN\eta\mu N_1\frac{I\Delta}{\eta\mu A_1}=-MN\cdot I\Delta=-2R\rho$$

Εύκολα πλέον $(2)\Rightarrow(1)$ και $(1)\Rightarrow R\geq 2\rho$.

- Η ισότητα βάβαια $M\Gamma\cdot IA=MN\cdot I\Delta$, δηλαδή η $\frac{IA}{I\Delta}=\frac{MN}{M\Gamma}$ προκύπτει και απ' ευθείας από την ομοιότητα των ορθογωνίων τριγώνων ΔΑΙ, ΓΜΝ.

9ο Θέμα: Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq 4\sqrt{3}E$$

Απόδειξη: Για κάθε $x,y,\omega\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$(x+y+\omega)^2-3(xy+y\omega+\omega x)=$$

$$=x^2+y^2+\omega^2-xy-y\omega-\omega x=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x-y)^2+(y-\omega)^2+(\omega-x)^2\right]\geq 0.$$

Άρα $(x+y+\omega)^2\geq 3(xy+y\omega+\omega x)$ (1) και

$x^2+y^2+\omega^2\geq xy+y\omega+\omega x$ (2)

Σύμφωνα με την (1) λοιπόν έχουμε:

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\geq 3(\alpha\beta\cdot\beta\gamma+\beta\gamma\cdot\gamma\alpha+\gamma\alpha\cdot\alpha\beta)\Rightarrow$$

$$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\geq 3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)\Rightarrow(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\geq 3\cdot 4ER\cdot 2\tau$$

Όμως είδαμε πριν ότι $R\geq 2\rho$. Άρα

$3\cdot 4ER\cdot 2\tau\geq 3\cdot 4E\cdot 2\rho\cdot 2\tau\Rightarrow$

$$\Rightarrow 3\cdot 4ER\cdot 2\tau\geq 3\cdot 4E\cdot 2\rho\cdot 2\tau\Rightarrow 3\cdot 4ER\cdot 2\tau\geq 3\cdot 16E^2$$

Συνεπώς ισχύει $(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2\geq 3\cdot 16E^2$, οπότε: $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\geq 4\sqrt{3}E$.

- Αν ξέρουμε αυτήν την ανισότητα μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Weitzenböck που προαναφέραμε πολύ εύκολα. Πράγματι σύμφωνα με τη (2) έχουμε:
  $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, οπότε $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq 4\sqrt{3}E$.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ευθεία –Κύκλος

Κυριακοπούλου Κωνσταντίνα

Άσκηση 1η: Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+y^2=4$ και το σημείο M(1,3).

Α) Να αποδείξετε ότι από το M άγονται δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο.

Β) Αν Α,Β τα σημεία επαφής αυτών των εφαπτομένων με τον κύκλο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ΑΒ είναι η ΑΒ: x+3y=4.

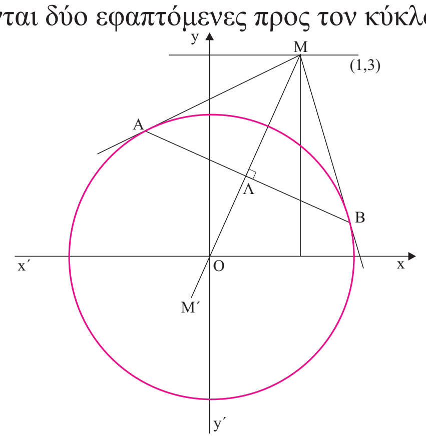
Γ) Να βρεθεί η απόσταση του Μ από την ευθεία ΑΒ.

Δ) Να βρεθεί η εξίσωση της διχοτόμου της γωνίας ΑΜΒ.

Ε) Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο του Μ ως προς την ΑΒ.

Ζ) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΜΑΒ.

Λύση: Α) Ο κύκλος έχει κέντρο Ο(0,0) και ακτίνα ρ=2. Είναι $OM=\sqrt{10}>\rho$. Άρα το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου. Επομένως από το Μ άγονται δύο εφαπτόμενες προς τον κύκλο.



Β) Έστω $A(x_1,y_1)$ και $B(x_2,y_2)$ τα σημεία επαφής. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων του C στα Α και Β αντίστοιχα είναι οι $\varepsilon_1: xx_1+yy_1=4$ και $\varepsilon_2: xx_2+yy_2=4$ και διέρχονται από το Μ αν και μόνο αν $x_1+3y_1=4$ και $x_2+3y_2=4$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση x+3y=4 επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Α και Β. Άρα παριστάνει ευθεία που διέρχεται από τα Α και Β. Από δύο σημεία όμως διέρχεται μοναδική ευθεία. Άρα ΑΒ: x+3y=4.

Γ) Είναι ΑΒ:x+3y –4=0, οπότε

$$d(M,AB)=\frac{|1+9-4|}{\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

Δ) Γνωρίζουμε από τη Γεωμετρία ότι η διακεντρική ευθεία ΜΟ είναι διχοτόμος της ΑΜΒ. Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η ΟΜ: y=3x.

Ε) Η διακεντρική ευθεία ΜΟ είναι κάθετη στην ΑΒ. Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Λ των ΑΒ,ΟΜ από τη λύση του συστήματος: $\begin{cases} y=3x \\ x+3y=4 \end{cases}$. Είναι $\Lambda\left(\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right)$. Ένα σημείο Μ΄(κ,λ) είναι συμμετρικό του Μ ως προς την ΑΒ αν και μόνο αν: $\begin{cases} \frac{1+\kappa}{2}=\frac{2}{5} \\ \frac{3+\lambda}{2}=\frac{6}{5} \end{cases}$, δηλαδή $\begin{cases} \kappa=-\frac{1}{5} \\ \lambda=-\frac{3}{5} \end{cases}$.

Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $M'\left(-\frac{1}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

Ζ) Είναι $O\Lambda=d(O,AB)=\frac{2\sqrt{10}}{5}$. Από μετρικές σχέσεις στο ορθογώνιο τρίγωνο ΟΒΜ παίρνουμε:

$AB^2=M\Lambda\cdot\Lambda O=\frac{3\sqrt{10}}{5}\cdot\frac{2\sqrt{10}}{5}=\frac{60}{25}$. Έτσι $AB=\frac{\sqrt{60}}{5}$. Είναι $E_{MAB}=\frac{1}{2}M\Lambda\cdot 2AB=\frac{6\sqrt{6}}{5}$.

Άσκηση 2η: Δίνονται οι ευθείες ε_1:4x –y+3=0, ε_2: 2x+y+3=0 και ε_3:x+2μy –3=0, $\mu\in\mathbb{R}$.

Α) Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία οι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Β) Για μ=0, να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ σχηματίζουν αμβλυγώνιο τρίγωνο.

Γ) Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$.

Λύση: Α) Βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Α των $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} 4x-y+3=0 \\ 2x+y+3=0 \end{cases}$. Έτσι Α(–1, –1). Το Α θα ανήκει και στην ε_3 αν και μόνο αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ε_3.

Είναι –1 –2μ –3=0⇔μ= –2.

Β) Για μ=0 είναι ε_3: x=3. Έστω Β το σημείο τομής της ε_1 με την ε_3. Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} 4x-y+3=0 \\ x=3 \end{cases}$ βρίσκουμε Β(3,15). Επίσης λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} 2x+y+3=0 \\ x=3 \end{cases}$ βρίσκουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Γ των ευθειών $\varepsilon_2,\varepsilon_3$. Είναι Γ(3, –9). Επίσης $\overrightarrow{AB}=(4,16)$ και $\overrightarrow{A\Gamma}=(4,-8)$. Έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{A\Gamma}|}=\ldots=-\frac{7\sqrt{85}}{85}<0,$$

άρα η γωνία ΒΑΓ του τριγώνου είναι αμβλεία.

Γ) Ένα σημείο Μ(x,y) ανήκει σε μία από τις διχοτόμους των γωνιών που σχηματίζουν οι ευθείες ε

$_1$ και ε_2, αν και μόνο αν $d(M,\varepsilon_1) = d(M,\varepsilon_2)$ (1).

Είναι $(1) \Leftrightarrow \frac{|4x-y+3|}{\sqrt{17}} = \frac{|2x+y+3|}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(4\sqrt{5}-2\sqrt{17}\right)x - \left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right)y + 3\left(\sqrt{5}-\sqrt{17}\right) = 0$ (2)

ή $\Leftrightarrow \left(4\sqrt{5}+2\sqrt{17}\right)x - \left(\sqrt{5}-\sqrt{17}\right)y + 3\left(\sqrt{5}+\sqrt{17}\right) = 0$ (3).

Οι (2) και (3) είναι οι ζητούμενες εξισώσεις.

Άσκηση 3η: Δίνεται ο κύκλος C με εξίσωση $x^2+(y-2)^2=4$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο Λ(3,1).

Λύση: Ο κύκλος έχει κέντρο K(0,2) και ακτίνα ρ=2. Οι ευθείες που διέρχονται από το Λ (3,1) είναι της μορφής ε: x=3 ή ε:y –1=λ(x –3). Αν ε:x=3, τότε d(K,ε)=3≠ρ, άρα η x=0 δεν εφάπτεται στον κύκλο.

Έστω ότι ε:y –1=λ(x –3)⇔λx –y+1 –3λ=0.

Η ε εφάπτεται στον κύκλο αν και μόνο αν

$d(K,\varepsilon) = \rho \Leftrightarrow \frac{|-2+1-3\lambda|}{\sqrt{\lambda^2+1}} = 2 \Leftrightarrow 5\lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{-3+2\sqrt{6}}{5} \text{ ή } \lambda = \frac{-3-2\sqrt{6}}{5}\right)$.

Οι ζητούμενες εφαπτομένες είναι οι ευθείες με εξισώσεις: $\frac{-3+2\sqrt{6}}{5}x - y + \frac{14-6\sqrt{6}}{5} = 0$ και

$\frac{-3-2\sqrt{6}}{5}x - y + \frac{14+6\sqrt{6}}{5} = 0$.

Άσκηση 4η : Δίνονται τα σημεία Α(1,2), Β(–3,4), Γ(5,6).

Α) Να αποδειχθεί ότι τα Α,Β,Γ σχηματίζουν τρίγωνο.

Β) Να βρεθεί η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που είναι ομόκεντρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου και ορίζει πάνω στην ευθεία ε:x+y+1=0 χορδή μήκους 4.

Λύση: Α) Είναι: $\overrightarrow{AB} = (-4,2)$, $\overrightarrow{A\Gamma} = (4,4)$ και $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}\right) = -24 \neq 0$. Επομένως τα Α,Β,Γ είναι μη συνευθειακά, άρα σχηματίζουν τρίγωνο.

Β) Έστω C ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου. Ο C έχει εξίσωση της μορφής

C: $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, όπου $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$.

Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται από τις συντεταγμένες των Α,Β,Γ αφού αυτά ανήκουν στον κύκλο. Έχουμε: $\begin{cases} 5 + A + 2B + \Gamma = 0 \\ 25 - 3A + 4B + \Gamma = 0 \\ 61 + 5A + 6B + \Gamma = 0 \end{cases}$.

Λύνοντας το σύστημα αυτό βρίσκουμε

$A = -\frac{4}{3}$, $B = -\frac{38}{3}$ και $\Gamma = \frac{65}{3}$.

Είναι $A^2 + B^2 - 4\Gamma = \frac{680}{9} > 0$. Η εξίσωση του κύκλου είναι η $x^2 + y^2 - \frac{4}{3}x - \frac{38}{3}y + \frac{65}{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{3}\right)^2 = \frac{170}{9}$

Γ) Ο κύκλος του οποίου ζητάμε την εξίσωση είναι ομόκεντρος με τον C άρα έχει και αυτός κέντρο $K\left(\frac{2}{3}, \frac{19}{3}\right)$. Αν d είναι η απόσταση του Κ από την ευθεία ε, λ το μήκος της χορδής και ρ η ακτίνα του κύκλου, τότε ισχύει η σχέση: $\rho^2 = d^2 + \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$.

Είναι $d = \frac{\left|\frac{2}{3} + \frac{19}{3} + 1\right|}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ και λ=4. Βρίσκουμε ρ=6, οπότε ο ζητούμενος κύκλος έχει εξίσωση:

$$\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{19}{3}\right)^2 = 36.$$

Άσκηση 5η: Α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $y^2 + 3x^2 - \kappa y + \sqrt{3}x(\kappa - 2y) = 0$ με $\kappa \in (0, +\infty)$ παριστάνει 2 παράλληλες ευθείες.

Β) Να βρεθεί η απόσταση αυτών των ευθειών.

Γ) Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοπαράλληλης αυτών των ευθειών.

Λύση: Α) Είναι: $y^2 + 3x^2 - \kappa y + \sqrt{3}x(\kappa - 2y) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y^2 + 3x^2 - \kappa y + \sqrt{3}\kappa x - 2\sqrt{3}xy = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y - \sqrt{3}x)^2 - \kappa(y - \sqrt{3}x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y - \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x - \kappa) = 0$ (1).

Η (1) παριστάνει τις ευθείες $\varepsilon_1: y - \sqrt{3}x = 0$ και $y - \sqrt{3}x - \kappa = 0$. Οι ε_1,ε_2 είναι παράλληλες αφού $\lambda_{\varepsilon_1} = \lambda_{\varepsilon_2} = \sqrt{3}$ και δεν συμπίπτουν $(\kappa \neq 0)$.

Β) Βρίσκουμε ένα τυχαίο σημείο της ε_1, π.χ. το Ο(0,0). Είναι $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = d(O, \varepsilon_2) = \frac{|\kappa|}{2} = \frac{\kappa}{2}$.

Γ) Βρίσκουμε ένα τυχαίο σημείο της ε_2, π.χ. το Α(0,κ). Η μεσοπαράλληλη μ των ε_1,ε_2 διέρχεται από το μέσο $M\left(0, \frac{\kappa}{2}\right)$ του ΑΟ και είναι παράλληλη στις ε_1,ε_2 επομένως έχει $\lambda = \sqrt{3}$.

Επομένως $\mu: y - \frac{\kappa}{2} = \sqrt{3}x$.

Άσκηση 6η: Θεωρούμε τους κύκλους C_1: $(x-2)^2+(y-7)^2=225$ και C_2: $(x+4)^2+(y+1)^2=25$.

Α) Να δείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.
Β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
Γ) Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των δύο κύκλων.
Δ) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του C_1 που είναι παράλληλη στην ευθεία
δ: x – 2y + 4 = 0.

Λύση: **Α)** Ο κύκλος C_1 έχει κέντρο $K_1(2,7)$ και ακτίνα $\rho_1=15$ ενώ ο κύκλος C_2 έχει κέντρο $K_2(-4,-1)$ και ακτίνα $\rho_2=5$. Είναι: $(K_1K_2)=\sqrt{(2+4)^2+(7+1)^2}\cdot 10$
Επίσης $\rho_1 - \rho_2=10$. Άρα οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.

Β) Έστω $M(x_1,y_1)$ το σημείο επαφής. Είναι:
$\overrightarrow{K_1M}=3\overrightarrow{K_2M}\Leftrightarrow(x_1-2,y_1-7)=3(x_1+4,y_1+1)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x_1-2,\ y_1-7)=(3x_1+12,\ 3y_1+3)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ ($x_1=-7$ και $y_1=-5$). Επομένως $M(-7,-5)$.

Γ) Η κοινή τους εφαπτομένη ε είναι η ευθεία που είναι κάθετη στην K_1M στο M. Είναι:
$\lambda_{K_1M}=\frac{4}{3}\Rightarrow\lambda_\varepsilon=-\frac{3}{4}$. Η εξίσωση της ε είναι:
$y+5=-\frac{3}{4}(x+7)\Leftrightarrow 4y+3x=-41$.

Δ) Έστω μ ευθεία παράλληλη προς την ευθεία δ. Η μ έχει εξίσωση της μορφής $y=\frac{1}{2}x+\beta$ και εφάπτεται του C_1 αν και μόνο αν $d(K_1,\mu)=\rho_1$. Η εξίσωση της μ γράφεται $x-2y+2\beta=0$. Έχουμε:
$d(K_1,\mu)=\rho_1\Leftrightarrow\frac{|2-14+2\beta|}{\sqrt5}=15\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(\beta=6+\frac{15\sqrt5}{2}$ ή $\beta=6-\frac{15\sqrt5}{2})$.
Συνεπώς υπάρχουν δύο εφαπτόμενες του C_1 παράλληλες προς την δ και είναι οι ευθείες με εξισώσεις $y=x+6+\frac{15\sqrt5}{2}$ και $y=\frac{1}{2}x+6-\frac{15\sqrt5}{2}$.

Άσκηση 7η: Δίνεται ευθεία ε: y=5x –15 η οποία τέμνει τους άξονες στα σημεία Α,Β. Από το Μ(4,7) φέρνουμε παράλληλη στην ΑΒ η οποία τέμνει τους άξονες στα Γ,Δ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ.

Λύση: Για να βρούμε το σημείο τομής της ε με τον y΄y θέτουμε x=0 στην εξίσωσή της. Βρίσκουμε $A(0,-15)$. Για να βρούμε το σημείο τομής της ε με τον x΄x θέτουμε y=0 στην εξίσωσή της. Βρίσκουμε Β(3,0).Η ευθεία που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το Μ έχει εξίσωση $\mu: y-7=5(x-4)\Leftrightarrow y=5x-13$. Έστω Γ, Δ τα σημεία τομής της μ με τους άξονες yy΄ αντίστοιχα.
Βρίσκουμε όπως πριν $\Gamma(\frac{13}{5},0)$ και $\Delta(0,-13)$.
Ακόμη $\upsilon=d(B,\Gamma\Delta)=\frac{|5\cdot3-0-13|}{\sqrt{26}}=\frac{\sqrt{26}}{13}$,
$AB=\sqrt{234}=3\sqrt{26}$ και $\Gamma\Delta=\frac{13\sqrt{26}}{5}$.
Έτσι: $E_{AB\Gamma\Delta}=\frac{(AB+\Gamma\Delta)\upsilon}{2}=\frac{28}{5}$.

Άσκηση 8η : Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Ο(0,0) και το τμήμα της που περιέχεται ανάμεσα στις ευθείες ε_1:4x –y+1=0 και ε_2:4x –y+9=0 να έχει μήκος 8.

Λύση: Οι ευθείες που διέρχονται από το Ο είναι της μορφής x=0 (κατακόρυφη) και y=λx, $\lambda\in\mathbb{R}$. Η x=0 τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ στα Α(0,1), Β(0,9) αντίστοιχα. Είναι ΑΒ=8 επομένως η x=0 είναι μία από τις ζητούμενες ευθείες. Η y=λx τέμνει τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ όταν $\lambda\neq4$. Βρίσκουμε τα σημεία τομής Κ,Λ της y=λx με τις $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ αντίστοιχα.

Είναι: $\begin{cases}y=\lambda x\\ y=4x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\lambda x\\ (\lambda-4)x=1\end{cases}\overset{\lambda\neq4}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=\frac{\lambda}{\lambda-4}\\ x=\frac{1}{\lambda-4}\end{cases}$.

Επίσης: $\begin{cases}y=\lambda x\\ y=4x+9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\lambda x\\ (\lambda-4)x=9\end{cases}\overset{\lambda\neq4}{\Leftrightarrow}\begin{cases}y=\frac{9\lambda}{\lambda-4}\\ x=\frac{9}{\lambda-4}\end{cases}$.

Άρα $K\left(\frac{1}{\lambda-4},\frac{\lambda}{\lambda-4}\right)$ και $\Lambda\left(\frac{9}{\lambda-4},\frac{9\lambda}{\lambda-4}\right)$,
Είναι: $K\Lambda=8\Leftrightarrow K\Lambda^2=64\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(\frac{8}{\lambda-4}\right)^2+\left(\frac{8\lambda}{\lambda-4}\right)^2=64\Leftrightarrow\lambda=\frac{15}{8}$.
Άρα οι ζητούμενες ευθείες είναι οι x=0 και

Άσκηση 9η: Να δειχθεί ότι το τετράγωνο που έχει κέντρο Κ(3,4) και μια πλευρά επί της ευθείας ε_1: x –2y+3= είναι ισεμβαδικό με το τετράγωνο που έχει δύο πλευρές επί των ευθειών ε_2 : x+2y+9=0 και ε_3: x+2y+5=0.

Λύση: Βρίσκουμε το εμβαδόν E_1 του πρώτου τετραγώνου. Είναι $d=d(K,\varepsilon_1)=\frac{2\sqrt5}{5}$. Άρα $E_1=4d^2=\frac{16}{5}$. Παρατηρούμε ότι $\lambda_{\varepsilon_2}=\lambda_{\varepsilon_3}=-\frac{1}{2}$.
Άρα οι $\varepsilon_2,\varepsilon_3$ είναι εξισώσεις των απέναντι πλευρών του δεύτερου τετραγώνου. Βρίσκουμε τυχαίο σημείο της ε_2, π.χ. το $M(1,-5)$. Είναι
$$d(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=d(M,\varepsilon_3)=\frac{4}{\sqrt5}.$$
Έτσι $E_2=d^2(\varepsilon_2,\varepsilon_3)=\frac{16}{5}$. Άρα $E_1=E_2$.

Ενδιαφέρουσες συνέπειες μιας άσκησης του Σχολικού βιβλίου

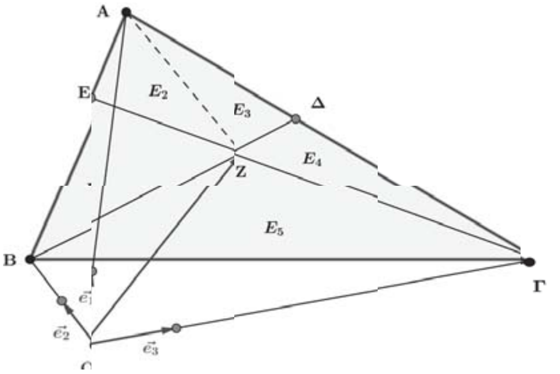
Διονύσης Γιάνναρος-Πύργος

Στην Άσκηση 3Α σελ.163 της σχολικής Γεωμετρίας βρήκαμε ότι:
$IK \parallel B\Gamma \Leftrightarrow \beta+\gamma=2\alpha$, όπου Ι το έγκεντρο και Κ το βαρύκεντρο ενός τριγώνου ΑΒΓ.

Έστω Ε, Δ σημεία των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντιστοίχως με Ζ το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και $\frac{BE}{EA}=\lambda_1$, $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta A}=\lambda_2$. Αν Ο τυχαίο σημείο αναφοράς και $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ τα μοναδιαία διανύσματα, τα ομόρροπα των διανυσμάτων $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{O\Gamma}$, τότε ισχύει:

$$\boxed{\overrightarrow{OZ}=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdot OA\cdot\vec{e_1}+\lambda_2\cdot OB\cdot\vec{e_2}+\lambda_1\cdot O\Gamma\cdot\vec{e_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\cdot\lambda_2}}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\frac{BZ}{Z\Delta}=x$, οπότε για τα εμβαδά E_i, $i=1,2,3,4,5$ του σχήματος έχουμε:



$$\frac{E_1}{E_2}=\lambda_1,\ \frac{E_4}{E_3}=\lambda_2,\ \frac{E_5}{E_4}=x\ \Rightarrow \frac{E_1}{\lambda_1}=E_2,\ \frac{E_4}{\lambda_2}=E_3,$$

$$\frac{E_5}{x}=E_4 \Rightarrow \frac{E_1}{\lambda_1}+\frac{E_4}{\lambda_2}+\frac{E_5}{x}=E_2+E_3+E_4 \quad (1)$$ Αλλά:

$$\frac{E_1+E_5}{E_2+E_3+E_4}=\lambda_1 \Rightarrow E_2+E_3+E_4=\frac{E_1+E_5}{\lambda_1} \quad (2)$$

Οπότε:

$$(1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\frac{E_1}{\lambda_1}+\frac{E_4}{\lambda_2}+\frac{E_5}{x}=\frac{E_1+E_5}{\lambda_1}\Rightarrow\frac{E_4}{\lambda_2}+\frac{E_5}{x}=\frac{E_5}{\lambda_1}\Rightarrow$$

$$\frac{E_4}{\lambda_2}=E_5\cdot\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\frac{E_4}{E_5}=\lambda_2\cdot\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}=\lambda_2\cdot\left(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{x}\right)\Rightarrow x=\frac{\lambda_1\cdot(1+\lambda_2)}{\lambda_2}.$$

- *Για έναν 2^o τρόπο υπολογισμού του x, μπορείτε να εκφράσετε το $\overrightarrow{AZ}$ ως συνάρτηση των $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A\Gamma}$ με δύο τρόπους. Πρώτα με βάση το $x'=\frac{BZ}{B\Delta}$ και μετά με βάση το $y'=\frac{\Gamma Z}{\Gamma E}$. Υπολογίζονται έτσι τα x', y' από τη λύση ενός πρωτοβάθμιου συστήματος, οπότε: $x=\frac{x'}{1-x'}$ κ.λπ.*

Εξάλλου: $\frac{BZ}{Z\Delta}=x$ και $\overrightarrow{BZ}\nearrow\nearrow\overrightarrow{Z\Delta}\Rightarrow\overrightarrow{BZ}=x\cdot\overrightarrow{Z\Delta}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{OZ}-\overrightarrow{OB}=x\cdot\left(\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{OZ}\right)\Rightarrow(1+x)\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OB}+x\cdot\overrightarrow{O\Delta}\quad(1)$$

Ομοίως: $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\lambda_2\overrightarrow{\Delta A}\Rightarrow\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}=\lambda_2\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Delta}\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow(1+\lambda_2)\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{O\Gamma}+\lambda_2\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{O\Delta}=\frac{\overrightarrow{O\Gamma}+\lambda_2\overrightarrow{OA}}{1+\lambda_2}\quad(2)$$

$$\text{Αλλά } (1)\overset{(2)}{\Rightarrow}\left(1+\frac{\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2}\right)\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OB}+\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(\overrightarrow{O\Gamma}+\lambda_2\overrightarrow{OA}\right)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OZ}=\frac{\lambda_1\lambda_2\overrightarrow{OA}+\lambda_2\overrightarrow{OB}+\lambda_1\overrightarrow{O\Gamma}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2}\Rightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{OZ}=\frac{\lambda_1\lambda_2\cdot OA\cdot\vec{e_1}+\lambda_2\cdot OB\cdot\vec{e_2}+\lambda_1\cdot O\Gamma\cdot\vec{e_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\cdot\lambda_2}\quad(1)}$$

αφού $\overrightarrow{OA}=OA\cdot\vec{e_1}$, $\overrightarrow{OB}=OB\cdot\vec{e_2}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=O\Gamma\cdot\vec{e_3}$,

- *Ενδείκνυται να αντικαταστήσουμε το Ο με το Β ή το Γ ώστε στην έκφραση του $\overrightarrow{KI}$ ως συνάρτησης των $\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}$ κάποιο από τα $\vec{e_2},\vec{e_3}$ να είναι παράλληλο της ΒΓ Πράγματι: Αν $O\equiv B$, τότε $\vec{e_1}\nearrow\nearrow\overrightarrow{BA}$, $\vec{e_3}\nearrow\nearrow\overrightarrow{B\Gamma}$, ενώ αν $O\equiv\Gamma$, τότε $\vec{e_1}\nearrow\nearrow\overrightarrow{\Gamma A}$, $\vec{e_2}\nearrow\nearrow\overrightarrow{\Gamma B}$. Αν λοιπόν $O\equiv B$, τότε*

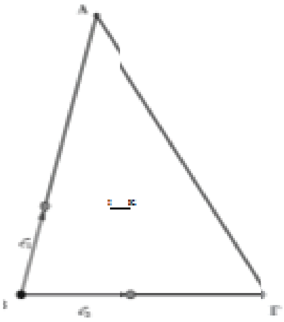
$$(1)\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{BZ}=\frac{\lambda_1\lambda_2 BA\vec{e_1}+\lambda_1 B\Gamma\vec{e_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2}=\frac{\lambda_1\lambda_2\gamma\vec{e_1}+\lambda_1\alpha\vec{e_3}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2}\quad(2)}$$

Άσκηση 1: Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το τμήμα ΙΚ, να είναι παράλληλο σε μία πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ π.χ. ΙΚ//ΒΓ.

Απάντηση: Αν $Z\equiv K$, τότε $\lambda_1=\lambda_2=1$ και (2)⇒ $\overrightarrow{BK}=\frac{\gamma\cdot\vec{e_1}+\alpha\cdot\vec{e_3}}{3}$. Αν $Z\equiv I$, τότε $\lambda_1=\frac{\alpha}{\beta}$, $\lambda_2=\frac{\alpha}{\gamma}$ και (2)⇒ $\overrightarrow{BI}=\frac{\alpha\gamma\left(\vec{e_1}+\vec{e_3}\right)}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\alpha\gamma\left(\vec{e_1}+\vec{e_3}\right)}{2\tau}$. Άρα

$$\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BK}=\frac{\alpha\gamma\left(\vec{e_1}+\vec{e_3}\right)}{2\tau}-\frac{\gamma\vec{e_1}+\alpha\vec{e_3}}{3}=$$

$$=\frac{(2\alpha-\beta-\gamma)\cdot\gamma}{6\tau}\cdot\vec{e}_1+\frac{(2\gamma-\beta-\alpha)\cdot\alpha}{6\tau}\cdot\vec{e}_3,$$



οπότε:

$$\overrightarrow{KI}\,||\,\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{KI}\,||\,\vec{e}_3\Leftrightarrow$$

$$2\alpha-\beta-\gamma=0\Leftrightarrow$$

$$\alpha=\frac{\beta+\gamma}{2}.$$

Σχήμα 1

Παρατηρήσεις

- Το τρίγωνο ΑΒΓ δεν μπορεί να είναι ισοσκελές διότι τότε η ΚΙ θα είναι κάθετη στη βάση του και θα διέρχεται από την κορυφή του ή $K\equiv I$. Αποκλείεται δηλαδή να είναι παράλληλη σε κάποια πλευρά του.
- Αν $\gamma<\alpha<\beta$, τότε για τη μεγαλύτερη γωνία $\measuredangle B$ του τριγώνου είναι

$$\sigma\upsilon\nu B=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}=\frac{\alpha^2+\gamma^2-(2\alpha-\gamma)^2}{2\alpha\gamma}=$$

$$=\frac{4\alpha\gamma-3\alpha^2}{2\alpha\gamma}=\frac{4\gamma-3\alpha}{2\gamma}.$$

Επομένως :

- ❖ Για $4\gamma>3\alpha$ το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο
- ❖ Για $4\gamma=3\alpha$ το τρίγωνο θα είναι ορθογώνιο
- ❖ Για $4\gamma<3\alpha$ το τρίγωνο θα είναι αμβλυγώνιο.

Σημείωση: *Ενδιαφέρον αποτελεί η αντιμετώπιση του θέματος όταν $O\equiv A$. Τότε*

$$\overrightarrow{AZ}=\frac{\lambda_2\gamma\vec{e}_2+\lambda_1\beta\vec{e}_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2},\ \textit{αλλά}\ \vec{e}_2//AB,\ \vec{e}_3//A\Gamma.$$

Άρα: $\overrightarrow{AB}=\gamma\vec{e}_2,\ \overrightarrow{A\Gamma}=\beta\vec{e}_3$ *και*

$$\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AB}=\beta\vec{e}_3-\gamma\vec{e}_2=-\gamma\vec{e}_2+\beta\vec{e}_3.$$

Εξάλλου: $\overrightarrow{AK}=\dfrac{\gamma\vec{e}_2+\beta\vec{e}_3}{3}$,

$$\overrightarrow{AI}=\frac{\beta\gamma\left(\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)}{2\tau}\Rightarrow\overrightarrow{KI}=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{AK}=$$

$$=\frac{(2\beta-\alpha-\gamma)\cdot\gamma}{6\tau}\cdot\vec{e}_2+\frac{(2\gamma-\alpha-\beta)\cdot\beta}{6\tau}\cdot\vec{e}_3.$$

Επομένως:

$$\overrightarrow{KI}//\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow det\left(\overrightarrow{KI},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{\beta\gamma}{6\tau}\left[(2\beta-\alpha-\gamma)+(2\gamma-\alpha-\beta)\right]=0\Leftrightarrow$$

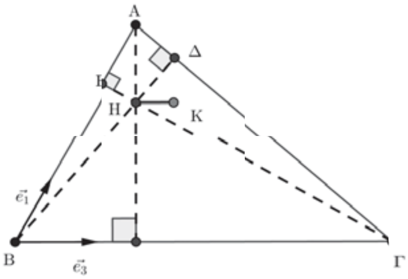
$$\Leftrightarrow\beta\gamma(\beta+\gamma-2\alpha)=0\Leftrightarrow2\alpha=\beta+\gamma$$

Προσοχή: Υπάρχει κίνδυνος να νομίσουμε ότι $\vec{e}_3//B\Gamma$ και να διαπράξουμε το λάθος $\overrightarrow{KI}//\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow2\beta=\alpha+\gamma$

Άσκηση 2: Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε το τμήμα ΚΗ, να είναι παράλληλο σε μία πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ, (Η το ορθόκεντρό του) π.χ. ΚΗ//ΒΓ.

Απάντηση: Πρέπει το ΑΒΓ να είναι οξυγώνιο (γιατί;). Βρήκαμε προηγουμένως $\overrightarrow{BK}=\dfrac{\gamma\vec{e}_1+\alpha\vec{e}_3}{3}$.

Αν $Z\equiv H$, τότε $\lambda_1=\dfrac{\sigma\varphi B}{\sigma\varphi A}$, $\lambda_2=\dfrac{\sigma\varphi\Gamma}{\sigma\varphi A}$. Οπότε:



Σχήμα 2

$$(2)\Rightarrow\overrightarrow{BH}=\gamma\cdot\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma\cdot\vec{e}_1+\alpha\cdot\sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi B\cdot\vec{e}_3$$

αφού $\sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi B+\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi\Gamma\cdot\sigma\varphi A=1$ (i) (Σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Β΄ Λυκείου σελ.33 άσκηση 7). Είναι $\overrightarrow{KH}=\overrightarrow{BH}-\overrightarrow{BK}=$

$$=\left(\gamma\cdot\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma-\frac{\gamma}{3}\right)\cdot\vec{e}_1+\left(\alpha\cdot\sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi\Gamma-\frac{\alpha}{3}\right)\cdot\vec{e}_3,$$

οπότε: $KH\,||\,B\Gamma\Leftrightarrow\overrightarrow{KH}\,||\,\vec{e}_3\Leftrightarrow\gamma\cdot\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma-\dfrac{\gamma}{3}=0$

$$\Leftrightarrow\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma=3.$$

Άσκηση 3: Να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη, ώστε το τμήμα ΙΗ να είναι παράλληλο σε μια πλευρά του τριγώνου ΑΒΓ π.χ. ΙΗ//ΒΓ.

Απάντηση: Με γνωστά τα $\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BH}$ από τις δύο προηγούμενες ασκήσεις έχουμε:

$$\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{BI}-\overrightarrow{BH}=\frac{\alpha\gamma\left(\vec{e}_1+\vec{e}_3\right)}{2\tau}-$$

$$-\left(\gamma\cdot\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma\cdot\vec{e}_1+\alpha\cdot\sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi B\cdot\vec{e}_3\right)=$$

$$=\gamma\cdot\left(\frac{\alpha}{2\tau}-\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma\right)\cdot\vec{e}_1+\alpha\cdot\left(\frac{\gamma}{2\tau}-\sigma\varphi A\cdot\sigma\varphi B\right)\cdot\vec{e}_3$$

Επομένως $HI\,||\,B\Gamma\Leftrightarrow\overrightarrow{HI}\,||\,\vec{e}_3\Leftrightarrow\sigma\varphi B\cdot\sigma\varphi\Gamma=\dfrac{\alpha}{2\tau}$

$$\Leftrightarrow\varepsilon\varphi B\cdot\varepsilon\varphi\Gamma=\frac{2\tau}{\alpha}.$$

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Στατιστική

των Φραγκίσκου Γ. Μπερσίμη, Βασίλη Καρκάνη

Άσκηση 1η

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα στη Στατιστική ήταν: 9, 19, 18, 6, 15, 20, 7, 13, 11, 12. Να υπολογιστούν:

α) Το εύρος της βαθμολογίας

β) Η διάμεσος της βαθμολογίας

γ) Η μέση τιμή της βαθμολογίας

Λύση: α) Οι βαθμοί των 10 μαθητών σε αύξουσα σειρά είναι: 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15, 18, 19, 20. Το εύρος είναι: $R = x_{max} - x_{min} = 20 - 6 = 14$.

β) Η διάμεσος είναι: $\delta = \dfrac{x_5 - x_6}{2} = \dfrac{12+13}{2} = 12{,}5$

γ) Η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{130}{10} = 13$$

Άσκηση 2η

Αν η βαθμολογία ενός μαθητή σε 4 από 5 μαθήματα είναι 12 10 15 12 να βρεθούν:

α) ο πέμπτος βαθμός αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία του είναι 12.

β) Η διάμεσος της βαθμολογίας.

γ) Η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας.

δ) Αν επανεξεταστεί και βελτιώσει τη βαθμολογία του κατά 3 μονάδες σε όλα τα μαθήματα, να βρεθούν η νέα μέση τιμή και η τυπική απόκλιση.

Λύση: α) Έστω x ο ζητούμενος βαθμός, τότε, $\bar{x} = 12 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i}{5} = 12 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{5} x_i = 60 \Leftrightarrow 12+10+15+12+x = 60 \Leftrightarrow$$

$x = 60 - 49 \Leftrightarrow x = 11$

β) Λόγω του (α) οι πέντε βαθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: 10, 11, 12, 12, 15, οπότε $\delta = x_3 = 12$.

γ) Επίσης: $s^2 = \dfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 =$

$$= \frac{1}{5}\left[(10-12)^2 + (11-12)^2 + (12-12)^2 + (12-12)^2 + (15-12)^2\right] =$$

$= \dfrac{1}{5}[4+1+0+0+9] = \dfrac{14}{5}$ άρα $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\dfrac{14}{5}}$ είναι η ζητούμενη τυπική απόκλιση.

δ) Προφανώς $\bar{Y} = \bar{X} + 3 = 15$ και $s_y = s_x = \sqrt{\dfrac{14}{5}}$

Άσκηση 3η

α) Να συμπληρωθεί με αιτιολόγηση ο ακόλουθος πίνακας συχνοτήτων – σχετικών συχνοτήτων:

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	x^2_i	$x^2_i\nu_i$
5			20				
10	12						
15				85			
20		40					
Σύνολο							

β) Να βρεθεί η μέση τιμή και η διάμεσος της κατανομής.

γ) Να βρεθεί η τυπική απόκλιση S. Δίνεται:

$$S^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum x_i^2\nu_i - \frac{(\sum x_i\nu_i)^2}{\nu}\right] \text{ και } \sqrt{23{,}69} \cong 4{,}87.$$

Λύση: α) Ο πίνακας συχνοτήτων δίνεται ακολούθως

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	x^2_i	$x^2_i\nu_i$
5	8	8	20	20	40	25	200
10	12	20	30	50	120	100	1200
15	14	34	35	85	210	225	3150
20	6	40	15	100	120	400	2400
Σύνολο	40		100		490	750	6950

Εφόσον N_4=40 θα είναι $\sum_{i=1}^{4}\nu_i = 40$ ή ν=40 το πλήθος των παρατηρήσεων. Επίσης $f_1\%$=20= $F_1\%$, άρα f_1=0.2 $\Leftrightarrow$

$\dfrac{\nu_1}{\nu} = 0.2 \Leftrightarrow \nu_1 = 0.2\cdot\nu = 0.2\cdot 40 = 8 \Leftrightarrow N_1 = 8$. Ακόμη $N_2 = N_1 + \nu_2 = 8 + 12 = 20$, $f_2 = \dfrac{\nu_2}{\nu} = \dfrac{12}{40} = 0.3$.

Άρα $f_2\%$=30 και $F_2\%=F_1\%+f_2\%=20+30=50$, $F_3\%$=35.

$F_4\%$=100 και $F_4\%$=15. Ακόμη, $\nu_3 = \nu\cdot f_3 = 40\cdot 0.35 = 14$ και $N_3 = N_2 + \nu_3 = 20 + 14 = 34$

άρα $\nu_4 = \nu - \nu_3 = 40 - 34 = 6$.

β) Είναι $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{4} x_i\cdot\nu_i}{\nu} = \dfrac{490}{40} = 12.25$ και

$$\delta = \frac{x_{20} + x_{21}}{\nu} = \frac{10+15}{2} = \frac{25}{2} = 12.5$$

γ) Επίσης

$$s^2 = \frac{1}{\nu}\left[\sum x_i^2\nu_i - \frac{(\sum x_i\nu_i)^2}{\nu}\right] = \frac{1}{40}\left[6950 - \frac{490^2}{40}\right] = \ldots \simeq 23.69$$

Άρα $s = \sqrt{23.69} = 4.87$

Άσκηση 4η

Έστω οι παρατηρήσεις:

2	**12**	**17**	**16**	**13**
19	**8**	**1**	**0**	**10**
9	**7**	**18**	**14**	**12**
15	**14**	**19**	**11**	**7**

α) Να κάνετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων και το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων αφού πρώτα ομαδοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα σε 4 κλάσεις.

β) Να εκτιμηθεί η διάμεσος της κατανομής

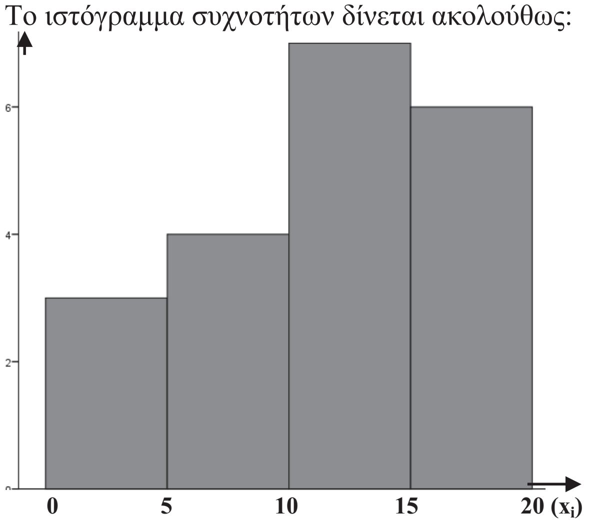
γ) Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Λύση: α) Από τα δεδομένα είναι $R=X_{max}-X_{min}=19-0=19$, οπότε το πλάτος των κλάσεων είναι $c=\frac{R}{\kappa}=\frac{19}{4}=4.75\approx 5$.

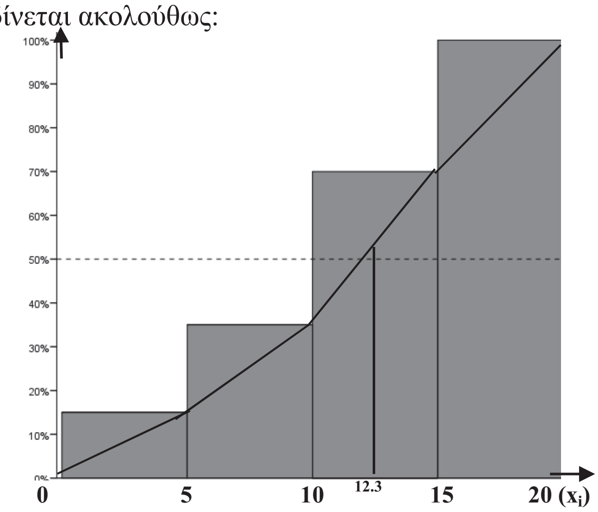
Άρα οι κλάσεις είναι: [0,5), [5,10), [10,15), [15,20]. Ο πίνακας συχνοτήτων δίνεται ακολούθως

Κλάση	x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$F_i\%$	$x_i\nu_i$	x^2_i	$x^2_i\nu_i$
0–5	2.5	3	3	15	15	7.5	6,25	18.75
5–10	7.5	4	7	20	35	30	56.25	225
10–15	12.5	7	14	35	70	87.5	156.25	1093.75
15–20	17.5	6	20	30	100	105	306.75	1837.5
Σύνολο		20		100		230		3175

Το ιστόγραμμα συχνοτήτων δίνεται ακολούθως:



Το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων δίνεται ακολούθως:



β) Από το πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων εκτιμούμε ότι $\delta\approx 12,3$.

γ) Είναι

$$s^2=\frac{1}{\nu}[\sum x_i^2\nu_i-\frac{(\sum x_i\nu_i)^2}{\nu}]=\frac{1}{20}[3175-\frac{230^2}{20}]=\ldots\approx 26.5$$

Οπότε $s=\sqrt{26.5}=5.15$, $\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot\nu_i}{\nu}=\frac{230}{20}=11.5$

και $CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{5.15}{11.5}=0.448=44.8\%$, άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Άσκηση 5η

Αν σε ένα δείγμα μεγέθους 25 ξέρουμε ότι το άθροισμα των παρατηρήσεων είναι 300 και των τετραγώνων τους 3700. Αν τα δεδομένα ακολουθούν την κανονική κατανομή να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές

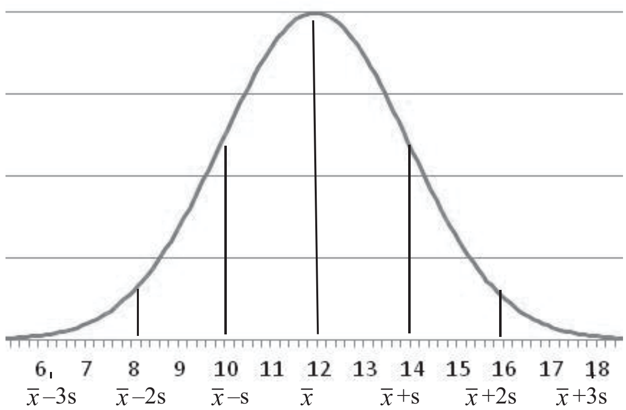
α) 10 και 14 β) 8 και 18 γ) 6 και 16

Λύση: Είναι ν=25, $\sum_{i=1}^{25}X_i=300$, $\sum_{i=1}^{25}X_i^2=3700$, οπότε για τη μέση τιμή και τη διακύμανση:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot\nu_i}{\nu}=\frac{300}{25}=12 \text{ και}$$

$$s^2=\frac{1}{\nu}[\sum x_i^2\nu_i-\frac{(\sum x_i\nu_i)^2}{\nu}]=\frac{1}{25}[3700-\frac{300^2}{25}]=\ldots=4,$$

άρα $s=\sqrt{4}=2$. Τότε έχουμε την κατανομή συχνοτήτων που δίνεται από την παρακάτω συμμετρική καμπύλη:



α) το 68% των παρατηρήσεων βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές 10 και 14

β) το 63.35% των παρατηρήσεων βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές 8 και 18

γ) το 97.35% των παρατηρήσεων βρίσκονται ανάμεσα στις τιμές 6 και 16

Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Μαθηματικά Κατεύθυνσης Γ΄Λυκείου
Ασκήσεις Ανάλυσης

Τζαφέρης Σωτήρης – 3ο Λύκειο Περιστερίου, 2ο Λύκειο Πετρούπολης

Άσκηση 1η

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases} x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x} & ,x<α \\ 2x^2+(β-1)^2 & ,x\geq α \end{cases}$$

α. **Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=α$ να αποδείξετε ότι α=0 και β=1.**

β. **Να αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle σε κάθε διάστημα της μορφής**

$$\left[-\frac{1}{κπ},-\frac{1}{(κ+1)π}\right],\ κ\in\mathbb{Z}-\{0,-1\}.^{1}$$

γ. **Να αποδείξετε ότι η C_f έχει άπειρες εφαπτόμενες που είναι παράλληλες στον x΄x.**

δ. **Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.**

Λύση

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=α\Rightarrow$ Η f είναι συνεχής στο $x_0=α\Rightarrow \lim\limits_{x\to α^-}f(x)=\lim\limits_{x\to α^+}f(x)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to α^-}\left(x^2\cdot ημ\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to α^+}\left[2x^2+(β-1)^2\right]\ (1)$$

Αν $α\neq 0$, τότε: $(1)\Rightarrow α^2\cdot ημ\dfrac{1}{α}=2α^2+(β-1)^2\Rightarrow$

$α^2\cdot\left(ημ\dfrac{1}{α}-2\right)=(β-1)^2$ που είναι άτοπο, αφού $α^2\cdot\left(ημ\dfrac{1}{α}-2\right)<0$ και $(β-1)^2\geq 0$. Άρα α=0 και

$(1)\Rightarrow \lim\limits_{x\to α^-}\left(x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)=(β-1)^2$.

Αλλά $\left|x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right|=\left|x^2\right|\left|ημ\dfrac{1}{x}\right|\leq\left|x^2\right|\Rightarrow -|x|^2\leq x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}\leq |x|^2$

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\left(-|x|^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}|x|^2=0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Άρα $(1)\Rightarrow(β-1)^2=0\Rightarrow β=1$

β. Είναι: $f(x)=x^2\cdot ημ\dfrac{1}{x}$, για x<0, που είναι συνεχής σε κάθε διάστημα της μορφής

$$\left[-\frac{1}{κπ},-\frac{1}{(κ+1)π}\right],\ κ\in\mathbb{Z}-\{0,-1\}$$

παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{1}{κπ},-\dfrac{1}{(κ+1)π}\right)$

ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων και

$$f\left(-\frac{1}{κπ}\right)=\left(-\frac{1}{κπ}\right)^2ημ(-κπ)=0$$

$$f\left(-\frac{1}{(κ+1)π}\right)=\left(-\frac{1}{(κ+1)π}\right)^2ημ\left(-(κ+1)π\right)=0$$

Άρα η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

γ. Από το (β) διαπιστώνουμε ότι για κάθε $κ\in\mathbb{Z}-\{0,-1\}$ υπάρχει

$$ξ_κ\in\left(-\frac{1}{κπ},-\frac{1}{(κ+1)π}\right)\ \text{ώστε}\ f'(ξ_κ)=0.$$

Άρα υπάρχουν άπειρα $ξ_κ$ με $f'(ξ_κ)=0$, οπότε έχουμε άπειρες εφαπτόμενες παράλληλες στον x΄x.

δ. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης για x>0, έχουμε $f(x)=2x^2$ που ως πολυωνυμική 2ου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες. Για x<0 είναι: $f(x)=x^2ημ\dfrac{1}{x}$.

Αναζητούμε ασύμπτωτη στο $-\infty$ της μορφής $y=λx+κ$. Για x<0 έχουμε:

$$\frac{f(x)}{x}=\frac{x^2ημ\frac{1}{x}}{x}=xημ\frac{1}{x}=\frac{ημ\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=h(g(x)),\quad \text{με}$$

$$g(x)=\frac{1}{x}=u,\quad h(u)=\frac{ημu}{u}.$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$ και $\lim\limits_{u\to 0}h(u)=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{ημu}{u}=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}h(g(x))=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1\Rightarrow λ=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow f(x)-λx=f(x)-x=x^2ημ\frac{1}{x}-x=φ(g(x)),$$

με $g(x)=\dfrac{1}{x}=u$, και $φ(u)=\dfrac{ημu}{u^2}-\dfrac{1}{u}=\dfrac{ημu-u}{u^2}$

---

[1] Παρατηρήστε ότι κ,κ+1 ομόσημοι και

$$κ<κ+1\Rightarrow\frac{1}{κ}>\frac{1}{κ+1}\Rightarrow-\frac{1}{κπ}<-\frac{1}{(κ+1)π}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$ και το $\lim\limits_{u\to0}\varphi(u)$ οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$. Όμως $\frac{(\eta\mu u-u)'}{(u^2)'}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{u}\right)=\varphi_1(u)$ και $\lim\limits_{u\to0}\varphi_1(u)=\frac{1}{2}\cdot0=0$ σύμφωνα με τον κανόνα De' Hospital λοιπόν θα έχουμε και $\lim\limits_{u\to0}\varphi(u)=0$ οπότε

$\lim\limits_{u\to-\infty}\varphi(g(x))=0\Rightarrow\lim\limits_{u\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=0\Rightarrow\kappa=0$

Άρα έχει στο $-\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την y=x.

Άσκηση 2η

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με α>0, γ>0 και α+β+γ<0.

α. Να αποδείξετε ότι η f΄ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα [0,1].

β. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $(-\infty,1)$ και τοπικό ελάχιστο στο $(1,+\infty)$.

γ. Τα παραπάνω ακρότατα είναι ή όχι ολικά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

δ. Να εξετάσετε αν υπάρχουν $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x-\kappa\right)=0$.

Λύση

α. Η f΄ είναι συνεχής στο [0,1] ως πολυωνυμική με $f'(0)=\gamma>0$ και $f'(1)=\alpha+\beta+\gamma<0$. Άρα η f΄ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο [0,1].

β. Σύμφωνα με το Θ. Bolzano υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1)=0$. Η εξίσωση λοιπόν $f'(x)=0$ έχει ρίζα το x_1 και επειδή το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει ετερόσημες τιμές $f'(0)>0$, $f'(1)<0$, θα έχει δυο διαφορετικές ρίζες x_1,x_2 και $\alpha f'(1)<0\Rightarrow x_1<1<x_2$, οπότε η μονοτονία και τα ακρότατα της f, απεικονίζονται στον επόμενο πίνακα

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f΄(x)		+	0	−	0	+	
f(x)		↗	TM	↘	TE	↗	

2ος τρόπος: Το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Αλλά:

$$\alpha+\beta+\gamma<0\Rightarrow\alpha+\gamma<-\beta\overset{\alpha,\gamma>0}{\Rightarrow}-\beta>\alpha+\gamma>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-\beta)^2>(\alpha+\gamma)^2\Rightarrow\beta^2>(\alpha+\gamma)^2$$

$$\Rightarrow\beta^2-4\alpha\gamma>(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma$$

$$\Rightarrow\beta^2-4\alpha\gamma>(\alpha-\gamma)^2\geq0\Rightarrow\Delta>0.$$

Άρα η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ έχει δυο ρίζες διαφορετικές και συνεχίζουμε όπως παραπάνω.

γ. Εξάλλου $f'(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma\Rightarrow$

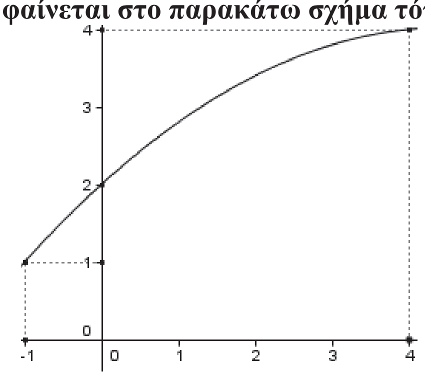
$$f(x)=\frac{\alpha}{3}x^3+\frac{\beta}{2}x^2+\gamma x+\delta,\quad \alpha>0.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha}{3}x^3=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\alpha}{3}x^3=-\infty$, οπότε η f δεν έχει ολικά ακρότατα

δ. Ουσιαστικά ζητάμε η f να έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y=\lambda\cdot x+\kappa$. Επειδή η f είναι πολυωνυμική 3ου βαθμού δεν έχει ασύμπτωτες. Άρα δεν υπάρχουν $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x-\kappa\right)=0$.

Άσκηση 3η

Έστω $f:[-1,4]\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(-1)=1$. Αν η γραφική παράσταση της f ΄ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα τότε :



α. Να μελετήστε την f ως προς την μονοτονία στο διάστημα [-1,4]=A.

β. Να αποδείξετε ότι η f΄ είναι αντιστρέψιμη και να σχεδιάσετε την αντίστροφη της.

γ. Αν $\alpha\in[1,4]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία y=αx.

δ. Να αποδείξετε ότι το σημείο B(0,3) δεν βρίσκεται στη γραφική παράσταση της f.

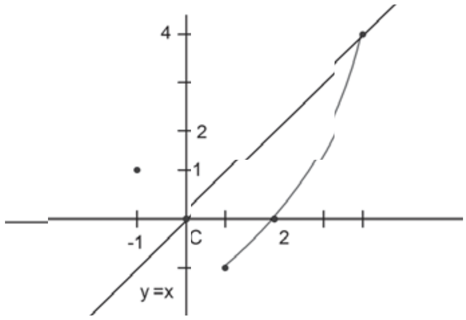
ε. Να λύσετε την εξίσωση: $f'(x-1)=-x+3$.

Λύση

α. $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-1,4)\Rightarrow f\uparrow A$.

β. $f\uparrow A\Rightarrow f\ \text{"}1-1\text{"}\Rightarrow f$ αντιστρέψιμη.

Επειδή οι αντίστροφες συναρτήσεις έχουν γραφικές παραστάσεις συμμετρικές ως προς την y=x η αντίστροφη της f΄ θα έχει γραφική παράσταση της παρακάτω μορφής



γ. Επειδή $\alpha \in [1,4] = f'(A)$, η εξίσωση $f'(x) = \alpha$ έχει λύση η οποία είναι μοναδική, διότι η f΄ είναι «1-1». Άρα υπάρχει εφαπτόμενη της C_f που είναι παράλληλη στην y=αx και είναι μοναδική.

δ. Έστω ότι $B \in C_f$. Τότε $f(0) = 3$. Η f είναι παραγωγίσιμη στο [–1,0]. Σύμφωνα λοιπόν με το Θ.Μ.Τ. στο [–1,0], υπάρχει $\xi \in (-1,0)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{3-1}{1} = 2$, δηλαδή $f'(\xi) = 2$ που είναι άτοπο, αφού f΄(x)=2 ⇔x=0.

ε. Θέτουμε $h(x) = f'(x-1) + x - 3$. Το πεδίο ορισμού της h είναι το [0, 5], διότι προκύπτει από την σύνθεση της x–1 και της f΄. (Παρατηρήστε ότι

$$(x-1) \in [-1,4] \Leftrightarrow -1 \le x-1 \le 4 \Leftrightarrow 0 \le x \le 5)$$

Το $x_0 = 1$ είναι προφανής ρίζα της h διότι

$$h(1) = f'(0) + 1 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$$

Η ρίζα $x_0 = 1$ είναι μοναδική διότι η h είναι γνησίως αύξουσα στο [0,5], αφού για κάθε $x_1, x_2 \in [0,5]$ ισχύει η συνεπαγωγή: $x_1 > x_2 \Rightarrow$

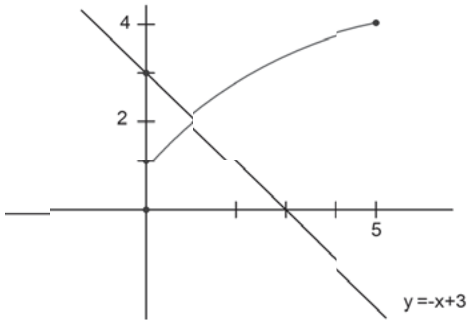
$$x_1 - 1 > x_2 - 1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} \left.\begin{matrix} f'(x_1 - 1) > f'(x_2 - 1) \\ x_1 > x_2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow f'(x_1 - 1) + x_1 > f'(x_2 - 1) + x_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x_1 - 1) + x_1 - 3 > f'(x_2 - 1) + x_2 - 3 \Rightarrow h(x_1) > h(x_2).$$

2ος τρόπος (Με γραφική παράσταση):

Η y=$f'(x-1)$ είναι οριζόντια μετατόπιση της y=f΄(x) προς τα δεξιά κατά 1 και τέμνει τη γραφική παράσταση της y=-x+3 στο μοναδικό σημείο Σ(1,2). Η εξίσωση λοιπόν h(x)=0 έχει μοναδική ρίζα τη $x_0 = 1$



Άσκηση 4η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{3}{2}\right) - \frac{x^3}{6}, \quad g(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$

β. Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Να βρείτε τα σημεία καμπής της g.

δ. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, g(x_2))$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο A να είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_g στο B.

Λύση

α. Έχουμε: $f'(x) = x \cdot \left(\ln x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{x^2}{2} \cdot \dfrac{1}{x} - 3\dfrac{x^2}{6} =$

$$= x\ln x - \frac{3}{2}x + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} = x\ln x - x - \frac{x^2}{2}.$$

και $f''(x) = \ln x + x\dfrac{1}{x} - 1 - x = \ln x - x < 0$,

διότι $\ln x \le x - 1 < x$. Άρα η f είναι κοίλη.

β. Εξάλλου: $g'(x) = e^x - x - 1 \ge 0$, αφού $e^x \ge x + 1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για x=0.

Άρα, $g \uparrow \; (-\infty, 0] \cup [0,+\infty) = \mathbb{R}$.

γ. Είναι: $g''(x) = e^x - 1$ και

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$g''(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και $g''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$

Άρα η g είναι κοίλη στο $(-\infty, 0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$ με μοναδικό σημείο καμπής το Σ(0, g(0)) δηλαδή το Σ(0,1).

δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $f'(x_1) \ne g'(x_2)$ για κάθε $x_1 > 0$ και $x_2 \in \mathbb{R}$, δηλαδή ότι:

$$f'((0,+\infty)) \cap g'(\mathbb{R}) = \varnothing.$$

Η f είναι κοίλη στο [0, +∞)⇒ $f' \downarrow [0, +\infty) \Rightarrow$

$f'((0,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x), \lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)\right)$. Για το $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)$ παρατηρούμε ότι

$$f'(x) = x\ln x - x - \frac{x^2}{2} = x^2\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right)$$

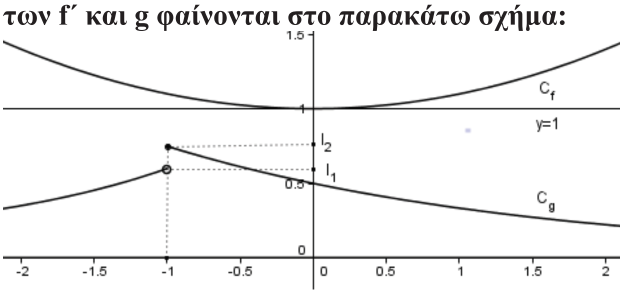
Με εφαρμογή του κανόνα De'Hospital (μορφή

$\frac{+\infty}{+\infty}$) βρίσκουμε τελικά $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=+\infty\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\infty$. Εξάλλου για το $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)$ παρατηρούμε $f'(x)=\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}-x-\frac{x^2}{2}$.

Με εφαρμογή του κανόνα De'Hospital (μορφή $\frac{-\infty}{+\infty}$) βρίσκουμε τελικά $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(-x)=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$. Άρα $f'((0,+\infty))=(-\infty,0)$. Επιπλέον, $g'(x)\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow g'(\mathbb{R})\subseteq[0,+\infty)\Rightarrow$ $f'((0,+\infty))\cap g'(\mathbb{R})=\varnothing$.

Άσκηση 5η

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με f(0)=0 και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Οι γραφικές παραστάσεις των f΄ και g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να αποδείξετε ότι: $f(x)\ge x$ για κάθε $x\ge0$

γ. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, δείξτε ότι $|f(\alpha)-f(\beta)|\ge|\alpha-\beta|$.

δ. Να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$A=f(-1)\cdot g(\alpha^4+1)$$

$$B=f(-1)\cdot g(2\alpha^2)$$

ε. Να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x\to-1}\left[g(x)\cdot(f'(x+1))+f(x+1)-1\right]$$

στ. Να δείξετε ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x^2)-f(x)\right)=+\infty$.

ζ. Να δείξετε ότι η συνάρτηση h με τύπο:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\frac{1}{2}}{x}, & x\ne0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$.

Λύση

α. Από τη γραφική παράσταση της f΄ προκύπτει ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty,0]$ και κυρτή στο $[0,+\infty)$ με f΄(0)=1.

Άρα η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το Σ $(0,f(0))$ δηλαδή το Σ(0,0).

β. Θέτουμε $K(x)=f(x)-x,\ x\in\mathbb{R}$ Τότε $K'(x)=f'(x)-1\ge0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και το ίσον ισχύει μόνο για x=0.

Άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε: $x\ge0\Rightarrow K(x)\ge K(0)\Rightarrow f(x)-x\ge0\Rightarrow f(x)\ge x$

γ. Αν α=β, τότε ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)$, οπότε $|f(\alpha)-f(\beta)|=|\alpha-\beta|=0$.

Αν $\alpha\ne\beta$, τότε από το Θ.Μ.Τ. στο κλειστό διάστημα με άκρα α,β θα υπάρχει ξ μεταξύ των α, β τέτοιο ώστε

$$\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}=f'(\xi)\ge1,\ \text{οπότε}\ \left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|\ge1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|f(\alpha)-f(\beta)|\ge|\alpha-\beta|.$$

δ. Προφανώς $g\downarrow[0,+\infty)$, οπότε

$\alpha^4+1-2\alpha^2=(\alpha^2-1)^2\ge0\Rightarrow\alpha^4+1\ge2\alpha^2\ge0\Rightarrow$

$\Rightarrow g(\alpha^4+1)\le g(2\alpha^2)$ (1)

Επιπλέον, $f'(x)\ge1>0\Rightarrow f\uparrow\mathbb{R}$, οπότε

$$-1<0\Rightarrow f(-1)<f(0)=0\Rightarrow f(-1)<0,\ (2)$$

Άρα: (1),(2) $\Rightarrow f(-1)\cdot g(\alpha^4+1)\ge f(-1)\cdot g(2\alpha^2)$

$\Rightarrow A\ge B$

ε. Αν $H(x)=f'(x+1)+f(x+1)-1$, τότε $H(x)=\varphi(p(x))$, με $p(x)=x+1=u$, $\varphi(u)=f'(u)+f(u)-1$. Αλλά $\lim\limits_{x\to-1}p(x)=0$ και $\lim\limits_{u\to0}\varphi(u)=0=f'(0)+f(0)-1=1+0-1=0$ αφού από τη γραφική παράσταση της f ΄ προκύπτει ότι είναι συνεχής στο $x_0=0$ και f΄(0)=1. Άρα $\lim\limits_{x\to-1}\varphi(p(x))=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to-1}H(x)=0$, Επιπλέον,

$\lim\limits_{x\to-1^+}(g(x))=l_1>0$, $\lim\limits_{x\to-1^-}(g(x))=l_2>0$

Επομένως $\lim\limits_{x\to-1^+}g(x)H(x)=l_1\cdot0=0$

$\lim\limits_{x\to-1^-}g(x)H(x)=l_2\cdot0=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to-1}g(x)H(x)=0$.

2ος τρόπος: (Μηδενική)x(Φραγμένη)

στ. Αν x>1, οπότε $x^2>x$, τότε σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ. στο $[x,x^2]$ θα υπάρχει $\xi\in(x,x^2)$, τέτοιο ώστε $\dfrac{f(x^2)-f(x)}{x^2-x}=f'(\xi)\geq 1$.

Άρα $f(x^2)-f(x)\geq x^2-x$ (1) και επειδή

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)=+\infty$, θα είναι

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x^2)-f(x)\right)=+\infty$ Η (1) προκύπτει και άμεσα από το ερώτημα (γ).

ζ. Από την C_g διαπιστώνουμε ότι $-1<x<0\Rightarrow$

$$g(x)>\frac{1}{2}\Rightarrow g(x)-\frac{1}{2}>0\Rightarrow\frac{g(x)-\frac{1}{2}}{x}<0$$

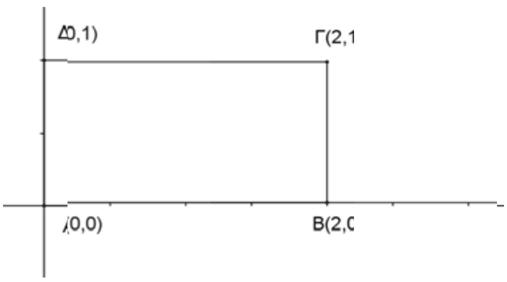
και $x>0\Rightarrow$

$$g(x)<\frac{1}{2}\Rightarrow g(x)-\frac{1}{2}<0\Rightarrow\frac{g(x)-\frac{1}{2}}{x}<0$$

Αν η h ήταν συνεχής στο $x_0=0$, τότε $\lim\limits_{x\to0}h(x)=1\Rightarrow h(x)>0$ κοντά στο $x_0=0$, οπότε $\dfrac{g(x)-\frac{1}{2}}{x}>0$ κοντά στο $x_0=0$, άτοπο.

Άσκηση 6η

Έστω $f:[0,2]\to R$ μια συνάρτηση, δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν η γραφική παράσταση της f' βρίσκεται στο ορθογώνιο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος και ισχύει: $f'(0)<f'(2)<f'(1)$ τότε:



α. **Να αποδείξετε ότι η $C_{f'}$ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ σε ένα τουλάχιστον σημείο Κ**

β. **Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε το σημείο $N(x_0,f'(x_0))$ της $C_{f'}$ να είναι πλησιέστερο στην πλευρά ΔΓ.**

γ. **Για το x_0 του ερωτήματος (β):**

i) **Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)$, όπου**

$$\varphi(h)=\frac{\left[f'(x_0+h)\right]^2-\left[f'(x_0-h)\right]^2}{4h}$$

ii) **Ένα σημείο $M(x(t),y(t))$ όπου $x(t)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση, κινείται στην γραφική παράσταση της f'. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΔΜΓ την χρονική στιγμή που το Μ βρίσκεται στη θέση $N(x_0,f'(x_0))$.**

Λύση

α. Η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση: $y=\alpha x+\beta$ και επαληθεύεται από τα σημεία $\Delta(0,1)$ και $B(2,0)$ Άρα $1=\alpha\cdot0+\beta\Rightarrow\beta=1$ και $2\alpha+\beta=0\Rightarrow2\alpha=-1\Rightarrow\alpha=-\dfrac{1}{2}$. Οπότε η εξίσωση της ΒΔ είναι $y=-\dfrac{1}{2}x+1$. Για να δείξουμε ότι η $C_{f'}$ τέμνει τη διαγώνιο ΒΔ σε σημείο Κ, αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$, έχει λύση $x_1\in(0,2)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f'(x)+\dfrac{1}{2}x-1$. Η h είναι συνεχής στο $[0,2]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων (η f' είναι συνεχής διότι είναι δύο φορές παραγωγίσιμη). Επιπλέον, $h(0)=f'(0)-1<0$, διότι $f'(0)<f'(2)<f'(1)\leq\mathbf{1}$ και $h(2)=f'(2)>0$, διότι $f'(2)>f'(0)\geq0$.

Από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x_1\in(0,2)$, τέτοιο ώστε: $h(x_1)=0$.

β. Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[0,2]$ και από τη σχέση $f'(0)<f'(2)<f'(1)$ προκύπτει ότι το $f'(0)$ και το $f'(2)$ δεν είναι ολικά μέγιστα της f'. Επειδή η f' είναι συνεχής από το Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης Τιμής προκύπτει ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$, τέτοιο ώστε : $f'(x_0)=\max f'(x)$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σημείο $N(x_0,f'(x_0))$ που απέχει τη μέγιστη απόσταση από την ΑΒ, δηλαδή την ελάχιστη απόσταση από τη ΔΓ.

γ. Από το ερώτημα (β) το x_0 είναι θέση μεγίστου της f' και επειδή $x_0\in(0,2)$ και η f' παραγωγίσιμη, από Θ. Fermat έχουμε: $f''(x_0)=0$.

i) Έχουμε:

$$\varphi(h)=\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}\cdot\frac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{4}$$

Είναι: $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f'(x_0+h)+f'(x_0-h)}{4}=$
$\dfrac{f'(x_0)+f'(x_0)}{4}=\dfrac{2f'(x_0)}{4}=\dfrac{f'(x_0)}{2}$ **(1)**. (Αυτό ισχύει διότι προφανώς η f' είναι και συνεχής).

Εξάλλου: $\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}=$

$=\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}-\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{h}$

και $\lim\limits_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0)=0$, ενώ

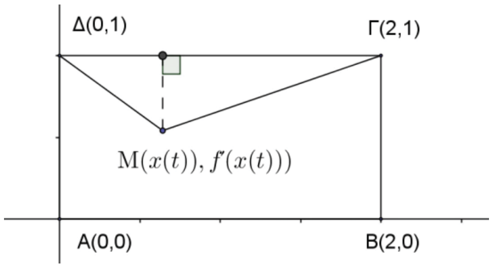
$L(h)=\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{h}=-\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}=$

$=-\frac{f'(x_0+u)-f'(x_0)}{u}=-\lambda(u)$, όπου u = –h, οπότε: $\lim\limits_{h\to0}L(h)=-\lim\limits_{u\to0}\lambda(u)=-f''(x_0)$

Άρα $\lim\limits_{h\to0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{h}=0$ **(2).**

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι:

$\lim\limits_{h\to0}\varphi(h)=0\cdot\frac{f'(x_0)}{2}=0$.



ii) Το τρίγωνο ΔΜΓ έχει ύψος $\upsilon=1-f'(x)$ οπότε: $E(t)=\frac{1}{2}\cdot\Delta\Gamma\cdot\left(1-f'(x(t))\right)=1-f'(x(t))\Rightarrow$

$E'(t)=-f''(x(t))\cdot x'(t)$. Τη χρονική στιγμή t_0 για την οποία ισχύει $x(t_0)=x_0$ έχουμε:

$E'(t_0)=-f''(x(t_0))\cdot x'(t_0)=-f''(x_0)\cdot x'(t_0)=$

$=-0\cdot x'(t_0)=0$

Άσκηση 7η

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:R\to R$ με $f(x)=\alpha^x$ $(0<\alpha\neq1)$ και $g:(0,+\infty)\to R$. Αν ισχύει: $f'(x)\geq(\ln\alpha)\cdot(x+1)$, για κάθε $x\in R$ και $(f\circ g)(x)=x$ για κάθε $x>0$ τότε:

α. Να αποδείξτε ότι $\alpha>1$.

β. Να βρείτε το α και να δείξτε ότι $g(x)=\ln x$.

γ. Να αποδείξτε ότι η f είναι κυρτή και η g κοίλη.

δ. Να σχεδιάσετε τις C_f και C_g καθώς και τις εφαπτόμενες τους στα σημεία A(0,f(0)) και B(1,g(1)) αντίστοιχα.

ε. Αν $\gamma\in R$ και β>0 να αποδείξτε ότι:

$$(\gamma-\beta)^2+\left(e^\gamma-\ln\beta\right)^2\geq2\ .$$

Λύση

α. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$f'(x)\geq(\ln\alpha)\cdot(x+1)\Rightarrow(\ln\alpha)\cdot\alpha^x\geq(\ln\alpha)\cdot(x+1)$ (1)

Αν $\alpha\in(0,1)$, τότε $\ln\alpha<0$ και (1)$\Rightarrow\alpha^x\leq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x\leq\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)$, πράγμα άτοπο, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty$. Επομένως α>1.

β. Έτσι έχουμε $\alpha^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\alpha^x-x-1$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $h(x)\geq h(0)$, οπότε το $x_0=0$ είναι θέση ολικού ελαχίστου και επειδή το $x_0=0$ είναι εσωτερικό σημείο στο R, στο οποίο η h είναι παραγωγίσιμη, από το Θεώρημα του Fermat έχουμε: $h'(0)=0\Rightarrow\alpha^0\ln\alpha-1=0\Rightarrow\ln\alpha=1\Rightarrow\alpha=e$.

Προφανώς με $\alpha=e$ ισχύει $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, για κάθε $x>0$ έχουμε:

$(f\circ g)(x)=x\ \Rightarrow\ f(g(x))=x\Rightarrow e^{g(x)}=x$

$\Rightarrow g(x)=\ln x\,,\ x>0$.

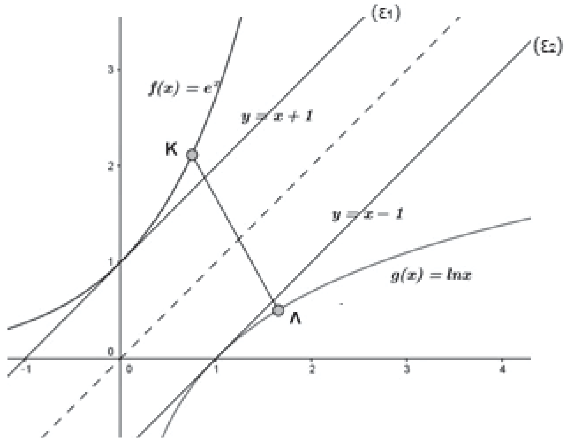
γ. $f(x)=e^x\Rightarrow f'(x)=e^x\Rightarrow f''(x)=e^x>0$, οπότε η f είναι κυρτή στο R. Επιπλέον,

$g(x)=\ln x\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow g''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ για κάθε x>0, οπότε η g είναι κοίλη στο $(0,+\infty)$.

δ. Εφαπτομένη της C_f στο A(0,1) είναι η $y-f(0)=f'(0)(x-0)$, δηλαδή η $y-1=1(x-0)$ και τελικά η $y=x+1$.

Εφαπτομένη της C_g στο B(1,0) είναι η $y-g(1)=g'(1)(x-1)$, δηλαδή η $y-0=1(x-1)$ και τελικά η $y=x-1$.

Οι γραφικές παραστάσεις των C_f,C_g καθώς και των εφαπτομένων τους στα $A(0,f(0))$ και $B(1,g(1))$ φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



ε. Αρκεί να αποδείξουμε ότι:

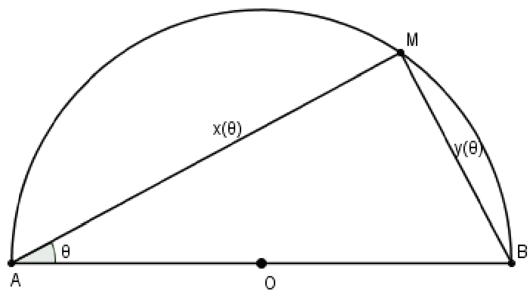
$$\sqrt{(\gamma-\beta)^2+\left(e^{\gamma}-\ln\beta\right)^2}\geq\sqrt{2}\ .$$

Το $1^{\text{ο}}$ μέλος της ανισότητας παριστάνει την απόσταση του σημείου $K\left(\gamma,e^{\gamma}\right)$ της C_f από το σημείο $\Lambda(\beta,\ln\beta)$ της C_g. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι $K\Lambda\geq\sqrt{2}$ που ισχύει, αφού η απόσταση των παραλλήλων (ε_1) και (ε_2), όπως εύκολα βρίσκουμε, είναι $\sqrt{2}$ και τα Κ,Λ βρίσκονται εκατέρωθεν της ταινίας τους (γιατί;)..

Άσκηση 8^{η}

Δίνεται ημικύκλιο $\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$ με διάμετρο ΑΒ και σημείο Μ αυτού τέτοιο ώστε $M\widehat{A}B=\theta$ με $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Αν ΜΑ=x(θ), ΜΒ=y(θ).

και $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{10-x(\theta)}{\theta}=\lambda\in\mathbb{R}$, τότε:



α. Να αποδείξτε ότι: $x(\theta)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$, $y(\theta)=\alpha\cdot\eta\mu\theta$.

β. Να βρείτε τη διάμετρο ΑΒ και τον πραγματικό αριθμό λ.

γ. Να αποδείξτε ότι η περίμετρος P(θ) του τριγώνου ΑΜΒ γίνεται μέγιστη όταν το Μ βρίσκεται στο μέσο του ημικυκλίου.

δ. Να υπολογίστε το $\lim\limits_{\theta\to 0}\frac{y(\theta)-\eta\mu(y(\theta))}{1-\sigma\upsilon\nu(y(\theta))}$.

Λύση

α. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΜΑΒ έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{x(\theta)}{AB}=\frac{x(\theta)}{\alpha}\Rightarrow x(\theta)=\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$$

Ομοίως $\eta\mu\theta=\frac{y(\theta)}{AB}=\frac{y(\theta)}{\alpha}\Rightarrow y(\theta)=\alpha\cdot\eta\mu\theta.$

β. Αν θέσουμε $g(\theta)=\frac{10-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}$, τότε

$10-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta=\theta\cdot g(\theta)\Rightarrow\lim\limits_{\theta\to 0}(10-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)=0\cdot\lim\limits_{\theta\to 0}g(\theta)\Rightarrow$

$10-\alpha\cdot 1=0\cdot\lambda\Rightarrow\alpha=10\Rightarrow AB=10$

Με α=10, είναι:

$$\lambda=\lim_{\theta\to 0}\frac{10-10\sigma\upsilon\nu\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\left[(-10)\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{\theta}\right]=-10\cdot 0=0$$

γ. Η περίμετρος του τριγώνου ΜΑΒ είναι:

$P(\theta)=10+10\eta\mu\theta+10\sigma\upsilon\nu\theta=10(1+\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)$

Αναζητούμε το μέγιστο της συνάρτησης P(θ) η οποία είναι παραγωγίσιμη με:

$$P'(\theta)=10(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)\ \text{και}$$

$$P'(\theta)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\eta\mu\theta\Leftrightarrow$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$, αφού $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Επιπλέον, στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση (συνθ) είναι γνησίως φθίνουσα και η (ημθ) γνησίως αύξουσα (γιατί;)

Άρα $\theta>\frac{\pi}{4}\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ και

$$\eta\mu\theta>\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Επομένως $\eta\mu\theta>\frac{\sqrt{2}}{2}>\sigma\upsilon\nu\theta$, για $\theta>\frac{\pi}{4}$

Εντελώς όμοια $\eta\mu\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}<\sigma\upsilon\nu\theta$, για $\theta<\frac{\pi}{4}$

Άρα, η συνάρτηση P(θ) παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $\theta=\frac{\pi}{4}$, που προκύπτει όταν το Μ είναι το μέσο του τόξου, διότι τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

δ. Έχουμε: $\frac{y(\theta)-\eta\mu(y(\theta))}{1-\sigma\upsilon\nu(y(\theta))}=f(y(\theta))$, όπου

$f(u)=\frac{u-\eta\mu u}{1-\sigma\upsilon\nu u}$.

Αλλά $\lim\limits_{\theta\to 0}y(\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0}(\alpha\cdot\eta\mu\theta)=0$ και το $\lim\limits_{u\to 0}f(u)$ οδηγεί σε απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Όμως $\frac{(u-\eta\mu u)'}{(1-\sigma\upsilon\nu u)'}=\frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{\eta\mu u}=\frac{\frac{1-\sigma\upsilon\nu u}{u}}{\frac{\eta\mu u}{u}}=f_1(u)$

και $\lim\limits_{u\to 0}f_1(u)=\frac{0}{1}=0$. Σύμφωνα με τον κανόνα De'Hospital λοιπόν, θα έχουμε και $\lim\limits_{u\to 0}f(u)=0$, οπότε $\lim\limits_{\theta\to 0}f(y(\theta))=0$

Σχόλιο:

Το πρόσημο της $P'(\theta)=10(\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu\theta)$ θα μπορούσαμε να το βρούμε και με επιλογή σημείων στα διαστήματα

$$\Delta_1=\left(0,\frac{\pi}{4}\right)\ \text{και}\ \Delta_2=\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right).$$

Θέματα Παλαιοτέρων Εποχών

Επιμέλεια: Γιώργος Σ. Τασσόπουλος

Γεωμετρία Ε.Μ.Π. Αρχιτέκτονες – Χημικοί Μηχανικοί 1939 (**Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς-** Κεφαλονιά)

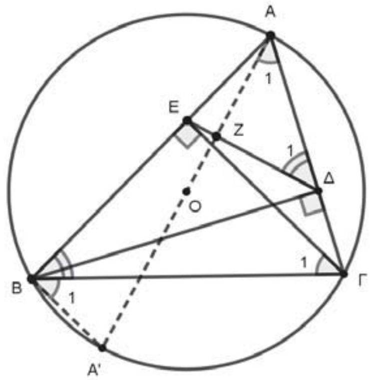
Το δεύτερο θέμα στις εισαγωγικές εξετάσεις Γεωμετρίας για Χημικούς Μηχανικούς και Αρχιτέκτονες του Ε.Μ.Π. το 1939 ήταν το εξής:

Να αποδειχθεί ότι το εμβαδόν παντός τριγώνου ΑΒΓ ισούται προς την ακτίνα του εις αυτό περιγεγραμμένου κύκλου επί το ήμισυ της περιμέτρου του τριγώνου του έχοντος κορυφάς τους πόδας των υψών του ΑΒΓ (ορθικού τριγώνου).

Είναι γνωστό στους εραστές της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ότι το θέμα ισχύει όταν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο. Τι γίνεται όμως όταν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο; Δεν θυμόμουν να είχα δει τυπωμένη κάπου αυτήν την περίπτωση, δεν την είχα σκεφτεί κιόλας, ήταν μια καλή ευκαιρία να την ψάξω…

Ας δούμε την απόδειξη του θέματος με το σωστό δεδομένο , το τρίγωνο ΑΒΓ να είναι οξυγώνιο , και μετά θα δούμε τι γίνεται όταν το ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο.

Είναι γνωστό το θεώρημα Nagel σύμφωνα με το οποίο οι ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ είναι κάθετες στις αντίστοιχες πλευρές του ορθικού.



Παραθέτουμε μια απόδειξη αυτού διαφορετική της κλασικής (με την εφαπτομένη στο Α).

Αν ΒΔ,ΓΕ ύψη και Α΄ το αντιδιαμετρικό σημείο του Α, τότε για να είναι $\mathrm{OA} \perp \Delta\mathrm{E}$ αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\Delta}_1 = 90^\circ$. Έχουμε $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$ και $\mathrm{A'B} // \Gamma\mathrm{E}$ (ως κάθετες στην ΑΒ) $\Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Άρα $\hat{\mathrm{A}}_1 = \hat{\Gamma}_1$. Εξάλλου ΒΓΔΕ εγγράψιμο $\Rightarrow \hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{B}}$, οπότε $\hat{\mathrm{A}}_1 + \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1 + \hat{\mathrm{B}} = 90^\circ$, αφού $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Gamma = 90^\circ$.

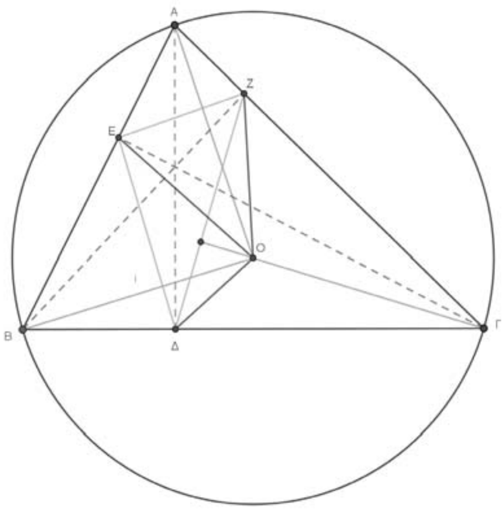
Γι τη λύση του θέματος, θα χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:

«*Το εμβαδόν κυρτού τετραπλεύρου με κάθετες διαγώνιες είναι ίσο με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του*»

Έστω το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έστω ΑΔ, ΒΖ, ΓΕ τα ύψη του. Από το θεώρημα Nagel οι ακτίνες ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ είναι κάθετες στα ΕΖ, ΔΕ, ΔΖ αντίστοιχα.

$$(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{AEOZ}) + (\mathrm{BEO\Delta}) + (\Gamma\Delta\mathrm{OZ}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OA}\cdot \mathrm{EZ} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{OB}\cdot \Delta\mathrm{E} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{O\Gamma}\cdot \Delta\mathrm{Z} = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{R}\cdot \mathrm{EZ} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{R}\cdot \Delta\mathrm{E} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{R}\cdot \Delta\mathrm{Z} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \mathrm{R}\cdot(\mathrm{EZ} + \Delta\mathrm{E} + \Delta\mathrm{Z}).$$



Τώρα μπορούμε να δούμε τι συμβαίνει όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας ,ας θεωρηθεί η γωνία Α αμβλεία. Φυσικά το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ είναι έξω από αυτό…

Το τρίγωνο ΗΒΓ είναι οξυγώνιο. Αυτό γιατί η κάθε γωνία του είναι μια μη ορθή γωνία σε κάποιο ορθογώνιο τρίγωνο. Τα ύψη του είναι τα ΗΔ, ΒΖ, ΓΕ.

Έτσι μπορώ να γράψω: $(\mathrm{HB\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot \mathrm{R}\cdot(\mathrm{ZE} + \mathrm{E\Delta} + \Delta\mathrm{Z})$ βασιζόμενος στο προηγούμενο θέμα.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΒΓ έχουν την ίδια βάση ΒΓ και παραπληρωματικές τις απέναντι γωνίες άρα έχουν ίσες τις ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων. Επίσης ισχύει ότι

$(\mathrm{HAB}) + (\mathrm{HA\Gamma}) = \frac{1}{2}\mathrm{HA}\cdot \mathrm{B\Delta} + \frac{1}{2}\mathrm{HA}\cdot \Gamma\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{HA}\cdot(\mathrm{B\Delta} + \Gamma\Delta) = \frac{1}{2}\mathrm{HA}\cdot \mathrm{B\Gamma}$. Όταν ψάχνεις κάτι στη Γεωμετρία, δεν διστάζεις να αξιοποιήσεις την Τριγωνομετρία…

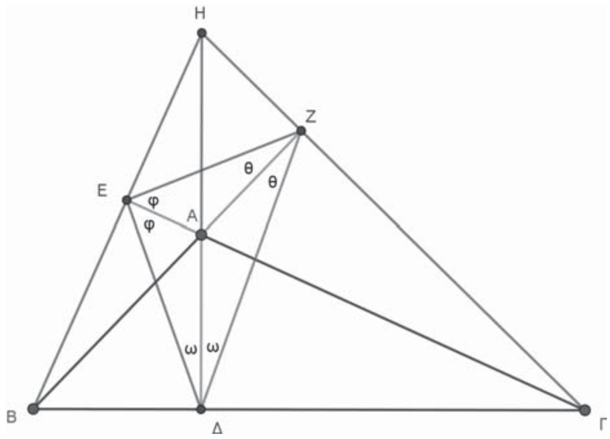
Έτσι λοιπόν θυμόμαστε ότι $\mathrm{HA} = -2\mathrm{R}\cdot \text{συν}\mathrm{A}$, $\mathrm{ZE} = -\mathrm{B\Gamma}\cdot \text{συν}\mathrm{A}$.

Έχουμε λοιπόν: $(\mathrm{AB\Gamma}) = (\mathrm{HB\Gamma}) - (\mathrm{HBA\Gamma}) = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{ZE} + \mathrm{E\Delta} + \Delta\mathrm{Z})\cdot \mathrm{R} - \frac{1}{2}\cdot \mathrm{HA}\cdot \mathrm{B\Gamma} =$

$$=\frac{1}{2}\cdot(ZE+E\Delta+\Delta Z)\cdot R-\frac{1}{2}\cdot(-2R\sigma\upsilon\nu A)\cdot B\Gamma=\frac{1}{2}\cdot(ZE+E\Delta+\Delta Z)\cdot R-R\cdot(-\sigma\upsilon\nu A\cdot B\Gamma)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot R\cdot(ZE+E\Delta+\Delta Z)-R\cdot ZE=\frac{1}{2}\cdot R\cdot(E\Delta+\Delta Z-ZE).$$

Το τι συμβαίνει όταν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο , απαντήθηκε…



- Για λόγους πληρότητας της λύσης , γράφω τις αποδείξεις των ισοτήτων

$$HA=-2R\cdot\sigma\upsilon\nu A,\ ZE=-B\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΗ προκύπτει ότι

$\eta\mu H_1=\frac{EA}{HA}\Rightarrow HA=\frac{EA}{\eta\mu H_1}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΕΑΒ προκύπτει ότι

$$\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-A\right)=\frac{EA}{AB}\Rightarrow EA=\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-A\right)$$

Ισχύει ότι $H_1=\Gamma$ ως γωνίες με πλευρές κάθετες.

Συνεπώς μπορεί να γραφεί ότι

$HA=\frac{\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-A\right)}{\eta\mu\Gamma}\Rightarrow HA=-\frac{2R\cdot\eta\mu\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu\Gamma}\Rightarrow HA=-2R\cdot\sigma\upsilon\nu A$. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΓΒ, ΑΖΕ προκύπτει ότι $\frac{ZE}{B\Gamma}=\frac{AE}{AB}\Rightarrow\frac{ZE}{B\Gamma}=\sigma\upsilon\nu\left(180^\circ-A\right)\Rightarrow ZE=-B\Gamma\cdot\sigma\upsilon\nu A$.

Τελειώνοντας , αναρωτιέμαι αν υπήρξε κάποιος υποψήφιος που να ανέδειξε στο γραπτό του την αστοχία των εξεταστών. Δεν θα το μάθω ποτέ…

Άλλωστε , όπως έλεγε και ο Γιάννης Χαλαπάς, επί δεκαετίες καθηγητής σε φροντιστήρια υποψηφίων, στις εξετάσεις πάμε για να γράψουμε και όχι για να κάνουμε τον έξυπνο…

Άλγεβρα, Πολυτεχνείο 1957 – Τοπογράφοι – Αγρονόμοι (Καθηγητής: Φίλων Βασιλείου)

Ζήτημα $2^{ον}$: Υποτίθεται ότι οι συντελεσταί της δευτεροβαθμίου εξισώσεως γραμμένης υπό την μορφήν $x^2-2\alpha x+\beta=0$ είναι πραγματικοί και $\beta\neq 0$, αι δε ρίζαι αυτής ξ_1,ξ_2 έχουν ανίσους απολύτους τιμάς. Έστω ότι η ρίζα ξ_1 έχει την μεγαλυτέραν απόλυτον τιμήν, δηλαδή είναι $|\xi_2|<|\xi_1|$. Ζητείται να δειχθεί η ισχύς της σχέσεως: $2\left(2\alpha^2-\beta\right)-|\beta|<|\xi_1|^2<2\left(2\alpha^2-\beta\right)$.

Απόδειξη

Αρκεί να δείξουμε ότι: $4\alpha^2-2\beta-|\beta|<|\xi_1|^2<4\alpha^2-2\beta$, ή

$(\xi_1+\xi_2)^2-2\xi_1\cdot\xi_2-|\xi_1\cdot\xi_2|<|\xi_1|^2<(\xi_1+\xi_2)^2-2\xi_1\cdot\xi_2$, ή

$\xi_1^{\ 2}+\xi_2^{\ 2}-|\xi_1\cdot\xi_2|<|\xi_1|^2$ (1) και $|\xi_1|^2<\xi_1^{\ 2}+\xi_2^{\ 2}$ (2).

Αν κάποια ρίζα της δεν ήταν πραγματικός αριθμός, τότε: $\xi_1=\overline{\xi_2}=\kappa+\lambda i$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και $|\xi_1|=|\xi_2|=\sqrt{\kappa^2+\lambda^2}$, πράγμα άτοπο, αφού $|\xi_2|<|\xi_1|$.

Άρα $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$, οπότε $|\xi_1|^2=\xi_1^{\ 2}$ και $|\xi_2|^2=\xi_2^{\ 2}$. Για να ισχύει η (1) λοιπόν, αρκεί: $|\xi_1|^2+|\xi_2|^2-|\xi_1\cdot\xi_2|<|\xi_1|^2$, ή $|\xi_2|^2<|\xi_1\cdot\xi_2|$, ή $|\xi_2|^2<|\xi_1|\cdot|\xi_2|$, ή τελικά $|\xi_2|<|\xi_1|$, που ισχύει. Εξάλλου για να ισχύει η (2), αρκεί: $\xi_1^{\ 2}<\xi_1^{\ 2}+\xi_2^{\ 2}$, ή $0<\xi_2^{\ 2}$ που ισχύει, αφού $\beta\neq 0\Rightarrow\xi_1\cdot\xi_2\neq 0\Rightarrow\xi_2\neq 0\Rightarrow\xi_2^2>0$.

Παρατήρηση: Αν δινόταν ως υπόθεση ότι: $\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$,τότε θα μπορούσε το θέμα αυτό να θεωρηθεί κάλλιστα ως θέμα της σημερινής Α΄ Λυκείου.

Χρήσιμες Επισημάνσεις – Ασκήσεις

Αντώνης Κυριακόπουλος

Ορισμοί, εποπτεία και συντόμευση φράσεων στα Μαθηματικά. Μαθηματικά σύμβολα.

1) Μερικές έννοιες στα Μαθηματικά, στην αρχή είχαν ορισθεί, χωρίς μεγάλη αυστηρότητα, βασιζόμενοι στην γεωμετρική εποπτεία και στην καθημερινή εμπειρία. Μετά όμως που οι έννοιες αυτές ορίστηκαν αυστηρά, ανεξαρτητοποιήθηκαν από την εποπτεία και την καθημερινή εμπειρία, αλλά για τις περισσότερες έμειναν οι ίδιες ονομασίες. Η αυστηρότητα λοιπόν επιβάλλει να μη στηριζόμαστε πλέον στην εποπτεία και την καθημερινή εμπειρία, παρά μόνο στους ορισμούς που έχουν δοθεί. Έτσι λοιπόν στα Μαθηματικά, αν κάποιος δεν έχει υπόψη του τους αυστηρούς ορισμούς των διαφόρων εννοιών είναι σίγουρο ότι θα μπερδευτεί. Όταν στα Μαθηματικά προσπαθούμε να λύσουμε ένα πρόβλημα, στην αρχή, επιστρατεύουμε την φαντασία μας, την εμπειρία μας, την γεωμετρική εποπτεία και ότι άλλο νομίζουμε ότι θα μας βοηθήσει για να φθάσουμε στη λύση. Αλλά, η τελική διατύπωση της λύσης θα πρέπει να στηρίζεται αποκλειστικά και μόνο στους νόμους και τους κανόνες τις Μαθηματικής Λογικής, η οποία δεν ταυτίζεται πάντοτε με την κοινή λογική.

— Για παράδειγμα, η έννοια της συνέχειας μιας συνάρτησης σε σημείο συμφωνεί με την γεωμετρική εποπτεία (η γραφική της παράσταση συνεχίζεται στο σημείο αυτό). Η έννοια όμως της συνέχειας μιας συνάρτησης σε ένα σύνολο , στο οποίο είναι ορισμένη (βλ. τον ορισμό στο σχολικό βιβλίο Γ΄ Λυκείου, σελίδα 71). δεν συμφωνεί πάντοτε με την γεωμετρική εποπτεία. Για παράδειγμα η συνάρτηση: f(x)=εφx είναι συνεχής στο σύνολο ορισμού της, αλλά η γραφική της παράσταση δεν είναι μια συνεχόμενη γραμμή. Όμοια για την συνάρτηση: f(x)=1/x κτλ.

2) Πολλές φορές στα Μαθηματικά κάνουμε μερικές συμφωνίες για να μην έχουμε μακροσκελείς εκφράσεις. Αν κάποιος δεν έχει υπόψη του τις συμφωνίες αυτές, είναι σίγουρο ότι θα μπερδευτεί.

— Για παράδειγμα, μιλάμε για τα πρόσημα ενός τριωνύμου. Αλλά τα τριώνυμα δεν έχουν πρόσημα, αφού δεν είναι πραγματικοί αριθμοί. Μόνο οι πραγματικοί αριθμοί έχουν πρόσημα. Έτσι λοιπόν αν κάποιος δεν έχει υπόψη του τι εννοούμε (τι συμφωνία έχουμε κάνει) θα νομίζει ότι τα τριώνυμα έχουν πρόσημο, που είναι λάθος. Και η συμφωνία που έχουμε κάνει είναι, αντί να λέμε: «Πρόσημα των αριθμητικών τιμών του τριωνύμου όταν το x διατρέχει το σύνολο των πραγματικών αριθμών», να λέμε σύντομα: « πρόσημα του τριωνύμου».

3) Καταρχάς θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι: Για να εισάγουμε ένα σύμβουλο στα μαθηματικά, θα πρέπει προηγουμένως να έχουμε αποδείξει ότι το μαθηματικό αντικείμενο ,που θα συμβολίσουμε με το νέο σύμβολο, υπάρχει και είναι μοναδικό (διαφορετικά, κάθε φορά που θα το συναντάμε δεν θα ξέρουμε τι παριστάνει) και επιπλέον ότι δεν μας οδηγεί σε αντιφάσεις.

Εμείς λοιπόν δίνουμε νόημα στα σύμβολα και θα πρέπει να προσέχουμε ώστε να τηρούνται τα παραπάνω, διαφορετικά θα προκαλέσουμε σύγχυση και θα οδηγηθούμε σε αντιφάσεις. Μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

α) Δεν πρέπει να συγχέουμε την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού α με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ **.**
Νιοστές ρίζες ενός αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε τις λύσεις της
εξίσωσης $x^{\nu} = \alpha$ (όσες έχει). Το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ορίζεται μόνο όταν $\alpha \geq 0$ και παριστάνει **μία μόνο νιοστή ρίζα του α**. Μπορεί όμως το α να έχει και άλλες νιοστές ρίζες.

Ερώτηση. Ποιες είναι οι τετραγωνικές ρίζες του 9;

Απάντηση. Οι αριθμοί 3 και -3(δηλαδή, οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 = 9$).

Ερώτηση. Τι παριστάνει το σύμβολο $\sqrt{9}$;

Απάντηση. Τον αριθμό 3(δηλαδή, τον αριθμό β>0 με $\beta^2=9$): $\sqrt{9}=3$ (και όχι $\sqrt{9}=\pm 3$).

β) Παλαιότερα (μέχρι το 1990 περίπου) τα περισσότερα βιβλία όριζαν ριζικά αρνητικών αριθμών με δείκτη περιττό αριθμό. Για παράδειγμα, έδιναν νόημα στο σύμβολο: $\sqrt[3]{-8}$ και το όριζαν ίσο με: $-\sqrt[3]{-(-8)}=-2$ (επίσης, έδιναν νόημα στο σύμβολο: $\sqrt{\alpha}$, με α αρνητικό πραγματικό αριθμό και το όριζαν ίσο με: $i\sqrt{-\alpha}$, όπου i η φανταστική μονάδα κτλ.). Παρατηρήθηκε όμως ότι τα σύμβολα αυτά μας δημιουργούν πολλά προβλήματα, προκαλούν σύγχυση , γίνονται αιτία πολλών παρερμηνειών (δεν ισχύουν όλα τα γνωστά θεωρήματα) και το σπουδαιότερο *δεν μας διευκολύνουν πουθενά και ούτε μας χρειάζονται*. Έτσι, από το 1990 περίπου και μετά, ελάχιστα βιβλία (Ελληνικά και ξενόγλωσσα) καθαρών Μαθηματικών εισάγουν τα σύμβολα αυτά. Αντίθετα, τα σύμβολα αυτά, τα εισάγουν τα περισσότερα βιβλία Εφαρμοσμένων Μαθηματικών! Και όταν λέω βιβλία μαθηματικών εννοώ και πανεπιστημιακά.

γ) Δεν δίνουμε νόημα, για παράδειγμα, στο σύμβολο: $(-8)^{\frac{1}{3}}$ (βλ. τον ορισμό του συμβόλου $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ στο σχολικό βιβλίο Α΄ Λυκείου, σελίδα 72). γιατί μας οδηγεί σε αντιφάσεις [επίσης οι εκφράσεις: $(3-2i)^{\frac{3}{2}}$, $(\sigma\upsilon\nu\alpha+i\eta\mu\alpha)^{\frac{2}{3}}$ **δεν έχουν νόημα].**

Ασκήσεις

1) (Α΄ Λυκείου) Οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ και θ, όπου θ>0, πληρούν την σχέση:

$$\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{\theta}+\frac{|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|}{\theta^2}+\frac{|\alpha\beta\gamma|}{\theta^3}<1 \qquad (1)$$

Να αποδείξετε ότι καθένας από τους αριθμούς: |α|, |β| και |γ| είναι μικρότερος του θ.

Λύση. Επειδή: $|\alpha+\beta+\gamma|\ge|\alpha|-|\beta+\gamma|$, $|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\ge|\alpha\beta+\gamma\alpha|-|\beta\gamma|$ και θ>0, από την (1), έχουμε:

$$\theta^3>\theta^2|\alpha+\beta+\gamma|+\theta|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|+|\alpha\beta\gamma|\ge\theta^2(|\alpha|-|\beta+\gamma|)+\theta(|\alpha\beta+\gamma\alpha|-|\beta\gamma|)+|\alpha\beta\gamma|$$

$$\Rightarrow\theta^3-\theta^2|\alpha|+\theta^2|\beta+\gamma|-\theta|\alpha||\beta+\gamma|+\theta|\beta\gamma|-|\alpha||\beta\gamma|>0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\theta^2(\theta-|\alpha|)+\theta|\beta+\gamma|(\theta-|\alpha|)+|\beta\gamma|(\theta-|\alpha|)>0\Rightarrow(\theta-|\alpha|)\left(\theta^2+\theta|\beta+\gamma|+|\beta\gamma|\right)>0\ \Rightarrow$$

$\Rightarrow\theta-|\alpha|>0\Rightarrow|\alpha|<\theta$. Όμοια δείχνουμε ότι: |β| <θ και |γ| <θ.

2) (Β΄ Λυκείου) Να λυθεί η ανίσωση: $2(2x-1)<3\sqrt{6+x-x^2}$ (1).

Λύση. Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το σύνολο των αριθμών $x\in\mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: $6+x-x^2\ge 0$. Έχουμε: $6+x-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2-x-6\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 3$. Άρα, το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι: $A=[-2,3]$. Με $x\in A$, έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow\left[\ 2(2x-1)<0\ (2)\ ή\ \begin{cases}2(2x-1)\ge 0\\ 4(2x-1)^2<9\left(6+x-x^2\right)\end{cases}(3)\right]$$

α) Έχουμε: $(2)\Leftrightarrow 2x-1<0\Leftrightarrow x<\frac{1}{2}$. Και επειδή $x\in A$, έχουμε τις λύσεις: $\boxed{-2\le x<\frac{1}{2}}$.

β) Έχουμε: $(3)\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\ 4(4x^2-4x+1)<54x+9x-9x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ x^2-x-2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ -1<x<2\end{cases}\Leftrightarrow$

$\boxed{\frac{1}{2} \le x < 2}$, δεκτές αφού ανήκουν στο Α.

- Συμπεραίνουμε ότι το ζητούμενο σύνολο λύσεων είναι: $\left[-2,\frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2},2\right) = [-2,2)$.

3) (Γ΄Λυκείου) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{1/x}$.
1) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.
2) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει : $x^e \le e^x$.
3) Να βρείτε τον μεγαλύτερο από τους αριθμούς: $\sqrt[\nu]{\nu}, \nu = 1,2,3,...$
4) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$ ένας από τους αριθμούς: $\sqrt[\nu]{\mu}$ και $\sqrt[\mu]{\nu}$ είναι μικρότερος ή ίσος το $\sqrt[3]{3}$.

Λύση.

1) Έχουμε, για κάθε $x > 0 : f'(x) = \left(e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}\right)' = \left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)' = \ldots$

$$= x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} \begin{cases} >0, & \text{άν } x<e \\ =0, & \text{άν } x=e \\ <0, & \text{άν } x>e \end{cases}$$

Άρα: $f \uparrow (0,e], f \downarrow [e,+\infty)$ και στο x=e λαμβάνει (ολικό) μέγιστο, ίσο με: $f(e) = e^{1/e}$.

2) Για κάθε x>0,έχουμε: $f(x) \le f(e) \Rightarrow x^{1/x} \le e^{1/e} \Rightarrow \left(x^{1/x}\right)^{xe} \le \left(e^{1/e}\right)^{xe} \Rightarrow x^e < e^x$.

3) Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχουμε: $f(\nu) = \nu^{1/\nu} = \sqrt[\nu]{\nu}$. Επειδή: $0<1<2<e<3<4<\ldots$, λόγω των παραπάνω, έχουμε: $f(1) < f(2)$ και $f(3) > f(4) > f(5) > \ldots$ και επειδή $f(2) < f(3)$ (γιατί βρίσκουμε εύκολα ότι: $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$), συμπεραίνουμε ότι ο μεγαλύτερος από τους αριθμούς: $\sqrt[\nu]{\nu}, \nu = 1,2,3,...$ είναι ο $\sqrt[3]{3}$.

4) α) Έστω ότι: $\mu \le \nu$. Επειδή $\mu \ge 1$, έχουμε: $0 \le \ln\mu \le \ln\nu \Rightarrow \frac{\ln\mu}{\nu} \le \frac{\ln\nu}{\nu} \Rightarrow \ln\sqrt[\nu]{\mu} \le \ln\sqrt[\nu]{\nu}$

$\Rightarrow \sqrt[\nu]{\mu} \le \sqrt[\nu]{\nu}\left(\le \sqrt[3]{3}\right) \Rightarrow \sqrt[\nu]{\mu} \le \sqrt[3]{3}$.

β) Έστω ότι $\mu > \nu$. Όπως και προηγουμένως, βρίσκουμε ότι: $\sqrt[\mu]{\nu} < \sqrt[\mu]{\mu}\left(\le \sqrt[3]{3}\right) \Rightarrow \sqrt[\mu]{\nu} < \sqrt[3]{3}$.

Διόρθωση

- Στο τεύχος 105 σελίδα 61 στην Άσκηση 7, βρήκαμε ότι η εξίσωση $2f(x) = \ln\left(e^{f(x)} + 2\right)$ ισοδυναμεί με $f(x) = \ln 2$ και εκ' παραδρομής γράψαμε: $\ln 2 \in (1,+\infty)$, ενώ ως γνωστόν: $2 < e < 3 \Rightarrow \ln 2 < \ln e = 1 < \ln 3$. Η εξίσωση λοιπόν μπορεί να διαμορφωθεί π.χ. σε: $2f(x) = \ln\left(2e^{f(x)} + 3\right)$ ώστε να ισοδυναμεί με $f(x) = \ln 3 \in (1,+\infty)$
- Επίσης στη σελίδα 55 στην Άσκηση 3, αντί του $f(D) = \mathbb{R}$ να γραφεί $f(D) = (-2,1)$, αν και αυτό γίνεται φανερό στην επόμενη γραμμή.

Ανισότητα Bernoulli

Διονύσης Γιάνναρος-Πύργος

Η ανισότητα Bernoulli είναι μία σημαντική ανισότητα. Υπάρχει στο σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου σελ. 269). Παρουσιάζουμε τις διάφορες μορφές της:

Έστω $x>-1$. Τότε

- Αν $r<0$ ή $r>1$, ισχύει ότι $(1+x)^r \geq 1+xr$
- Αν $0<r<1$ τότε $(1+x)^r \leq 1+xr$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $x=0$

Απόδειξη

Η συνάρτηση $f(x)=(1+x)^r$ είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $\Delta=(-1,+\infty)$ με $f''(x)=r\cdot(r-1)\cdot(1+x)^{r-2}$. Επομένως ,

- Αν $r<0$ ή $r>1$, είναι $f''(x)>0$ οπότε η f είναι κυρτή στο Δ. Κατά συνέπεια η γραφική παράσταση της f είναι για κάθε $x\in\Delta$ πάνω από την εφαπτομένη της στο σημείο $(0,1)$ με εξαίρεση αυτό το σημείο.

  Η εφαπτομένη αυτή έχει εξίσωση $y=1+rx$ και επομένως για κάθε $x\in\Delta$ ισχύει: $(1+x)^r \geq 1+rx$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $x=0$.
- Αν $0<r<1$, η f είναι κοίλη στο Δ. Επομένως αλλάζει η φορά της προηγούμενης ανισότητας.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε μια σειρά εφαρμογών των διάφορων μορφών της ανισότητας Bernoulli.

Να λυθεί στο $\mathbb{Z}$ η εξίσωση $x=\log(9x+1)$

Απάντηση

Η συνάρτηση $f(x)=\log(9x+1)$ έχει πεδίο ορισμού το $\left(-\frac{1}{9},+\infty\right)$. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ακέραιες αρνητικές ρίζες. Παρατηρούμε ότι η τιμή $x_0=0$ είναι ρίζα της εξίσωσης. Εξετάζουμε αν υπάρχουν κι άλλες ρίζες.

Είναι $x=\log(9x+1)\Leftrightarrow x\cdot 1=\log(9x+1)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log 10^x=\log(9x+1)\Leftrightarrow 10^x=9x+1$.

Η τελευταία γράφεται $(1+9)^x=9x+1$ και από την ανισότητα Bernoulli είναι $(1+9)^x\geq 9x+1$ με την ισότητα να ισχύει για $x=1$. Άρα οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x_1=0$ και $x_2=1$.

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{1-\frac{x}{3}}+\sqrt[6]{x+1}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6,\quad x\in[-1,3]$$

Απάντηση

Η εξίσωση γράφεται: $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{6}}=\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6$.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

- $\left(1-\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}}+(x+1)^{\frac{1}{6}}\leq 1-\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{3}+1+\frac{1}{6}\cdot x=2$
- $\left(1-\frac{x}{24}\right)^4+\left(1+\frac{x}{36}\right)^6\geq 1-4\cdot\frac{x}{24}+1+6\cdot\frac{x}{36}=2$

Επομένως η ισότητα ισχύει μόνο αν κάθε μέλος είναι ίσο με 2 και αυτό συμβαίνει όταν και μόνο $x=0$.

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=4,\ x\in[-1,1]$

Απάντηση

Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί 1 και -1 δεν είναι ρίζες της εξίσωσης. Η δοθείσα γράφεται: $(1-x)^{\frac{1}{4}}+(1+x)^{\frac{1}{4}}=4$ και επειδή $x>-1$ και $0<\frac{1}{4}<1$ εφαρμόζοντας την ανισότητα Bernoulli έχουμε: $(1-x)^{\frac{1}{4}}+(1+x)^{\frac{1}{4}}\leq 1-\frac{1}{4}\cdot x+1+\frac{1}{4}\cdot x=2<4$. Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση

$$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Απάντηση

Η εξίσωση έχει πεδίο ορισμού το $[-1,1]$ και

$\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1+x)^{\frac{1}{3}}\leq 1-\frac{1}{3}x+1+\frac{1}{3}x=2$

ενώ. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}+\sqrt{x^2+1}\geq 2$.

Άρα για να ισχύει η ισότητα πρέπει και αρκεί $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=2=\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$, δηλαδή $x=0$. Παρόμοια μπορεί να αντιμετωπιστεί και η εξίσωση. $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$. καταλήγοντας στο ότι η τιμή $x_0=0$ είναι η μοναδική ρίζα της.

Να λυθεί η εξίσωση

$$\sqrt[5]{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt[5]{1-\sqrt{1-x^2}}=2,\quad x\in[-1,1]$$

Απάντηση

Η εξίσωση γράφεται: $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}=2.$ Παρατηρούμε ότι ο $x_0=0$ δεν είναι ρίζα της. Όμως είναι $\sqrt{1-x^2}>-1$ και $-\sqrt{1-x^2}>-1$. Άρα εφαρμόζοντας την ανισότητα (3) έχουμε:

$\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}\le 1+\frac{1}{5}\cdot\sqrt{1-x^2}$ και

$\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}\le 1-\frac{1}{5}\cdot\sqrt{1-x^2}$, οπότε προσθέτοντας λαμβάνουμε $\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}+\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^{\frac{1}{5}}\le 2$ με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $\sqrt{1-x^2}=0$ δηλαδή $x=\pm 1$.

Να αποδειχτεί ότι $x>0\Rightarrow \sqrt[3]{1+x}<1+\frac{x}{3}$

Απάντηση

Απλή εφαρμογή της ανισότητας Bernoulli με $r=\frac{1}{3}\in(0,1)$.

Αν $x_1,x_2,\cdots,x_n\in(0,1)$ τότε ισχύει η:

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}}\cdot(1+x_2)^{\frac{1}{x_3}}\cdot(1+x_3)^{\frac{1}{x_4}}\cdots(1+x_n)^{\frac{1}{x_1}}>2^n$$

Απάντηση

Από ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_2}}\cdot(1+x_2)^{\frac{1}{x_3}}\cdot(1+x_3)^{\frac{1}{x_4}}\cdots(1+x_n)^{\frac{1}{x_1}}>$$
$$>\left(1+\frac{x_1}{x_2}\right)\cdot\left(1+\frac{x_2}{x_3}\right)\cdot\left(1+\frac{x_3}{x_4}\right)\cdots\left(1+\frac{x_n}{x_1}\right)\ge$$
$$\ge 2\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}\cdot 2\sqrt{\frac{x_2}{x_3}}\cdots 2\sqrt{\frac{x_n}{x_1}}=2^n.$$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ να αποδειχτεί ότι $(2n-1)^{2n-1}\ge n^{2n}$

Απάντηση

Η ανισότητα γράφεται $\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{2n}\ge 2n-1$. Έχουμε $\left(\frac{2n-1}{n}\right)^{2n}=\left[1+\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^{2n}\ge 1+2n\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=2n-1$

Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε φυσικούς αριθμούς $m, n>1$ ισχύει η: $\frac{1}{\sqrt[n]{m+1}}+\frac{1}{\sqrt[m]{n+1}}>1$

Απάντηση

Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$(1+m)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{m}{n}$, $(1+n)^{\frac{1}{m}}<1+\frac{n}{m}$ οπότε έχουμε:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1+m}}+\frac{1}{\sqrt[m]{1+n}}>\frac{n}{m+n}+\frac{m}{m+n}=1.$$

Αν $\alpha,b,c>0,\ \alpha+b+c=1$, τότε

$$\alpha\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-\alpha}+c\sqrt[3]{1+\alpha-b}\le 1$$

(Ολυμπιάδα Ιαπωνίας 2005)

Απάντηση

Έχουμε: $\sqrt[3]{1+(b-c)}=\left[1+(b-c)\right]^{\frac{1}{3}}\le 1+\frac{1}{3}\cdot(b-c)\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha\cdot\sqrt[3]{1+(b-c)}\le\alpha+\frac{1}{3}\cdot\alpha(b-c)$ και ομοίως

$b\sqrt[3]{1+(c-\alpha)}\le b+\frac{1}{3}\cdot b\cdot(c-\alpha)$,

$c\sqrt[3]{1+(\alpha-b)}\le c+\frac{1}{3}\cdot c\cdot(\alpha-b)$, οπότε προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$\alpha\sqrt[3]{1+b-c}+b\sqrt[3]{1+c-\alpha}+c\sqrt[3]{1+\alpha-b}\le\alpha+b+c=1$

Παρατήρηση 1

Θεωρούμε την

$(1+x)^n\ge 1+nx$ (1), $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$, $x\ge -1$

- Θέτουμε $y=1+x\ge 0$ στην (1) και έχουμε: $y^n\ge 1+n(y-1)$ (2) και αν σε αυτή το $y=\frac{\alpha}{b}$

Τότε η (2) δίνει: $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^n\ge 1+n\left(\frac{\alpha}{b}-1\right)$ ή

$\frac{\alpha^n}{b^n}\ge 1+n\cdot\frac{\alpha}{b}-n$ ή $\frac{\alpha^n}{b^{n-1}}\ge b+n\alpha-bn$ ή

$\boxed{\frac{\alpha^n}{b^{n-1}}\ge n\alpha-(n-1)\cdot b,\ \alpha\ge 0,\ b>0\ (3)}$. Το "=" στην τελευταία ισχύει μόνο όταν $\alpha=b$.

Με την βοήθεια της (3) θα αποδείξουμε την ανισότητα Rado και στην συνέχεια την ανισότητα AM-GM.

Θέτουμε $A_n=\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}$, $G_n=(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$.

όπου $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n>0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Παρατηρούμε ότι $A_1=\alpha_1=G_1$ και $nA_n-(n-1)A_{n-1}=$

$=n\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n}-(n-1)\cdot\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{n-1}}{n-1}=$

$=\alpha_n=\frac{G_n^n}{G_{n-1}^{n-1}}$. Από την (3) θέτοντας: $\alpha=A_n$, $b=A_{n-1}$

παίρνουμε: $\frac{A_n^n}{A_{n-1}^{n-1}}\ge n\cdot A_n-(n-1)A_{n-1}=$

$=\alpha_n=\frac{G_n^n}{G_{n-1}^{n-1}}$, δηλαδή $\frac{A_n^n}{A_{n-1}^{n-1}}\ge\frac{G_n^n}{G_{n-1}^{n-1}}$ ή

$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \ge \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ Καταλήξαμε λοιπόν στην ανισότητα του Rado από την οποία προκύπτει ότι η ακολουθία $\frac{A_n^{\,n}}{G_n^{\,n}}$ είναι φθίνουσα, οπότε τελικά έχουμε:

$\left(\frac{A_n}{G_n}\right)^n \ge \left(\frac{A_{n-1}}{G_{n-1}}\right)^{n-1} \ge \cdots \ge \frac{A_1}{G_1} = 1$, από όπου $A_n \ge G_n$

δηλαδή $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \ge (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)^{\frac{1}{n}}$,

ή $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n}{n} \ge \sqrt[n]{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}$

Παρατήρηση 2

Από την $(1+x)^r \le 1+rx$, $r\in(0,1)$ με $y=1+x$ καταλήγουμε όμοια στην

- $y^r - yr + r - 1 \le 0\ (*)$
- Στην (*) θέτουμε

$r=\frac{1}{p}$ και $y=\frac{\alpha^p}{b^q}$ όπου $p>1$ $\alpha,b>0$ και $q=\frac{p}{p-1}$,

οπότε έχουμε: $\left(\frac{\alpha^p}{b^q}\right)^{\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\cdot\frac{\alpha^p}{b^q} + \frac{1}{p} - 1 \le 0 \Rightarrow$

$$\frac{\alpha}{(b^q)^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{p}\cdot\frac{\alpha^p}{b^q} + \frac{1}{p} - 1 \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot b^{q-\frac{1}{p}} - \frac{1}{p}\cdot\alpha^p + b^q\cdot\frac{1-p}{p} \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\cdot b^{q\left(1-\frac{1}{p}\right)} - \frac{\alpha^p}{p} - b^q\cdot\frac{p-1}{p} \le 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha b^{q\cdot\frac{p-1}{p}} \le \frac{\alpha^p}{p} + b^q\cdot\frac{1}{\frac{p}{p-1}} \le 0 \Rightarrow \alpha b \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{b^q}{q} \le 0$$

$\left(q\cdot\frac{p-1}{p}=1, \text{λόγω υπόθεσης}\right)$. **Άρα**

$$\boldsymbol{\alpha\cdot b \le \frac{\alpha^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \alpha,b>0,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p>1}$$

Η παραπάνω είναι η ανισότητα του Young

Μέσω της ανισότητας του Young αποδεικνύεται η ανισότητα του Hölder δηλαδή

- **ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ HÖLDER**

Έστω $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$ τυχόντες πραγματικοί αριθμοί $p>1$ και $q=\frac{p}{p-1}$.

Θα αποδείξουμε την: $|\alpha_1 b_1|+|\alpha_2 b_2|+\cdots+|\alpha_n b_n| \le$

$$\le\left(|\alpha_1|^p+|\alpha_2|^p+\cdots+|\alpha_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(|b_1|^q+|b_2|^q+\cdots+|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

Απόδειξη

- Αν όλοι οι $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ είναι μηδέν ή όλοι οι $b_1,b_2,\cdots,b_n$ είναι μηδέν, τότε ισχύει ως ισότητα.
- Αν ένας τουλάχιστον από τους $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ και ένας τουλάχιστον από τους $b_1,b_2,\cdots,b_n$ είναι διάφορος του μηδενός, τότε θέτουμε

$\alpha = \frac{|\alpha_k|}{\left(|\alpha_1|^p+|\alpha_2|^p+\cdots+|\alpha_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ και

$b = \frac{|b_k|}{\left(|b_1|^q+|b_2|^q+\cdots+|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}}$ για κάθε

$k\in\{1,2,\cdots,n\}$. Για αυτές τις τιμές των α και b από την ανισότητα του Young έχουμε:

$$\frac{|\alpha_k|\cdot|b_k|}{\left(|\alpha_1|^p+|\alpha_2|^p+\cdots+|\alpha_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}\cdot\left(|b_1|^q+|b_2|^q+\cdots+|b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \le$$

$\le \frac{|\alpha_k|^p}{p\cdot\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^p} + \frac{|b_k|^q}{q\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q}$ για κάθε $k\in\{1,2,\cdots,n\}$.

Με πρόσθεση κατά μέλη των n το πλήθος ανισοτήτων καταλήγουμε στην ανισότητα του Hölder

ΕΦΑΡΜΟΓΗ:

Για $p=q=2$ λαμβάνουμε την:

$|\alpha_1 b_1|+|\alpha_2 b_2|+\cdots+|\alpha_n b_n| \le$

$\le\left(\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}+\cdots+\alpha_n^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2}\right)^{\frac{1}{2}}$ **ή**

$\left(\alpha_1^{\,2}+\alpha_2^{\,2}+\cdots+\alpha_n^{\,2}\right)\cdot\left(b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+\cdots+b_n^{\,2}\right) \ge$

$\ge\left(|\alpha_1 b_1|+|\alpha_2 b_2|+\cdots+|\alpha_n b_n|\right)^2$

(Ανισότητα του Cauchy)

Έστω $x_1,x_2,\cdots,x_n>0$ και $\alpha<b$. Θα αποδείξουμε ότι $0<\overline{x_\alpha}\le\overline{x_b}$ όπου $\alpha b\ne 0$ και

$$\overline{x_a}=\left(\frac{x_1^{\,\alpha}+x_2^{\,\alpha}+\cdots+x_n^{\,\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},\ \overline{x_b}=\left(\frac{x_1^{\,b}+x_2^{\,b}+\cdots+x_n^{\,b}}{n}\right)^{\frac{1}{b}}$$

Απάντηση

Είναι προφανές ότι $\overline{x_\alpha}$, $\overline{x_b}>0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{\overline{x_b}}{\overline{x_\alpha}}\ge 1$.

Είναι $\frac{\overline{x_b}}{\overline{x_\alpha}} = \frac{1}{\overline{x_\alpha}}\cdot\left(\frac{x_1^{\,b}+x_2^{\,b}+\cdots+x_n^{\,b}}{n}\right)^{\frac{1}{b}} =$

$$=\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\cdot\left(\frac{x_1^{\,b}+x_2^{\,b}+\cdots+x_n^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}\right)^{\frac{1}{b}}=$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\cdot\left(\frac{x_1^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}+\frac{x_2^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}+\cdots+\frac{x_n^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}\right)^{\frac{1}{b}}=$$

$$=\frac{1}{n^{\frac{1}{b}}}\cdot\left(\left(\frac{x_1}{\overline{x}_\alpha}\right)^b+\left(\frac{x_2}{\overline{x}_\alpha}\right)^b+\cdots+\left(\frac{x_n}{\overline{x}_\alpha}\right)^b\right)^{\frac{1}{b}}.$$

Θέτουμε $\left(\frac{x_1}{\overline{x}_\alpha}\right)^\alpha=d_1,\ \left(\frac{x_2}{\overline{x}_\alpha}\right)^\alpha=d_2,\cdots,\left(\frac{x_n}{\overline{x}_\alpha}\right)^\alpha=d_n$

οπότε $d_1+d_2+\cdots+d_n=\frac{x_1^{\,\alpha}}{\overline{x}_\alpha^{\,\alpha}}+\frac{x_2^{\,\alpha}}{\overline{x}_\alpha^{\,\alpha}}+\cdots+\frac{x_n^{\,\alpha}}{\overline{x}_\alpha^{\,\alpha}}=$

$$=\frac{x_1^{\,\alpha}+x_2^{\,\alpha}+\cdots x_n^{\,\alpha}}{\overline{x}_\alpha^{\,\alpha}}=n\ \Rightarrow$$

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=n=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-\text{όροι}}\ \Rightarrow$$

$$(d_1-1)+(d_2-1)+\cdots+(d_n-1)=0\ \Rightarrow$$

$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$, όπου:

$x_1=d_1-1,\ x_2=d_2-1,\cdots,\ x_n=d_n-1$. Επομένως έχουμε $(d_1)^{\frac{b}{\alpha}}=(1+x_1)^{\frac{b}{\alpha}},(d_2)^{\frac{b}{\alpha}}=$ $=(1+x_2)^{\frac{b}{\alpha}},\cdots,(d_n)^{\frac{b}{\alpha}}=(1+x_n)^{\frac{b}{\alpha}}$. Από την ανισότητα Bernoulli έχουμε:

$$\begin{cases} d_1^{\frac{b}{\alpha}}=(1+x_1)^{\frac{b}{\alpha}}\ge 1+\frac{b}{\alpha}\cdot x_1 \\ d_2^{\frac{b}{\alpha}}=(1+x_2)^{\frac{b}{\alpha}}\ge 1+\frac{b}{\alpha}\cdot x_2 \\ \cdots \\ d_n^{\frac{b}{\alpha}}=(1+x_n)^{\frac{b}{\alpha}}\ge 1+\frac{b}{\alpha}\cdot x_n \end{cases}.$$

Με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε:

$$d_1^{\frac{b}{\alpha}}+d_2^{\frac{b}{\alpha}}+\cdots+d_n^{\frac{b}{\alpha}}\ge n+\frac{b}{\alpha}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=n,$$

δηλαδή $\frac{d_1^{\frac{b}{\alpha}}+d_2^{\frac{b}{\alpha}}+\cdots+d_n^{\frac{b}{\alpha}}}{n}\ge 1$.

Όμως $d_1^{\frac{b}{\alpha}}=\left[\left(\frac{x_1}{\overline{x}_\alpha}\right)^\alpha\right]^{\frac{b}{\alpha}}=\left(\frac{x_1}{\overline{x}_\alpha}\right)^b=\frac{x_1^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}$ και

ομοίως $d_2^{\frac{b}{\alpha}}=\frac{x_2^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}},\cdots,d_n^{\frac{b}{\alpha}}=\frac{x_n^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}$, δηλαδή

$$d_1^{\frac{b}{\alpha}}+d_2^{\frac{b}{\alpha}}+\cdots+d_n^{\frac{b}{\alpha}}=\frac{x_1^{\,b}+x_2^{\,b}+\cdots+x_n^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}=$$

$$=\frac{n\cdot\overline{x}_b^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}\Rightarrow\frac{d_1^{\frac{b}{\alpha}}+d_2^{\frac{b}{\alpha}}+\cdots+d_n^{\frac{b}{\alpha}}}{n}=\frac{\overline{x}_b^{\,b}}{\overline{x}_\alpha^{\,b}}$$

και επειδή $\frac{d_1^{\frac{b}{\alpha}}+d_2^{\frac{b}{\alpha}}+\cdots+d_n^{\frac{b}{\alpha}}}{n}\ge 1$ θα έχουμε:

$$\left(\frac{\overline{x}_b}{\overline{x}_\alpha}\right)^b\ge 1\Rightarrow\frac{\overline{x}_b}{\overline{x}_\alpha}\ge 1\Rightarrow\overline{x}_b\ge\overline{x}_\alpha.$$

Εφαρμογή

$\mathbf{x_1,x_2,\cdots,x_n>0\ ,\ 2>1>-1\Rightarrow}$

$$\Rightarrow\left(\frac{x_1^{\,2}+x_2^{\,2}+\cdots+x_n^{\,2}}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\ge\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ge$$

$$\ge\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}$$

Βιβλία που λάβαμε

Μερικά επίλεκτα βιβλία από τη βιβλιοθήκη του Ομ. Καθηγητή του Ε. Μ. Π. ΙΩΑΝΝΗ Θ. ΧΑΙΝΗ τα οποία υπάρχουν σε βιβλιοπωλεία στο Κέντρο της Αθήνας.

1. Μαθήματα Μαθηματικής: Ανάλυσης, Τόμ. Β΄, 2. Επίλεκτα θέματα Μιγαδικής Ανάλυσης, 3. Σύμμορφη απεικόνιση, 4. Εφαρμογές της Μιγαδικής Ανάλυσης στη θεωρία πεδίων. 5. Εισαγωγή της Συναρτησιακής – Αρμονικής – Στοχαστικής Ανάλυσης, 6. Επίλεκτα θέματα θεωρίας Μέτρου και Ολοκληρώσεως Συναρτησιακής και Στοχαστικής Ανάλυσης, 7. Εισαγωγή στις Άλγεβρες Banach, 8. Εισαγωγή στην Εργοδική θεωρία, 9. Οι χώροι των συναρτήσεων, 10. Επίλεκτα θέματα Διανυσματικών Τοπολογικών Χώρων, 11. Επίλεκτα θέματα επί των Διανυσματικών τοπολογικών χώρων συνεχών συναρτήσεων ορισμένων επί του $\mathbb{R}^n$ καθώς και ενδομορφισμών εντός των χώρων των Banach και Hilbert, 12. Σειρές αριθμών και Σειρές συναρτήσεων.

(Εκδότες: Fountas - Συμεών – ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ)

Μαθηματικά και Λογοτεχνία

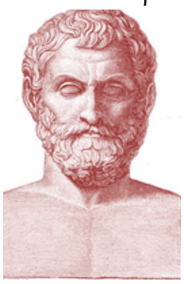
Γέρων ἐραστὴς ἐσχάτη κακή τύχη[1]

Από το βιβλίο
του μαθηματικού **Ευαγγέλου Σπανδάγου**
με τίτλο "Ματωμένα Θεωρήματα"

Η βραδιά ήταν χωρίς φεγγάρι και ο ουρανός ήταν ολοκάθαρος. Τα άστρα έλαμπαν στον ουράνιο θόλο. Ο ηλικιωμένος άνδρας περπατούσε αργά σ' ένα στενό δρομάκι της Μιλήτου με τα μάτια στραμμένα προς τον Ουρανό. Ήταν τόσο πολύ απορροφημένος στην παρατήρηση των άστρων, ώστε να μην προσέξει μια λακκούβα, με αποτέλεσμα να σκοντάψει και να πέσει κάτω.

Μια δροσερή γυναικεία φωνή ακούστηκε:

«Άνθρωπε δεν βλέπεις τι γίνεται μπροστά σου και δίπλα στα πόδια σου και θέλεις να μάθεις τι γίνεται στον Ουρανό;»



Ακούγοντας όμως βογκητά, η νεαρή και χαριέσσα γυναίκα έσπευσε κοντά του. Τον βοήθησε να σηκωθεί και μ' ένα μαντήλι σκούπισε τα αίματα από τις πληγωμένες παλάμες και το χτυπημένο του μέτωπο. Ο **Θαλής**, μόλις συνήλθε, παρατήρησε την κοπέλα. . .

«Είναι γεμάτη χάρη», σκέφτηκε και έσπευσε να ρωτήσει το όνομά της.

«**Πολυγνώτη**», του απάντησε αυτή, και τον ρώτησε με τη σειρά της:

«Είσαι καλά;»

«Μια χαρά είμαι», της απάντησε ο ιδρυτής της σοφίας.

***

Η τυχαία γνωριμία (χρόνια τώρα οι περισσότερες γνωριμίες γίνονται τυχαία) είχε συνέχεια. Μετά από λίγο καιρό η **Πολυγνώτη**, η ευφυής υπηρέτρια του έμπορου **Κλεοβούλου**, μετακόμισε στο σπίτι του πατέρα της γεωμετρίας. Όπως ήταν επόμενο, εκτός από ένθερμη θαυμάστρια και σύντροφος, έγινε και επιμελής μαθήτριά του.

Πολύ γρήγορα άρχισε να ασχολείται με τα αντικείμενα έρευνας του φιλόσοφου στα μαθηματικά, την αστρονομία και τη φυσική. Τα βράδια ο **Θαλής** τής έδειχνε τους αστερισμούς του έναστρου Ουρανού και της εξηγούσε τα Ουράνια φαινόμενα. Τα πρωινά πάλι της ανέλυε τα "μυστικά" της γεωμετρίας, της αριθμητικής και της φυσικής.

Η συμβίωση όμως, όπως είναι γνωστό, είναι ένα γεγονός χαοτικό. Έτσι ο θαυμασμός και η μεγάλη συμπάθεια γρήγορα αντικαταστάθηκαν από την γκρίνια και την αμφισβήτηση.

«Εγώ δεν θα είμαι στη σκιά σου», του είπε μια μέρα. «Θέλω να γίνω αυτοδύναμη. Θέλω να γίνω κι εγώ φιλόσοφος. . .»

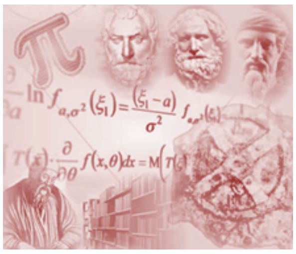
Ο **Θαλής** της έδωσε μια ιδέα εργασίας σχετικά με την απλοποίηση των αριθμητικών συμβόλων με την εισαγωγή της αρχής της ακροφωνίας, δηλαδή με την εισαγωγή αλφαβητικών γραμμάτων που αντιστοιχούσαν το καθένα με το αρχικό γράμμα του ονόματος του αριθμού[2].

Είναι αλήθεια ότι η **Πολυγνώτη** δούλεψε το θέμα αυτό με ιδιαίτερη αγάπη και προσήλωση. Παρου-

[1] Ο γέρος εραστής έχει στο τέλος κακή τύχη.
[2] Έτσι το Δ, αρχικό του Δέκα, παριστάνει τον αριθμό 10. Το Χ, αρχικό του χίλια, παριστάνει τον αριθμό 1.000 κτλ.

σίασε την εργασία της στον πνευματικό κόσμο της Μιλήτου και οι κρίσεις ήταν θετικές.

Η επόμενη απαίτηση δεν άργησε να έρθει: «Θέλω να με παντρευτείς», του είπε.



Ο φιλόσοφος όμως, της αντέταξε χαμογελώντας: «Ούκέτι καιρός»[3].

Στο ερώτημά της γιατί δεν θέλει να αποκτήσει παιδιά, ο **Θαλής** της απάντησε με ύφος ειρωνικό: «Διὰ φιλοτεκνίαν»[4].

Ο **Θαλής** όμως, εγκατέλειψε γρήγορα τις απόψεις του σχετικά με τον γάμο και την τεκνοποίηση και τελικά, παντρεύτηκε παρά τη διαφορά της ηλικίας τους, την **Πολυγνώτη** που ύστερα από πέντε μήνες, γέννησε ένα όμορφο αγοράκι στο οποίο έδωσαν το όνομα **Κύβισθος**.

Ο φιλόσοφος ήταν ξετρελαμένος με τον γιο του. Του μιλούσε, έπαιζε μαζί του, τον πήγαινε περιπάτους. Η ζωή του άλλαξε. Ήταν και πατέρας και παππούς. Ο **Κύβισθος** όμως, έμεινε κοντά του μόνο τέσσερα χρόνια διότι η φιλόδοξη και, όπως αποδείχθηκε, φιλοχρήματη, **Πολυγνώτη** αποφάσισε να επιστρέψει στην πατρίδα της τη Χαλκίδα μαζί με τον γιο της κι ένα μέρος από τα χρήματα του πλούσιου **Θαλή**. Κατά την άποψή της, εκεί θα μπορούσε να διακριθεί με τις γνώσεις που είχε αποκτήσει κατά τα χρόνια της συμβίωσής της με τον μεγάλο φιλόσοφο. Δεν θα ήταν πια στη σκιά του. . . Δεν θα ήταν η **Πολυγνώτη** η σύντροφος του Μιλήσιου φιλόσοφου. . . Θα ήταν η φιλόσοφος **Πολυγνώτη**!

Όταν ο **Θαλής** διάβασε το σημείωμα που του άφησε η σύντροφός του για να τον πληροφορήσει ότι φεύγει μαζί με τον γιο τους, αρκέστηκε να ψιθυρίσει:

"Θηρῶν ἁπάντων ἀγριωτέρα γυνή."[5]

Η επιθυμία της **Πολυγνώτης**, κατά κάποιο τρόπο, φαίνεται να ικανοποιήθηκε διότι δύο αρχαίοι συγγραφείς διέσωσαν το όνομά της με την επωνυμία "Πολυγνώτη ἡ φιλόσοφος".

***

Ο **Κύβισθος** δεν ξαναείδε τον πατέρα του διότι ο **Θαλής** πέθανε μετά από ένα χρόνο.

Οι Μιλήσιοι συνέταξαν το εξής επίγραμμα για τον θάνατο του μεγάλου φυσικού φιλόσοφου:

"Την ώρα που παρακολουθούσε γυμνικό αγώνα,
άρπαξες από το στάδιο, ω Πάνσοφος Δύναμη,
το σοφό άνδρα, τον **Θαλή**. Σε υμνώ που
τον πήρες κοντά σου, διότι από τη στενοχώρια του
που έχασε τον γιο του, δεν έβλεπε τ' άστρα από τη Γη."

Οι κατοπινοί ιστορικοί τροποποίησαν το επίγραμμα ως εξής:

"Την ώρα που παρακολουθούσε γυμνικό αγώνα,
άρπαξες από το στάδιο, ω Πάνσοφος Δύναμη,
το σοφό άνδρα, τον **Θαλή**. Σε υμνώ που
τον πήρες κοντά σου, διότι είχε γεράσει
και δεν μπορούσε να βλέπει τ' αστέρια από τη Γη."

Δεν αρέσουν βλέπετε στους ιστορικούς που βιογραφούν μεγάλους άνδρες, οι ανθρώπινες αδυναμίες των βιογραφούμενων. Έτσι, ο **Θαλής** έπρεπε να μείνει στην ιστορία ως ένας μεγάλος φυσικός φιλόσοφος χωρίς γυναίκα και παιδί και χωρίς τα συναισθήματα της λύπης και της χαράς. Έπρεπε να μείνει στην Ιστορία ως ένας στεγνός μελετητής κι ερευνητής των μαθηματικών, της φυσικής και της αστρονομίας.

---

[3] Πέρασε πια ο καιρός
[4] Επειδή αγαπώ τα παιδιά.
[5] Η γυναίκα είναι πιο άγρια από τα θηρία.

«Σταλίδες» από Bolzano και όχι μόνο

Σωτήρης Ε. Λουρίδας

Κατά την άποψη μας η απόδοση των εννοιών «όριο συνάρτησης» και κατ' επέκταση «συνέχεια συνάρτησης» θα ήταν πιο αυστηρή αν προηγουμένως είχαμε στη διάθεση μας και την έννοια «σημείο συσσώρευσης». Εδώ θα επικεντρωθούμε τελικά σε συνεχείς συναρτήσεις σε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού τους «κοντά στο x_0», με την αποδοχή της σύμβασης του όρου «ιδιότητα P της $f: A \to \mathbb{R}$ κοντά στο x_0», όπως αναφέρεται στο σχολικό βιβλίο. Ας έχουμε υπόψη για την οπτική των πραγμάτων αντίληψη, ότι αν μία συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R},\ a<b$, είναι συνεχής στο $[a, b]$, τότε η γραφική της παράσταση μπορεί να χαραχθεί στο χαρτί χωρίς να σηκωθεί η μύτη του μολυβιού. Τέλος αν η συνάρτηση $f:(a,b) \to \mathbb{R},\ a<b$, είναι συνεχής στο (a, b) και για $\xi \in (a,b)$ ισχύει $\lim\limits_{x \to \xi} f(x) = f(\xi) \neq 0$, τότε κοντά στο ξ θα ισχύει $f(x)f(\xi) > 0$, άρα θα υπάρχει $x_0 \in (a,b)$ τέτοιο που $f(x_0)f(\xi) > 0$. Εδώ ας αναφέρουμε ότι: Αν μία συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $[a, b]$ και είναι $\theta = \min f(x)$ και $\varphi = \max f(x)$, τότε για τον τυχόντα $k \in [\theta, \varphi]$ υπάρχει κατάλληλος $x \in [a, b]$ τέτοιος ώστε $f(x) = k$. Με βάση τη πρόταση αυτή έχουμε ένα τρόπο προσδιορισμού του συνόλου τιμών της συνεχούς συνάρτησης $f:[a,b] \to \mathbb{R},\ a<b$ Συγκεκριμένα ισχύει $f([a,b]) = [\theta, \varphi]$. Για την θεματολογία που θα ακολουθήσει κύρια στα θεωρήματα Bolzano, Ενδιάμεσων τιμών, Μέγιστης και ελάχιστης τιμής, θα θεωρήσουμε γνωστή την θεωρητική βάση του σχολικού βιβλίου. Το πρώτο από τα θέματα που ακολουθούν είναι ένα βασικό θέμα που θα μπορούσε να αποτελέσει βασική πρόταση στα σχολικά βιβλία.

***Bernard Bolzano* (1781-1848):** *Μαθηματικός, Φιλόσοφος, Φυσικός γεννηθείς στην Πράγα με καταγωγή από τη βόρεια Ιταλία. Εκπόνησε διδακτορική διατριβή και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία και διετέλεσε Καθηγητής Πανεπιστημίου στην έδρα της φιλοσοφίας. Η τεράστια φιλοσοφική και μαθηματική του προσωπικότητα τον οδήγησαν σε διατύπωση ερωτημάτων πάνω στα οποία θα μπορούσε να θεμελιωθεί η Ανάλυση και στα οποία απαντώντας τελικά ο ίδιος, διατύπωσε αυστηρούς ορισμούς και αποδείξεις στις διαισθητικές αντιλήψεις του ορίου και της συνέχειας και έτσι αναδεικνύεται σε πρωτοπόρο για την Ανάλυση. Από τα Βασικά του έργα είναι: «Ευκλείδεια Γεωμετρία» το* 1804, *«Θεωρία των συναρτήσεων», «Paradoxes in the infinite» και «Αυστηρός ε-δ ορισμός του ορίου».*

Θέμα 1ο. Α) Αν μία συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R},\ a<b$ είναι συνεχής και 1-1 στο $[a,b]$, τότε η εικόνα του τυχόντος $x_0 \in (a,b)$ θα βρίσκεται αυστηρά μεταξύ των εικόνων των $f(a)$ και $f(b)$.

Β) Αν μία συνάρτηση $f:[a,b] \to \mathbb{R},\ a<b$ είναι συνεχής και 1-1 στο $[a,b]$, τότε θα είναι γνησίως μονότονη στο $[a,b]$.

Γ) Αν μία συνάρτηση $f:(a,b) \to \mathbb{R},\ a<b$ είναι 1-1 και συνεχής σε διάστημα $(a,b), a<b$ με $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = A$ και $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = B$, τότε είναι γνησίως αύξουσα αν $A<B$ και γνησίως φθίνουσα αν

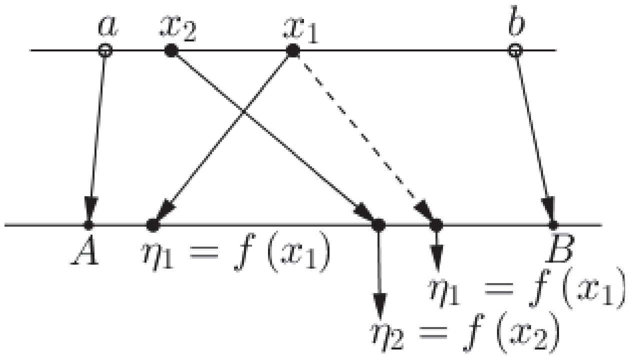
$B < A$.

Λύση: Καταρχάς παρατηρούμε ότι ισχύει $f(a) \neq f(b)$ και για το τυχόν $x_0 \in (a,b)$ ισχύει $f(a) \neq f(x_0)$ και $f(x_0) \neq f(b)$, αφού από την υπόθεση έχουμε ότι η συνάρτηση είναι 1-1.

Α) Θα υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$ και θα εργαστούμε με βάση τη μέθοδο της εις άτοπο απαγωγής για να αποδείξουμε ότι $f(a) < f(x_0) < f(b)$. Έστω ότι ισχύει $f(x_0) \leq f(a) < f(b)$. Τότε με βάση το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $x_1 \in (x_0, b)$ τέτοιο που $f(x_1) = f(a)$. Επειδή η f είναι 1-1, από τη σχέση αυτή παίρνουμε $x_1 = a$, άρα έχουμε $a \in (x_0, b)$ πράγμα άτοπο αφού $x_0 \in (a,b) \Rightarrow a < x_0 < b \Rightarrow a \notin (x_0, b)$. Όμοια καταλήγουμε σε άτοπο αν υποθέσουμε $f(a) < f(b) \leq f(x_0)$. Άρα καταλήγουμε στην ισχύ της σχέσης $f(a) < f(x_0) < f(b)$. Εργαζόμενοι ομοίως αποδεικνύουμε ότι αν $f(b) < f(a)$, τότε για την εικόνα του τυχόντος $x_0 \in (a,b)$ ισχύει $f(b) < f(x_0) < f(a)$.

Β) Θα υποθέσουμε ότι $f(a) < f(b)$ και θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα. Αρκεί δηλαδή να αποδείξουμε ότι για τυχόντα $x_1, x_2 \in (a,b)$, τέτοια ώστε $x_1 < x_2$, ισχύει $f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$. Έστω λοιπόν $x_1, x_2 \in (a,b)$, τέτοια ώστε $x_1 < x_2$. Από το πρώτο ερώτημα παίρνουμε $x_2 \in (a,b) \Rightarrow f(a) < f(x_2) < f(b)$ (1) και $x_1 \in (a, x_2) \Rightarrow f(a) < f(x_1) < f(x_2)$ (2). Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε $a < x_1 < x_2 < b \Rightarrow f(a) < f(x_1) < f(x_2) < f(b)$ ότι δηλαδή η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[a,b]$. Όμοια αν υποθέσουμε ότι $f(b) < f(a)$ αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα.

Γ) Έστω ότι έχουμε $A < B$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (a,b)$, με $x_1 > x_2$ και $A < \eta_1 < \eta_2 < B$, όπου $\eta_1 = f(x_1)$ και $\eta_2 = f(x_2)$. Τότε επειδή η f είναι συνεχής το διάστημα $[x_2, b)$ θα έχει ως εικόνα αυτού το $[\eta_2, B)$. Επειδή $x_1 \in (x_2, b)$ θα έχουμε: $f(x_1) = \eta_1 \in [\eta_2, B)$, ενώ $\eta_1 > \eta_2$ πράγμα άτοπο. Παραθέτουμε στη συνέχεια μία σχηματική αναπαράσταση των παραπάνω.



Άρα τελικά για τυχόντα $x_1, x_2 \in (a,b)$, τέτοια ώστε $a < x_2 < x_1 < b$, ισχύει $A < f(x_2) < f(x_1) < B$, δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα. Όμοια αποδεικνύεται ότι είναι γνησίως φθίνουσα αν $B < A$.

Θέμα 2ο. Α) Αποδείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3 + x$ (1), για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β) Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f^3(x) + f(x) + 1 = x^3 + x$ (2), για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα $[a,b]$, $a < b$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (a,b)$ τέτοιο που $f(\xi) = \dfrac{k\,f(a) + l\,f(b)}{k + l}$, αν k,l πραγματικές σταθερές τέτοιες ώστε $kl > 0$.

Λύση: Α) Γνωρίζουμε ότι ένα ακέραιο πολυώνυμο περιττού βαθμού με πραγματικούς συντελεστές ορισμένο στο $\mathbb{R}$, δέχεται τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα. Η πρόταση αυτή ως γνωστόν αποδεικνύεται και με το θεώρημα Bolzano. Ορίζουμε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και θεωρούμε τυχόν στοιχείο $x_0\in\mathbb{R}$. Σε αυτό το x_0 αντιστοιχίζεται η πραγματική ρίζα του πολυωνύμου $P(t)=t^3+t+1-x_0^3-x_0,\ t\in\mathbb{R}\ (3)$, αν το πολυώνυμο αυτό δέχεται μόνο μία πραγματική ρίζα ή η μεγαλύτερη από τις ρίζες του (3), αν αυτό δέχεται πάνω από μία πραγματικές ρίζες, που τουλάχιστον δύο από αυτές δεν είναι ίσες. Αν r_0 μία τέτοια ρίζα του (3), τότε ισχύει $f(x_0)=r_0$. Εύκολα τώρα παίρνουμε $f^3(x_0)+f(x_0)+1=r_0^3+r_0+1=x_0^3+x_0$. Επομένως η συνάρτηση αυτή επαληθεύει την $f^3(x)+f(x)+1=x^3+x$.

Β) Αρχικά θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Για το τυχόν στοιχείο $x_0\in\mathbb{R}$ έχουμε $f^3(x_0)+f(x_0)+1=x_0^3+x_0\ (4)$.

Από τις σχέσεις $(2),(4)$ έχουμε $f^3(x)-f^3(x_0)+f(x)-f(x_0)=x^3-x_0^3+x-x_0$, ή

$[f(x)-f(x_0)][f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1]=(x-x_0)(x^2+xx_0+x_0^2+1)\ (5)$. Εδώ ας παρατηρήσουμε αλγεβρικά ότι μία παράσταση της μορφής $a^2+ab+b^2,\ a,b\in\mathbb{R}$ είναι θετική ή μηδέν. Αυτό συμβαίνει επειδή $a^2+ab+b^2=\frac{1}{2}(2a^2+2ab+2b^2)=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+a^2+b^2\right]\geq 0$, με την ισότητα $a^2+ab+b^2=0$, να ισχύει μόνο αν $a=b=0$. Από τη διαπίστωση αυτή άμεσα παίρνουμε $a^2+ab+b^2+1\geq 1,\ a,b\in\mathbb{R}$. Με βάση την αλγεβρική αυτή διαπίστωση από τη σχέση (5) προκύπτει $0\leq|f(x)-f(x_0)|\left[f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+1\right]=|x-x_0|(x^2+xx_0+x_0^2+1)$ από όπου έχουμε $0\leq|f(x)-f(x_0)|\leq|x-x_0|(x^2+xx_0+x_0^2+1)$, με $\lim\limits_{x\to x_0}|x-x_0|(x^2+xx_0+x_0^2+1)=0$, άρα από το κριτήριο της παρεμβολής παίρνουμε $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)-f(x_0)|=0$ ή $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. Άρα η $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $g(x)=f(x)-\frac{kf(a)+lf(b)}{k+l}$. Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο τυχόν διάστημα $[a,b]$, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ από την υπόθεση. Εδώ παρατηρούμε ότι

$$g(a)=\frac{l[f(a)-f(b)]}{k+l},\ g(b)=-\frac{k[f(a)-f(b)]}{k+l}\Rightarrow g(a)g(b)=-\frac{kl[f(a)-f(b)]^2}{(k+l)^2}<0.$$

Έτσι από το θεώρημα Bolzano, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(a,b)$ τέτοιο που $f(\xi)=\frac{kf(a)+lf(b)}{k+l}$.

Θέμα 3ο. Αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, με την ιδιότητα $f\left(\frac{x}{k}\right)>f(kx)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και για κάθε $k\in(0,1)$, τότε αποδείξτε ότι για τον τυχόντα $m\in(0,+\infty)$ υπάρχει μη αρνητικός ακέραιος a τέτοιος ώστε να υπάρχει $r\in[a,a+1)$ με $f(r)=m$ και $f(a)\leq m<f(a+1)$.

Λύση: Αν θέσουμε $\frac{1}{k}=u$, τότε $u>1$ και βέβαια $k=\frac{1}{u}$. Τότε έχουμε $f(ux)>f\left(\frac{x}{u}\right)$ για κάθε

$x\in(0,+\infty)$ και για κάθε $u\in(1,+\infty)$. Αν λοιπόν τυχόντες x_1,x_2 με $x_1>x_2>0$, τότε ισχύει $\dfrac{x_1}{x_2}>1$. Για να αξιοποιήσουμε την υπόθεση θέτουμε $\dfrac{x_1}{x_2}=l^2,\ l>1,$ οπότε έχουμε

$f(x_1)=f(l^2x_2)\Rightarrow f(x_1)=f\left[l(lx_2)\right]\Rightarrow f(x_1)>f\left(\dfrac{lx_2}{l}\right)\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ Αυτό σημαίνει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$. Όμως η f είναι και συνεχής στο ίδιο διάστημα. Έστω m θετικός αριθμός. Επειδή η συνάρτηση είναι συνεχής, θα υπάρχει αριθμός $x_0>0$ τέτοιος που $f(x_0)=m$.

Αν a το ακέραιο μέρος του x_0 τότε θα έχουμε $0\le a\le x_0<a+1$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$, θα έχουμε $f(a)\le f(0)<f(a+1)$, δηλαδή $f(a)\le m<f(a+1)$, με $m=f(r)$ όπου $r=x_0\in[a,a+1)$.

Θέμα 4^ο^. Δίνονται δύο συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε η f να είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(f(x))=e^x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και για την g να ισχύει $(1-xg(y))g(x)=(1-yg(x))g(y)$, για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $h(x)=f(x)e^{g(x)}$, έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Λύση: Αρχικά θα επιχειρήσουμε να προσδιορίσουμε τον τύπο της $g(x)$. Η δοθείσα για αυτή συναρτησιακή σχέση γράφεται $g(x)-g(y)=(x-y)g(x)g(y)$ και ισχύει προφανώς για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $g(0)\ne0$. Τότε για $y=0$ παίρνουμε $g(x)-g(0)=xg(x)g(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή $\left[1-xg(0)\right]g(x)=g(0)\ne0\ (I)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα και για $x=\dfrac{1}{g(0)}$. Για $x=\dfrac{1}{g(0)}$ από την (I) προκύπτει $0\ne0$ πράγμα άτοπο. Άρα $g(0)=0$. Τότε για $y=0$ παίρνουμε $g(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι $h(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $x_1=f(x_0)$ μια τιμή της f τότε $f(f(x_0))=e^{x_0}>0\Rightarrow f(x_1)=e^{x_0}>0$. Αν υποθέσουμε ότι $f(0)=0$, τότε έχουμε $f(f(0))=1\Rightarrow f(0)=1\Rightarrow0=1$ πράγμα άτοπο. Άρα θα ισχύει $f(0)\ne0$. Αν υποθέσουμε ότι $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε $f(0)\ge0$ με $f(0)\ne0$ άρα $f(0)>0$. Ταυτόχρονα από $f(x)\ge0$ έχουμε $f(f(x))\ge f(0)>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ καθότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως παίρνουμε $e^x\ge f(0)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ή $x\ge\ell n f(0)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ Για $x=\ell n f(0)-1$ λοιπόν θα ισχύει $\ell n f(0)-1\ge\ell n f(0)$, ή $-1\ge0$ πράγμα άτοπο. Άρα θα υπάρχει $x_2\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_2)<0\ (2)$. Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα, από τις (1), (2) με βάση το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο που $f(x_0)=0$ δηλαδή $h(x_0)=0$.

Θέμα 5^ο^. Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής και αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $g:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=x\left(1+|g(x)|\right)\ (I)$, για κάθε $x\in(-1,1)$ και $f(f(g(x)))=g^2(x)\ (1)$, για κάθε $x\in(-1,1)$.

A) Αποδείξτε ότι η g είναι 1-1,

Β) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $f\left(g(x)\right)=g(x)$, θα έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-1,1)$.

Λύση: Α) Έχουμε: $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow|g(x_1)|=|g(x_2)|\Rightarrow 1+|g(x_1)|=1+|g(x_2)|$

$\Rightarrow\dfrac{g(x_1)}{1+|g(x_1)|}=\dfrac{g(x_2)}{1+|g(x_2)|}\Rightarrow x_1=x_2$ άρα η g είναι 1-1.

Β) Αρχικά θα προσδιορίζουμε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g. Θα δείξουμε ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ η εξίσωση $g(x)=y$ (i) έχει ρίζα $x\in(-1,1)$ Έστω x_0 μια ρίζα της (i) δηλαδή $g(x_0)=y$. Τότε

$$(I)\Rightarrow y=x_0\left(1+|y|\right)\Rightarrow x_0=\frac{y}{1+|y|}=\begin{cases}\dfrac{y}{1+y}, & y\ge 0\\[2mm] \dfrac{y}{1-y}, & y<0\end{cases}\quad \text{και } x_0, y \quad \text{ομόσημοι ή μηδέν}$$

Προφανώς $\dfrac{|y|}{1+|y|}<1\Rightarrow\ -1<\dfrac{y}{1+|y|}<1$, δηλαδή $x_0\in(-1,1)$

Αντιστρόφως θα δείξουμε ότι για $x=x_0$ επαληθεύεται η (i) δηλαδή $g(x_0)=y$

α) Αν $y\ge 0$ τότε $x_0\ge 0$. Έστω $g(x_0)=t$. Τότε

$$(I)\Rightarrow t=x_0\left(1+|t|\right)\ge 0\Rightarrow t=x_0(1+t)\Rightarrow(1-x_0)t=x_0\Rightarrow t=\frac{x_0}{1-x_0}\Rightarrow t=\frac{\dfrac{y}{1+y}}{1-\dfrac{y}{1+y}}\Rightarrow t=y\Rightarrow g(x_0)=y$$

β) Αν $y<0$ τότε $x_0<0$. Έστω $g(x_0)=p$. Τότε $(I)\Rightarrow p=x_0\left(1+|p|\right)\ge 0\Rightarrow p=x_0(1-p)\Rightarrow(1+x_0)p=x_0\Rightarrow$

$$p=\frac{x_0}{1+x_0}\Rightarrow p=\frac{\dfrac{y}{1-y}}{1+\dfrac{y}{1-y}}\Rightarrow p=y\Rightarrow g(x_0)=y$$ Άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $\mathbb{R}$.

Για το αντίστροφο μπορούμε να εργαστούμε συντομότερα ως εξής: Έστω $x_0=\dfrac{y}{1+|y|}$ και. $g(x_0)=t$.

Τότε: $$(I)\Rightarrow t=x_0\left(1+|t|\right)\Rightarrow\begin{cases}x_0t\ge 0\\ |t|=|x_0|\left(1+|t|\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0t\ge 0\\ |t|=\dfrac{|x_0|}{1-|x_0|}\end{cases}\Rightarrow t=\frac{x_0}{1-|x_0|}=\frac{\dfrac{y}{1+|y|}}{1-\dfrac{y}{1+|y|}}=y\Rightarrow g(x_0)=y.$$

Για να έχει η εξίσωση $f\left(g(x)\right)=g(x)$, λύση $x\in(-1,1)$ αρκεί η εξίσωση $f(y)=y$ να έχει λύση $y\in\mathbb{R}$, αφού δείξαμε ότι για κάθε $y\in\mathbb{R}$ υπάρχει $x\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $g(x)=y$

Από την (1) προκύπτει $f\left(f(y)\right)=y^2$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Έστω $f(y)\ge y$, για κάθε $y\in\mathbb{R}$, τότε παίρνουμε $f\left(f(y)\right)\ge f(y)\ge y$, ή $y^2\ge y$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$, αφού f αύξουσα στο $\mathbb{R}$ πράγμα άτοπο. Άρα θα υπάρχει $y_1\in\mathbb{R}$ τέτοιο που $f(y_1)<y_1$, δηλαδή $f(y_1)-y_1<0$ (2). Όμοια αποδεικνύεται ότι θα υπάρχει $y_2\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(y_2)-y_2>0$ (3). Από τις (2) και (3), επειδή η συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=f(x)-x$, είναι συνεχής $\mathbb{R}$, από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει $y_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο που $f(y_0)=y_0$ και επειδή για τη τιμή $y_0\in\mathbb{R}$ θα υπάρχει $x_0\in(-1,1)$ τέτοιο $y_0=g(x_0)$, θα έχουμε για το x_0 αυτό, ότι $f\left(g(x_0)\right)=g(x_0)$.

Ο Ευκλείδης προτείνει ...

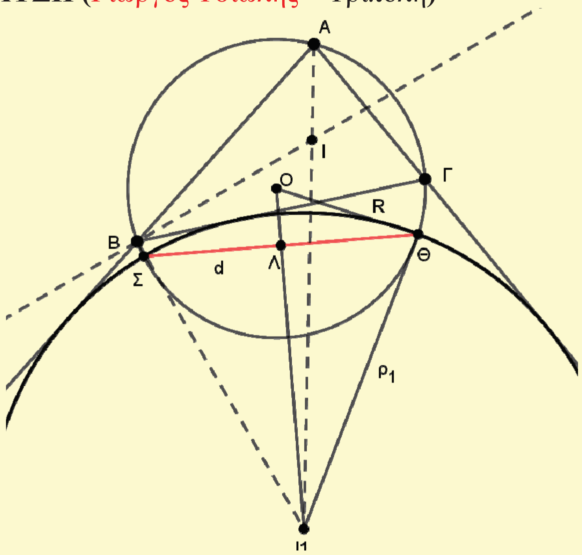
«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

ΑΣΚΗΣΗ 280 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

Να δειχθεί ότι το μήκος d της κοινής χορδής του περιγεγραμμένου κύκλου (O,R) τριγώνου ΑΒΓ με τον παρεγγεγραμμένο στη γωνία Α κύκλο (I_1,ρ_1) είναι: $d=\rho_1\sqrt{\dfrac{\rho_1(4R-\rho_1)}{R(R+2\rho_1)}}$.

(Γιώργος Τριάντος – Αθήνα).

ΛΥΣΗ (Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη)



Από το θεώρημα του **Euler**, για κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, είναι γνωστό ότι ισχύει η σχέση: $R^2+2R\rho_1=OI_1^2$ (1). Η διάκεντρος OI_1 είναι κάθετη στο μέσο Λ της κοινής χορδής ΣΘ των δύο κύκλων. Άρα, $\Theta\Lambda=\dfrac{d}{2}$ (2), ενώ το ΘΛ είναι ύψος του τριγώνου $I_1\Theta O$. Αν είναι τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου $I_1\Theta O$, τότε ισχύει ότι:

$$\frac{d}{2}=\Theta\Lambda=\frac{2}{OI_1}\sqrt{\tau(\tau-\Theta O)(\tau-\Theta I_1)(\tau-OI_1)}=$$

(αν τεθεί $x=OI_1$)

$$=\frac{2}{x}\sqrt{\frac{(R+\rho_1+x)(R+\rho_1-x)(x-R+\rho_1)(x+R-\rho_1)}{16}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{[(R+\rho_1)^2-x^2][x^2-(R-\rho_1)^2]}{x^2}}\quad (3).$$

Επειδή

$(R+\rho_1)^2-x^2=R^2+2R\rho_1+\rho_1^2-R^2-2R\rho_1=\rho_1^2$

και $x^2-(R-\rho_1)^2=R^2+2R\rho_1-R^2+2R\rho_1-\rho_1^2=$

$=4R\rho_1-\rho_1^2=\rho_1(4R-\rho_1)$, η (3) γράφεται:

$$d=\sqrt{\frac{\rho_1^3(4R-\rho_1)}{R(R+2\rho_1)}}=\rho_1\sqrt{\frac{\rho_1(4R-\rho_1)}{R(R+2\rho_1)}}.$$

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία, Γιάννης Τσόπελας Αμαλιάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 281 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

Να λυθεί στο σύνολο R το σύστημα:

$$\begin{cases} x^2-y+6=4\sqrt{3y-2} \\ y^2-x+6=4\sqrt{3x-2} \end{cases}$$

(Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ (Δημήτρης Καραβότας – Κάτω Αχαϊα) Οι ζητούμενες λύσεις πρέπει να ικανοποιούν τους περιορισμούς: $x\ge\dfrac{2}{3}$ και $y\ge\dfrac{2}{3}$. Με αφαίρεση κατά μέλη των δύο εξισώσεων παίρνουμε:

$x^2-y^2+x-y=4(\sqrt{3y-2}-\sqrt{3x-2})\Leftrightarrow$

$(x-y)(x+y+1)=\dfrac{12(y-x)}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{3x-2}}$

$\Leftrightarrow (x-y)\left(x+y+1+\dfrac{12}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{3x-2}}\right)=0$

$\Leftrightarrow x=y$, αφού είναι $x+y+1+\dfrac{12}{\sqrt{3y-2}+\sqrt{3x-2}}>0$.

Για $x=y$ το σύστημα ισοδυναμεί με την εξίσωση:

$x^2-x+6=4\sqrt{3x-2}\Leftrightarrow$

$(x^2-x+6)^2=16(3x-2)\Leftrightarrow$

$x^4-2x^3+13x^2-60x+68=0\Leftrightarrow$

$(x-2)^2(x^2+2x+17)=0\Leftrightarrow x=2$

αφού $x^2+2x+17>0$, για κάθε $x\in R$.

Τελικά το σύστημα δέχεται μοναδική λύση: $(x,y)=(2,2)$.

Λύση έστειλαν: Ανδρής Ιωάννης – Αθήνα, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Ευριπίδης Κασσέτας – Ζωγράφου, Γιώργος Δεληστάθης – Κάτω Πατήσια, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία, Κων/νος Νερούτσος – Γλυφάδα.

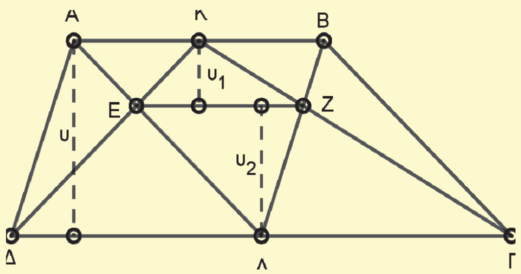
ΑΣΚΗΣΗ 282 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις $AB=\alpha, \Gamma\Delta=\beta$ $(\alpha<\beta)$ και Κ,Λ τα μέσα των ΑΒ, ΓΔ αντιστοίχως. Τα ευθύγραμμα τμήματαΑΛ και ΔΚ τέμνονται στο Ε και τα τμήματα ΒΛ και ΓΚ τέμνονται στο Ζ. Να δειχθεί ότι ισχύει η σχέση: $\dfrac{(\text{ΚΕΛΖ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}<\left(\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2$.

(Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι).

ΛΥΣΗ (Θωμάς Τσάκας – Πάτρα)

Από την **ομοιότητα** των τριγώνων **1) ΑΕΚ, ΔΕΛ** έχουμε: $\dfrac{KE}{E\Delta}=\dfrac{AE}{E\Lambda}=\dfrac{AK}{\Delta\Lambda}=\dfrac{\alpha/2}{\beta/2}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (1).



2) ΚΒΖ, ΖΛΓ έχουμε: $\dfrac{KZ}{\Gamma Z}=\dfrac{BZ}{Z\Lambda}=\dfrac{KB}{\Lambda\Gamma}=\dfrac{\alpha}{\beta}$ (2).

Από τις (1),(2) $\Rightarrow \dfrac{KE}{E\Delta}=\dfrac{KZ}{Z\Gamma}$ δηλ. $AB//EZ//\Gamma\Delta$.

Έχουμε: $(\text{ΚΕΛΖ})=(\text{ΚΕΖ})+(\text{ΖΕΛ})=\dfrac{1}{2}EZ\cdot\upsilon_1+\dfrac{1}{2}EZ\cdot\upsilon_2=\dfrac{1}{2}EZ(\upsilon_1+\upsilon_2)=\dfrac{1}{2}EZ\cdot\upsilon=EZ\cdot\dfrac{(\text{ΑΒΓΔ})}{\alpha+\beta}$

Συνεπώς, $\dfrac{(\text{ΚΕΛΖ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}=\dfrac{EZ}{\alpha+\beta}$ (3).

Από την ομοιότητα των τριγώνων ΛΑΒ, ΛΕΖ έχουμε:

$$\frac{AB}{EZ}=\frac{A\Lambda}{E\Lambda}=\frac{AE+E\Lambda}{E\Lambda}=\frac{AE}{E\Lambda}+1\overset{(1)}{=}\frac{\alpha}{\beta}+1=\frac{\alpha+\beta}{\beta}$$

οπότε $\dfrac{\alpha}{EZ}=\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\Rightarrow EZ=\dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$ (4).

Από τις (3), (4) έπεται ότι:

$$\frac{(\text{ΚΕΛΖ})}{(\text{ΑΒΓΔ})}=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}\overset{\alpha<\beta}{<}\frac{\beta^2}{(\alpha+\beta)^2}<\frac{\beta^2}{(\alpha+\alpha)^2}=\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Ιωάννης Ανδρής – Αθήνα, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία, Δημήτρης Καραβότας – Κάτω Αχαϊα.

ΑΣΚΗΣΗ 283 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

1) Έστω συνάρτηση $f:[a,b]\to R$ για την οποία ισχύουν: $f(a)=f(b)=0$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x\in[a,b]$. Να δειχθεί ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(a,b)$.

2) Αν για τη συνάρτηση $g:[a,b]\to R$ ισχύει ότι $g''(x)<0$, για κάθε $x\in[a,b]$, τότε να δειχθεί ότι $g(a)+(x-a)\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}<g(x)$, για κάθε $x\in(a,b)$.

(Δημήτριος Καρτσακλής – Αγρίνιο).

ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος).

1) Είναι $f''(x)<0$, για κάθε $x\in[a,b]$ οπότε η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a,b]$. Επίσης η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος του ROLLE και άρα υπάρχει $x_0\in(a,b)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$ (το x_0 είναι μοναδικό αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[a,b]$). Έτσι, έχουμε:

$$\begin{cases} x\in[a,x_0) \\ f'\searrow[a,x_0) \end{cases}\Rightarrow f'(x)>f'(x_0)=0 \quad \text{και}$$

$$\begin{cases} x\in(x_0,b] \\ f'\searrow(x_0,b] \end{cases}\Rightarrow f'(x)<f'(x_0)=0.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $[a,x_0]$ και **γνησίως φθίνουσα** στο $[x_0,b]$.

Άρα, είναι: $\begin{cases} x\in(a,x_0] \\ f\nearrow[a,x_0] \end{cases}\Rightarrow f(x)>f(a)=0$ και

$$\begin{cases} x\in[x_0,b) \\ f\searrow[x_0,b] \end{cases}\Rightarrow f(x)>f(b)=0.$$

Τελικά, $f(x)>0$, για κάθε $x\in(a,b)$.

2) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο [a,b] με $f(x)=g(x)-g(a)-\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)$.

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη (αφού είναι και η g) και ισχύει: $f''(x)=g''(x)<0$, για κάθε $x\in[a,b]$ με $f(a)=f(b)=0$.

Άρα, η f ικανοποιεί τις προυποθέσεις του πρώτου ερωτήματος, οπότε ισχύει $f(x)>0$, για κάθε $x\in(a,b)$, δηλαδή $g(x)>g(a)+\frac{g(b)-g(a)}{b-a}(x-a)$, για κάθε $x\in(a,b)$.

Λύση έστειλαν: Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Δημήτρης Καραβότας – Κάτω Αχαϊα, Γιώργος Δεληστάθης – Κάτω Πατήσια, Γιάννης Τσόπελας – Αμαλιάδα.

ΑΣΚΗΣΗ 284 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

Αν $a,b\in R$ με $b>a>1$ και k ένας θετικός ακέραιος αριθμός, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{e^{(k+1)x}-1}{e^x-1}dx>\frac{2(k+1)}{k}(\sqrt{b^k}-\sqrt{a^k}),\ (x\neq 0).$$

(Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι).

ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

Αν $e^x=y$, τότε $\frac{e^{(k+1)x}-1}{e^x-1}=\frac{y^{k+1}-1}{y-1}=y^k+y^{k-1}+...+y+1$.

Από την ανισότητα Cauchy

$$\frac{y^k+y^{k-1}+...+y+1}{k+1}>\sqrt[k+1]{y^k\cdot y^{k-1}\cdot ...y\cdot 1}\Rightarrow$$

$$y^k+y^{k-1}+...+y+1>(k+1)\sqrt[k+1]{y^{\frac{k(k+1)}{2}}}=(k+1)y^{\frac{k}{2}}$$

$$\Rightarrow\frac{e^{(k+1)x}-1}{e^x-1}>(k+1)e^{\frac{k}{2}x}$$

$$\Rightarrow\int_{\ln a}^{\ln b}\frac{e^{(k+1)x}-1}{e^x-1}dx>(k+1)\cdot\int_{\ln a}^{\ln b}e^{\frac{k}{2}x}dx=$$

$$(k+1)\cdot\frac{2}{k}\left[e^{\frac{k}{2}x}\right]_{\ln a}^{\ln b}=\frac{2(k+1)}{k}\cdot(e^{\frac{k}{2}\ln b}-e^{\frac{k}{2}\ln a})=$$

$=\frac{2(k+1)}{k}(\sqrt{b^k}-\sqrt{a^k})$, δηλαδή, το ζητούμενο.

Λύση έστειλαν: Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Δημήτρης Καραβότας – Κάτω Αχαϊα, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Γιώργος Δεληστάθης – Κάτω Πατήσια.

ΑΣΚΗΣΗ 285 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

Να βρεθούν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές $a,b,a_1,b_1,a_2,b_2\in R$ ώστε η παράσταση S να είναι τέλειο τετράγωνο, όπου $S=(ax+b)^2+(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2$.

(Ηρακλής Ευαγγελινός – Γλυφάδα)

ΛΥΣΗ (Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι)

Είναι: $S=(ax+b)^2+(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2=$
$(a^2+a_1^2+a_2^2)x^2+2(ab+a_1b_1+a_2b_2)x+b^2+b_1^2+b_2^2$

1) Αν ένα τουλάχιστον των a,a_1,a_2 είναι διάφορο του μηδενός, τότε το S, ως δευτεροβάθμιο τριώνυμο του x, γίνεται τέλειο τετράγωνο, όταν και μόνον όταν, η διακρίνουσά του $\Delta=0$. Δηλαδή, όταν: $\frac{\Delta}{4}=0$ ή

$$(ab+a_1b_1+a_2b_2)^2-(a^2+a_1^2+a_2^2)(b^2+b_1^2+b_2^2)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{vmatrix}a & a_1\\ b & b_1\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}a & a_2\\ b & b_2\end{vmatrix}^2=0\ \text{(Lagrange)}$$

σχέση, που ισχύει όταν και μόνον όταν:

$$\begin{vmatrix}a & a_1\\ b & b_1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & a_2\\ b & b_2\end{vmatrix}=0.$$

Τότε, είναι:

$$S=[\sqrt{(a^2+a_1^2+a_2^2)}(x+\frac{ab+a_1b_1+a_2b_2}{a^2+a_1^2+a_2^2})]^2.$$

2) Αν $a=a_1=a_2=0$, τότε $S=b^2+b_1^2+b_2^2$ που είναι πάντοτε τέλειο τετράγωνο, αφού ισχύει:

$$S=(\sqrt{b^2+b_1^2+b_2^2})^2.$$

Λύση έστειλαν: Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Γιώργος Δεληστάθης – Κάτω Πατήσια, Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Δημήτρης Καραβότας – Κάτω Αχαϊα.

ΑΣΚΗΣΗ 286 (ΤΕΥΧΟΥΣ 101)

Να αποδειχθεί ότι:

1) Αν το περίκεντρο Ο τριγώνου ΑΒΓ ανήκει στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου, τότε:

$$συνA+συνB+συνΓ=\sqrt{2}.$$

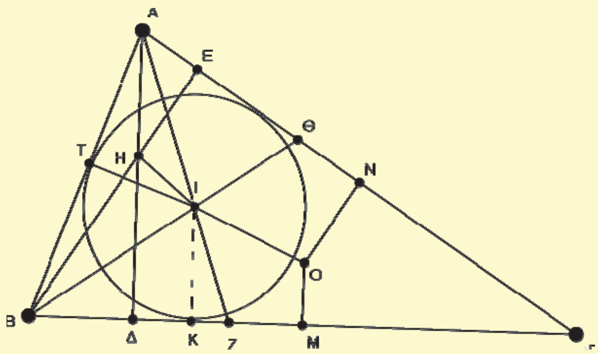
2) Αν το ορθόκεντρο Η τριγώνου ΑΒΓ ανήκει στον εγγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου, τότε:

$$4ημ^2\frac{A}{2}ημ^2\frac{B}{2}ημ^2\frac{Γ}{2}=συνAσυνBσυνΓ.$$

(Γιώργος Τριάντος – Αθήνα).

ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

Από την αρχή πρέπει να σημειωθεί ότι για να είναι τα σημεία Ο και Η εσωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ, το τρίγωνο πρέπει να είναι οξυγώνιο. Επίσης, απαραίτητες θεωρούνται οι αποστάσεις ΟΙ και ΗΙ. Από το θεώρημα του Euler γνωρίζουμε ότι ισχύει: $OI^2 = R^2 - 2R\rho$ (1). Μένει να βρεθεί η απόσταση ΙΗ (βλέπε παρακάτω σχήμα)



Από το τρίγωνο ΑΙΤ έχουμε: $\eta\mu\frac{A}{2} = \frac{IT}{AI} = \frac{\rho}{AI}$ $\Rightarrow AI = \frac{\rho}{\eta\mu\frac{A}{2}}$ και επειδή $\rho = 4R\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ (βασικός τύπος) είναι: $AI = 4R\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}$ (2).

Ακόμη, $AH = 2\cdot OM = 2R\sigma\upsilon\nu A$ (3). Από το τρίγωνο ΑΙΗ και τον νόμο του συνημιτόνου έχουμε:

$IH^2 = AI^2 + AH^2 - 2AI\cdot AH\sigma\upsilon\nu\,H\hat{A}I$ δηλ.

$$IH^2 = 16R^2\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + 4R^2\sigma\upsilon\nu^2 A - 16R^2\sigma\upsilon\nu A\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2} =$$

$$4R^2[4\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 A - 4\sigma\upsilon\nu A\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}] = 4R^2[4\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 A -$$

$$4\sigma\upsilon\nu A\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2}(\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2} + \eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2})] =$$

$$4R^2[4\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} + \sigma\upsilon\nu^2 A - 4\sigma\upsilon\nu A\eta\mu B\eta\mu\Gamma -$$

$$-4\sigma\upsilon\nu A\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}] = R^2[16\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2}\cdot$$

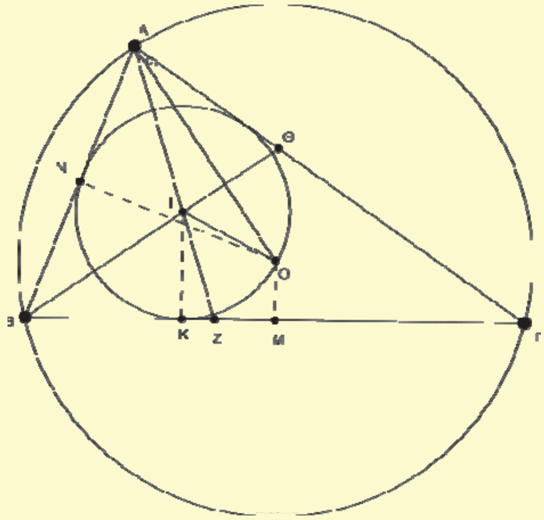
$$(1-\sigma\upsilon\nu A) - 4\sigma\upsilon\nu A(\eta\mu B\eta\mu\Gamma - \sigma\upsilon\nu A)] =$$

$$R^2[32\eta\mu^2\frac{A}{2}\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} - 4\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma]$$

$$= 2\rho^2 - 4R^2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma \Rightarrow$$

$$IH^2 = 2\rho^2 - 4R^2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma \quad (4).$$

Είναι:



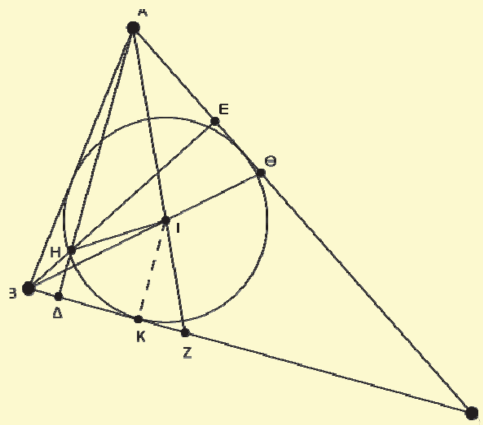
1. $O \in (I,\rho) \Leftrightarrow OI = \rho \Leftrightarrow OI^2 = \rho^2$ και λόγω της (1)

$R^2 - 2R\rho - \rho^2 = 0 \Leftrightarrow (\frac{\rho}{R})^2 - 2\frac{\rho}{R} - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{\rho}{R} = -1 + \sqrt{2}$ (αφού $\frac{\rho}{R} > 0$).

Συνεπώς,

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu\Gamma = 1 + 4\eta\mu\frac{A}{2}\eta\mu\frac{B}{2}\eta\mu\frac{\Gamma}{2} = 1 + \frac{\rho}{R} = \sqrt{2}$$



2. $H \in (I,\rho) \Leftrightarrow HI = \rho \Leftrightarrow HI^2 = \rho^2$ και λόγω (4) $\rho^2 = 4R^2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ή το αυτό

$16R^2\eta\mu^2\frac{A}{2}\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = 4R^2\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$ ή

$4\eta\mu^2\frac{A}{2}\eta\mu^2\frac{B}{2}\eta\mu^2\frac{\Gamma}{2} = \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma$.

Λύση έστειλαν : Κων/νος Νερούτσος – Γλυφάδα, Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Γιώργος Νικητάκης – Σητεία, Γιώργος

Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Γιάννης Τσόπελας – Αμαλιάδα.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

311. Αν το Ο είναι εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ έτσι, ώστε: $\hat{OB\Gamma} = \frac{B}{3}$, $\hat{O\Gamma B} = \frac{\Gamma}{3}$, $\hat{BAO} = \omega$ και $\hat{OA\Gamma} = \varphi$, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\frac{\omega-\varphi}{2} = \varepsilon\varphi\frac{A}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{B+\Gamma}{6}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma-B}{6}.$$

(Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη)

312. Αν οι αριθμοί α,β,γ είναι μεγαλύτεροι του 1, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα:

$$\sqrt{\alpha^2-1}+\sqrt{\beta^2-1}+\sqrt{\gamma^2-1} \le \frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{2}.$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

(Γιώργος Ηλιόπουλος – Καλαμάτα)

313. Αν R,ρ είναι οι ακτίνες περιγεγραμμένου και εγγεγραμμένου κύκλων, αντιστοίχως, τριγώνου ΑΒΓ, τότε να αποδειχθεί ότι ισχύει ανισότητα:

$$\sqrt{3} \le \varepsilon\varphi\frac{A}{2}+\varepsilon\varphi\frac{B}{2}+\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2} \le \sqrt{3}\cdot\left(\frac{R}{2\rho}\right)^2.$$

(Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι)

314. Αν Ρ(ασυνφ,βημφ) είναι σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\alpha>\beta>0$ και η κάθετη της έλλειψης στο Ρ τέμνει τον μικρό άξονα στο Α, να δειχθεί ότι: $(AE')^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}\cdot EP\cdot E'P$, όπου Ε,Ε΄ είναι οι εστίες της έλλειψης αυτής.

(Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη). ***