ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΟΙ ΟΛΥΜΠΙΑΔΕΣ ΓΕΓΟΝΟΤΑ

108

Β΄ ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ

Μαθηματικό περιοδικό για το ΛΥΚΕΙΟ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ - ΜΑΪΟΣ - ΙΟΥΝΙΟΣ 2018 ευρώ 3,5

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ... ΣΥΖΗΤΗΣΕΙΣ

2018 έτος Μαθηματικών 100 χρόνια Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΤΑ Hellenic Post
ΕΦΗΜΕΡΙΔΕΣ ΠΕΡΙΟΔΙΚΑ (Χ +7) ΕΚΔΟΤΩΝ
ΠΛΗΡΩΜΕΝΟ ΤΕΛΟΣ Ταχ. Γραφείο ΚΕΜΠ.ΑΘ. Αριθμός Άδειας 4156
ΕΝΤΥΠΟ ΚΛΕΙΣΤΟ ΑΡ. ΑΔΕΙΑΣ 1099/96 ΚΕΜΠ.ΑΘ.

Επαναληπτικές Ασκήσεις

Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

Τεύχος 108 - Απρίλιος - Μάιος - Ιούνιος 2018 - Ευρώ: 3,50

e-mail: info@hms.gr, www.hms.gr

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ ΓΙΑ ΤΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Γενικά Θέματα

Από τα οράματα του LEIBNIZ στις ανακαλύψεις του TURING 1
Μία μέθοδος εύρεσης του Μ.Κ.Δ. δ των α, β N* (α>β) και της μορφής του αx+βy, (δηλ. δ=αx+βy, όπου x, y Z*) 6
Τρίγωνα, τετράγωνα και πρώτοι αριθμοί 10
Μαθηματικές Ολυμπιάδες 12
Homo Mathematicus 18

Α΄ Τάξη

Άλγεβρα: Ασκήσεις Άλγεβρας, ... 24
Γεωμετρία: Ασκήσεις επανάληψης Γεωμετρίας 29

Β΄ Τάξη

Άλγεβρα: Γενικά Θέματα Άλγεβρας, ... 37
Γεωμετρία: Ασκήσεις επανάληψης στη Γεωμετρία, ... 42
Κατεύθυνση: Επαναληπτικές ασκήσεις Κατεύθυνσης 50

Γ Τάξη

Κατεύθυνη: Επαναληπτικά Θέματα, ... 53
Θέματα Εισαγωγικών Εξετάσεων για τα (Α.Ε.Ι) Παλαιοτέρων Εποχών, ... 59

Γενικά Θέματα

Το Βήμα του Ευκλείδη 63
Μαθηματικά και Λογοτεχνία 67
Αναλυτικές συζητήσεις 69
Ευκλείδης Προτείνει, ... 78

Γράμμα της Σύνταξης

Αγαπητοί μαθητές και Συνάδελφοι,

Βρισκόμαστε πλέον μπροστά στην πύλη των εξετάσεων που αποτελούν την ανταμοιβή μας για τους κόπους μιας χρονιάς.

Καλό είναι να τις αντιμετωπίσουμε με ψυχραιμία και το ελάχιστο δυνατό άγχος ώστε να στεφθούν με επιτυχία.

Θα έχουμε όμως πάντα την πεποίθηση ότι τίποτα στη ζωή δεν κρίνεται με μια μόνο ευκαιρία. Οι δυνατότητες επανάληψης της προσπάθειας και επιλογής νέων στόχων είναι πολλές και μας περιμένουν.

Η πλειοψηφία των θεμάτων που προτείνονται και σ' αυτό το τεύχος για την επανάληψη σας, ανήκει και πάλι στους Συναδέλφους του παραρτήματος Ε.Μ.Ε Ηλείας με τους οποίους είχαμε μια εξαιρετική συνεργασία για την οποία τους ευχαριστούμε θερμά.

Ευχόμαστε σε όλους τους υποψήφιους, η επιτυχία των στόχων τους να σταθεί αφορμή για ένα ευχάριστο καλοκαίρι.

Ο πρόεδρος της Συντακτικής Επιτροπής: Γιώργος Τασσόπουλος
Οι αντιπρόεδροι: Βαγγέλης Ευσταθίου, Γιάννης Κερασαρίδης

Υ.Γ. Υπεύθυνοι για την επιμέλεια της ύλης των τάξεων είναι οι συνάδελφοι:
Α΄Λυκείου [Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης],
Β΄Λυκείου [Β. Καρκάνης, Σ. Λουρίδας, Χρ. Τσιφάκης],
Γ΄Λυκείου [Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς]

Μαθηματικοί Διαγωνισμοί

Θαλής:	**11 Νοεμβρίου 2017**
Ευκλείδης:	**20 Ιανουαρίου 2018**
Αρχιμήδης:	**3 Μαρτίου 2018**
Προκριματικός:	**31 Μαρτίου 2018**
Μεσογειάδα:	**1 Απριλίου 2018**

Εξώφυλλο: Εικαστική σύνθεση

Κάθε Σάββατο γίνονται **ΔΩΡΕΑΝ** μαθήματα,
Στα γραφεία της Ε.Μ.Ε.
Θυμίζουμε ότι: Ερωτήματα σχετικά με τα θέματα Διαγωνισμών υποβάλλονται στην επιτροπή Διαγωνισμών της Ε.Μ.Ε.

Η έγκαιρη πληρωμή της **συνδρομής** βοηθάει στην έκδοση του περιοδικού

Σχόλιο: **Οι εργασίες για το περιοδικό στέλνονται και ηλεκτρονικά στο e-mail: stelios@hms.gr**

ΕΚΔΟΣΗ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΕΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΥ 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ.: 210 3617784 - 210 3616532
Fax: 210 3641025
Εκδότης:
Ανάργυρος Φελλούρης
Διευθυντής:
Ιωάννης Τυρλής

Υποστηρικτής Ταχυδρομικών Υπηρεσιών

ΕΛΤΑ Hellenic Post

Κωδικός ΕΛ.ΤΑ: 2054
ISSN: 1105 - 8005

- Τα διαφημιζόμενα βιβλία δε σημαίνει ότι προτείνονται από την Ε.Μ.Ε.

Τιμή Τεύχους: ευρώ 3,50

- Οι συνεργασίες, [τα άρθρα, οι προτεινόμενες ασκήσεις, οι λύσεις ασκήσεων κλπ.] πρέπει να στέλνονται έγκαιρα, στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. με την ένδειξη "Για τον Ευκλείδη Β΄". Τα χειρόγραφα δεν επιστρέφονται. **Όλα τα άρθρα υπόκεινται σε κρίση, αλλά την κύρια ευθύνη τη φέρει ο εισηγητής.**

Ετήσια συνδρομή (12,00 + 2,00 Ταχυδρομικά = ευρώ 14,00). Ετήσια συνδρομή για Σχολεία ευρώ 12,00

Το αντίτιμο για τα τεύχη που παραγγέλνονται στέλνεται: (1). Με απλή ταχυδρομική επιταγή σε διαταγή Ε.Μ.Ε. Ταχ. Γραφείο Αθήνα 54 Τ.Θ. 30044 (2). Στην ιστοσελίδα της Ε.Μ.Ε., όπου υπάρχει δυνατότητα τραπεζικής συναλλαγής με την τράπεζα EUROBANK (3). Πληρώνεται στα γραφεία της Ε.Μ.Ε. (4).

Εκτύπωση: **ROTOPRINT** (Α. ΜΠΡΟΥΣΑΛΗ & ΣΙΑ ΕΕ). τηλ.: 210 6623778 - 358 **Υπεύθυνος τυπογραφείου:** Δ. Παπαδόπουλος

Από τα οράματα του LEIBNIZ στις ανακαλύψεις του TURING

Θεωρητικό Άρθρο

Σταμάτης Κουλούρης
Γενικό Λύκειο Κολλεγίου Αθηνών
stamkoulour@gmail.com

Επιβλέπων Καθηγητής: Τεύκρος Μιχαηλίδης
Μαθηματικός, Γενικό Λύκειο Κολλεγίου Αθηνών
mtefcros@gmail.com

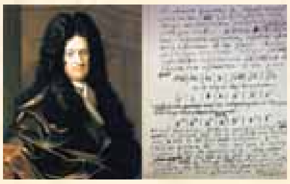
Περίληψη

Η πολυσχιδής φύση του λαμπρού φιλοσόφου, επιστήμονα και μαθηματικού Gottfried Leibniz είχε πάντοτε την σπάνια ικανότητα να υπερβαίνει τα στενά όρια της σκέψης της εποχής της. Αναμφίβολα, ένας επιστήμονας τέτοιου διαμετρήματος δε θα μπορούσε να μη συλλάβει έννοιες και ιδέες που σημάδεψαν την επιστημονική σκέψη και αποτέλεσαν το προοίμιο σημαντικότατων επιτευγμάτων. Μία τέτοια ιδέα ήταν και το όραμά του για έναν Calculus Ratiocinator, για έναν «Λογισμό της Συναγωγής». Ο Leibniz οραματίστηκε μία τεχνητή γλώσσα, στην οποία θα κωδικοποιηθεί το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης. Αυτή η άλγεβρα της Λογικής θα καθόριζε με κατάλληλη κωδικοποίηση αυστηρούς κανόνες χειρισμού των λογικών εννοιών κατά το πρότυπο της άλγεβρας και του χειρισμού των αριθμών. Θέλοντας να καταστήσει το αίτημά του σαφέστερο, ο Leibniz ζήτησε οι λογισμοί αυτής της γλώσσας να μπορούν να διεκπεραιωθούν από ισχυρές υπολογιστικές μηχανές. Οι υπολογιστικοί κανόνες θα μπορούσαν να αποκαλύψουν κάθε λογική αλληλεξάρτηση ανάμεσα στις προτάσεις αυτής της γλώσσας. Πάνω στα θεμέλια, που πρώτος έθεσε ο Leibniz, επένδυσε ο Γερμανός μαθηματικός Gottlob Frege διακόσια έτη αργότερα με την έκδοση της γλώσσας, που επεδίωκε ο Leibniz, μίας «γλώσσας τύπων, βασισμένης στο πρότυπο της γλώσσας της αριθμητικής, προορισμένης για τη θεωρητική σκέψη», της Begriffsschrift (Εννοιογραφία). Ο Frege ανέπτυξε έτσι μια μαθηματική αντιμετώπιση της λογικής, δημιουργώντας ταυτόχρονα μια καινούργια γλώσσα. Το 1936 ο Hilbert διατύπωσε το Entscheidungsproblem αναζητώντας πεπερασμένες υπολογιστικές διαδικασίες με τις οποίες ήταν δυνατό να διαπιστωθεί, με δεδομένες κάποιες προϋποθέσεις και ένα προτεινόμενο συμπέρασμα εκπεφρασμένα στη γλώσσα της λογικής του Frege, αν από τις προϋποθέσεις αυτές μπορούμε να καταλήξουμε στο συγκεκριμένο συμπέρασμα. Ουσιαστικά, ο Hilbert αναζητούσε έναν αλγόριθμο πρωτοφανούς εμβέλειας, που θα αυτοματοποιούσε την επίλυση οποιουδήποτε μαθηματικού προβλήματος ή ανθρώπινου συλλογισμού. Το όραμα του Leibniz φαινόταν επιτέλους να παίρνει σάρκα και οστά! Ωστόσο, ο Alan Turing απέδειξε ότι δεν υπάρχει ο αλγόριθμος του Entscheidungsproblem, καταδικάζοντας την ιδέα του Calculus Ratiocinator. Η διαπίστωση αυτή, όμως, τον οδήγησε σε μία σπουδαία ανακάλυψη, ένα μοντέλο για τον υπολογιστή γενικής χρήσης. Αυτές τις πτυχές της μαθηματικής επιστήμης φιλοδοξεί να ερευνήσει εκτενώς αυτή η εργασία.

Λέξεις-Κλειδιά: *Calculus Ratiocinator, Begriffsschrift, Entscheidungproblem, υπολογιστής γενικής χρήσης*

Το όραμα του LEIBNIZ

Οι βιογράφοι του Leibniz περιγράφουν έναν εξαιρετικά αισιόδοξο άνθρωπο. Αυτή η αισιοδοξία του χαρακτήρα του



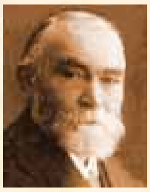
πρέπει οπωσδήποτε να διαδραμάτισε σπουδαίο ρόλο στη σύλληψη και διατύπωση του οράματός του. Η υπέροχη ιδέα του Leibniz ήταν εκπληκτικής εμβέλειας και ίσως αδύνατη να κατανοηθεί από τους συγχρόνους του το τελευταίο τέταρτο του 17ου αιώνα. Ο Leibniz οραματίστηκε μία εγκυκλοπαιδική συλλογή, που θα περιέκλειε το σύνολο της ανθρώπινης γνώσης, καθώς επίσης και μία τεχνητή μαθηματική γλώσσα παγκόσμιας εμβέλειας, με τη βοήθεια της οποίας θα μπορούσε να αποτυπωθεί κάθε είδους γνώση. Η υπέροχη ιδέα του, ωστόσο, δεν περιορίστηκε εκεί. Ο ίδιος απαίτησε τη δημιουργία αυστηρών υπολογιστικών κανόνων, οι οποίοι θα ήταν δυνατόν να αποκαλύψουν κάθε λογική αλληλεξάρτηση μεταξύ αυτών των μαθηματικών προτάσεων. Η εγκυρότητα των προτάσεων αυτών θα ελεγχόταν μέσω μηχανών, που θα ήταν σε θέση να προβούν σε πολύπλοκους υπολογισμούς. Το 1673 ο Leibniz παρουσίασε ένα μοντέλο υπολογιστικής μηχανής, το οποίο μπορούσε να εκτελεί τις τέσσερεις βασικές μαθηματικές πράξεις. Αν και σε αυτό το στάδιο η μηχανή αυτή απείχε κατά πολύ από την υλοποίηση του οράματός του, ο Leibniz συνειδητοποίησε τα οφέλη που θα προέκυπταν από την αυτοματοποίηση υπολογισμών. Τον επόμενο χρόνο, περιέγραψε μια μηχανή που είχε τη δυνατότητα επίλυσης αλγεβρικών εξισώσεων και τον αμέσως ακόλουθο χρόνο αφιέρωσε την προσοχή του σε έναν στόχο: να αναγάγει τη Λογική σε κάποιο είδος υπολογισμών και εν τέλει να κατασκευάσει μια μηχανή, προκειμένου να φέρνει εις πέρας αυτούς του υπολογιμούς. Στο πλαίσιο της ανακάλυψης του απειροστικού υπολογισμού και της επίλυσης προβλημάτων με τη χρήση διαδικασιών ορίου, ο Leibniz εγκαινίασε τον σύγχρονο συμβολισμό της ολοκλήρωσης($\int$) και της παραγώγισης (d). Είχε καταστεί στον ίδιο σαφές πως ένας πραγματικά κατάλληλος συμβολισμός ήταν ανεκτίμητης αξίας. Ομολογούσε πως μέρος του μυστικού της άλγεβρας βρισκόταν στη χαρακτηριστική, δηλαδή στην τέχνη της ορθής χρήσης συμβολικών εκφράσεων. Μια πραγματική χαρακτηριστική για τον Leibniz διέφερε κατά πολύ από ένα αλφαβητικό σύνολο. Στην πραγματική χαρακτηριστική κάθε σύμβολο αντιστοιχούσε σε κάποια σαφή ιδέα, όπως για παράδειγμα η παραγώγιση και η ολοκλήρωση (Davis, 2007). Αυτό που πλέον απαιτούνταν ήταν μία καθολική χαρακτηριστική, ένα σύστ ημα συμβόλων που δε θα ήταν απλώς πραγματικό αλλά και θα κάλυπτε όλη την εμβέλεια της ανθρώπινης σκέψης. Ο γερμανός μαθηματικός διέκρινε στο μεγαλόπνοο σχέδιο του τρία συστατικά στοιχεία. Της επινόησης των κατάλληλων συμβολισμών έπρεπε να προηγηθεί η συγκρότηση της εγκυκλοπαίδειας που θα περιελάμβανε το σύνολο της μέχρι τότε ανθρώπινης γνώσης. Η εξέλιξη αυτή θα άνοιγε το δρόμο για την ανάδειξη των θεμελιακών εννοιών αυτού του συστήματος και την επιλογή των ιδανικών συμβόλων. Επιτομή όλων αυτών θα συνιστούσε η αναγωγή, ή καλύτερα ο περιορισμός, όλων των συμπερασματικών κανόνων σε απλούς υπολογισμούς μεταξύ των συμβόλων – εννοιών. Αυτό ήταν ο Calculus Ratiocinator (λογισμός της συναγωγής). Ο Calculus Ratiocinator ως ιδέα απλώς αποτελούσε ένα πρώιμο στάδιο της συμβολικής λογικής. Η πραγμάτωσή του όμως θα ισοδυναμούσε με κορυφαία στιγμή αυτού του επιστημονικού κλάδου. Ο Leibniz πίστευε ότι όλες οι πτυχές του Κόσμου,φυσικές όσο και υπερφυσικές, συνυφαίνονταν μεταξύ τους με δεσμούς, που θα μπορούσαν να γίνουν αντιληπτοί με λογικά μέσα. Ο Leibniz έγραψε για τη σπουδαιότητα του Calculus Ratiocinator (Davis, 2007):

> *Φανταστείτε πόσο καλύτερο θα ήταν να τις (τις γνώσεις) υπάγουμε σε μαθηματικούς νόμους –οι οποίοι θα είναι ο,τι καλύτερο και ό,τι χρησιμότερο διαθέτουμε- σους ανθρώπινους συλλογισμούς.*

Οι ίδιος αφιέρωσε μεγάλο μέρος των προσπαθειών του για τη δημιουργία ενός Calculus Ratiocinator. Σπουδαιότερη υπήρξε η πρόταση του για μια άλγεβρα της Λογικής, προτείνοντας κανόνες χειρισμού λογικών εννοιών κατά τρόπο παρόμοιο με τους αλγεβρικούς κανόνες χειρισμού αριθμών. Στο πλαίσιο αυτό, αξιοσημείωτη είναι η εισαγωγή ενός νέου συμβόλου (το σύμβολο συν εγγεγραμμένο σε κύκλο), που υποδεικνύει τη συνένωση οποιωνδήποτε ομάδων όρων. Οι απόπειρες του Leibniz δεν απέφεραν κάποιο χειροπιαστό αποτέλεσμα. Το νήμα του οράματός του όμως έμελε να συνεχίσει διακόσια έτη αργότερα ο Gottlob Frege.

Η BEGRIFFSSCHRIFT του FREGE

Η Εννοιολογική γραφή ή Εννοιογραφία του Frege συνιστά γιά αρκετούς λογικούς το σπουδαιότερο πόνημα στον χώρο της λογικής. Ο Frege εμφορούταν από έναν πολύ συγκεκριμένο στόχο: τη δόμηση της άλγεβρας ως ένα συνολικό οικοδόμημα, στα θεμέλια του οποίου θα βρισκόταν η λογική. Για την πραγμάτωση του στόχου αυτού έκρινε αναγκαίο να επινοήσει δικά του ιδιαίτερα σύμβολα, που θα αντιπροσωπεύουν τις λογικές σχέσεις. Το περιεχόμενο, αλλά και ο υπότιτλος της μελέτης του, «Μια γλώσσα τύπων, βασισμένη στο πρότυπο της γλώσσας της αριθμητικής, προορισμένη για την θεωρητική σκέψη» δικαιώνει τον ισχυρισμό πως ο Frege, έχοντας ως πλοηγό την υπέροχη ιδέα του Leibniz για μια καθολική χαρακτηριστική, η ισχύ της οποίας θα πήγαζε από μια εξαιρετικά ενδελεχή επιλογή κατάλληλων συμβόλων, συνέταξε στην ουσία μία καινούρια γλώσσα. Η γλώσσα αυτή αποτελούνταν από προτασιακούς τύπους, προτάσεις δηλαδή με υποκείμενο, ρήμα και κατηγορούμενο, στις οποίες όμως το υποκείμενο και το κατηγορούμενο ήταν μεταβλητά (Μιχαηλίδης• Δελλαπόρτας, 2015). Στον ακόλουθο πίνακα είναι συγκεντρωμένα τα σύμβολα που εισήγαγε και αξιοποίησε ο Frege στην Εννοιογραφία του με τις αντίστοιχες σημασίες τους.



Πίνακας 1: Συμβολισμοί της γλώσσας του Frege (Davis, 2007)

$\supset$	αν..., τότε...
$\wedge$	...και...
$\vee$	...ή...
$\neg$	όχι...

Παράλληλα, εισήγαγε δύο ποσοδείκτες, τον καθολικό ποσοδείκτη, που συμβολίζεται ως ∀, θυμίζοντας τη λέξη (all) και τον υπαρξιακό ποσοδείκτη με το σύμβολο ∃, από τη λέξη exists. Η καινοτομία του Frege έγκειται στη διαπίστωση του πως οι λογικές σχέσεις που διέπουν τους προτασιακούς τύπους, θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν για την ανάλυση και την αποτύπωση της δομής τους (Davis, 2007). Η ανακάλυψη αυτή τον έπεισε πως η λογική του έπρεπε να στηριχτεί σε αυτές τις σχέσεις. Έτσι, σταχυολογώντας δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα, ο Frege θα έγραφε την πρόταση:
Όλοι οι σκύλοι είναι θηλαστικά
κάνοντας χρήση της λογικής σχέσης «εάν..., τότε...»

Εάν το x είναι σκύλος, τότε το x είναι θηλαστικό

Παρομοίως, θα αναπαριστούσε την πρόταση: Μερικοί σκύλοι είναι ημίαιμοι
αξιοποιώντας τη λογική σχέση «...και...» Το x είναι σκύλος και το x είναι ημίαιμος.

Βέβαια, η ποιότητα του x διαφέρει στα δύο παραδείγματα. Στο μεν πρώτο, αυτό που επιδιώκεται να βεβαιωθεί ως αληθές, αφορά σε κάθε x (καθολικός ποσοδείκτης), ενώ στο δεύτερο επιζητείται η βεβαίωση για κάποιο x (υπαρξιακός ποσοδείκτης). Εντάσοντας τους συμβολισμούς του Frege, οι προτάσεις διαμορφώνονται ως εξής:

(∀x) (το x είναι σκύλος ⊃ το x είναι θηλαστικό)
(∃x) (το x είναι σκύλος ∧ το x είναι ημίαιμος)

Ή απλουστευμένα: $(\forall x)\ (\Sigma(x) \supset \Theta(x))$
$(\exists x)\ (\Sigma(x) \wedge K(x))$

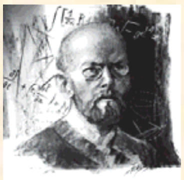
Ακολουθεί ένα ακόμη παράδειγμα: Για D(x): x είναι ένας οδηγός που εμπλέκεται σε τροχαίο ατύχημα
S(x): x είναι ανόητος I(x): x είναι άπειρος

Η πρόταση «Όλοι οι οδηγοί που εμπλέκονται σε τροχαία ατυχήματα είναι είτε ανόητοι είτε άπειροι» λαμβάνει τη μορφή: $(\forall x)\ (D(x) \supset S(x) \vee I(x))$

Το κατεξοχήν εντυπωσιακό στοιχείο, που διέκρινε την Εννοιογραφία, είναι το γεγονός πως η γλώσσα του Frege δομήθηκε με βάση αυστηρούς κανόνες γραμματικής. Αυτό το γνώρισμα καθιστούσε δυνατή την επαλήθευση λογικών συμπερασμάτων ως καθαρά αυτοματοποιημένων πράξεων, των επονομαζόμενων συμπερασματικών κανόνων, με μοναδική αναφορά στη σειρά με την οποία διατάσσονται τα σύμβολα. Η γλώσσα αυτή αποτέλεσε πρότυπο τυπικής γλώσσας συγκροτημένης βάσει αυστηρού συντακτικού. Ο πιο θεμελιώδης συμπερασματικός κανόνας του Frege είναι ο ακόλουθος. Αν τα σύμβολα ∩ και Δ αντιπροσωπεύουν δύο οποιεσδήποτε προτάσεις διατυπωμένες στο σύστημα της Begriffsschrift και αν προταθεί πως τα σύμβολα (∩⊃Δ) και ∩ ισχύουν, τότε δεν προκύπτει κανένα σφάλμα στον ισχυρισμό πως νομοτελειακά πρέπει να ισχύει και το Δ. Η πρόταση Δ ισχύει χωρίς να ελέγχεται καθόλου το περιεχόμενο ή το νόημα της (Davis, 2007). Η διαπίστωση αυτή δικαιώνει τον ισχυρισμό πως η Begriffsschrift μπορεί να θεωρηθεί ως η πρωταρχική μορφή των ευρέως χρησιμοποιούμενων γλωσσών προγραμματισμού σήμερα. Ωστόσο, αν και ο Frege θεωρούσε πως η Begriffsschrift του συνιστούσε την πραγμάτωση του αιτήματος του Leibniz για μία καθολική γλώσσα της λογικής, η Begriffsschrift δεν ανταποκρινόταν σε βασικά κριτήρια που είχε θέσει ο Leibniz. Η γλώσσα του Leibniz θα περιελάμβανε όλες τις αλήθειες της επιστήμης και της ανθρώπινης γνώσης, χωρίς να αναλώνεται μόνο σε λειτουργίες απλής συνεπαγωγής όπως η Begriffsschrift. Η δεύτερη αδυναμία της Εννοιογραφίας είναι η πολυπλοκότητά της.

Η περίπλοκη δομή με τη μακροσκελή διατύπωση προτάσεων ουσιαστικά ακυρώνει οποιαδήποτε πιθανότητα εξαγωγής λογικών συμπερασμάτων μεσα από υπολογιστικές διαδικασίες. Άρα, η Begriffsschrift, με εξαίρεση τις υπεραπλουστευμένες μορφές της, δεν μπορεί να λειτουργήσει ως το υπολογιστικό εργαλείο, που οραματίστηκε ο Leibniz. Μάλιστα, ο Frege με τους κανόνες του δεν αποσκοπούσε στο να παρέχει μία υπολογιστική διαδικασία ικανή να αποδείξει κατά πόσο ένα δυνατό συμπέρασμα μπορεί να προκύψει από κάποιες συγκεκριμένες προτάσεις της λογικής της Εννοιογραφίας. Σε κάθε περίπτωση όμως, η Begriffsschrift προσέλαβε δικαίως τις διαστάσεις επαναστατικού επιτεύγματος στους κόλπους της μαθηματικής λογικής.

Το ENTSCHEIDUNGSPROBLEM του HILBERT



Το 1928 τη σκυτάλη για τους προβληματισμούς του Leibniz ανέλαβε ο Hilbert. Εκείνη τη χρονιά ο Hilbert εξέδωσε ένα συνοπτικό εγχειρίδιο για τη λογική, που περιείχε σε περιληπτική μορφή τις διαλέξεις που παρέδιδε από το 1917 με αντικείμενο τη λογική του Frege, που πλέον αποκαλούνταν πρωτοβάθμια λογική. Σε αυτό το εγχειρίδιο τέθηκαν από το Hilbert δυο ερωτήματα, που ζητούσαν επιτακτικά απάντηση. Το πρώτο είχε να κάνει με την πληρότητα του λογικού συστήματος που πρότεινε ο Frege. Ο ίδιος ήθελε να αποδείξει πως για μια οποιαδήποτε προτεινόμενη επαγωγή, η οποία έχει την ιδιότητα για οποιαδήποτε ερμηνεία των γραμμάτων που χρησιμοποιούνται στους τύπους οι προϋποθέσεις να είναι αληθείς προτάσεις, το συμπέρασμα να είναι επίσης αληθές, τότε οι κανόνες του Frege θα μπορούσαν να οδηγήσουν από τις προϋποθέσεις στο συμπέρασμα (Davis, 2007). Το δεύτερο ζήτημα ήταν ακόμα περισσότερο φλέγον. Έγινε γνωστό ως Entscheidungsproblem (πρόβλημα αποκρισιμότητας). Ο Γερμανός μαθηματικός απαίτησε μέσω του Entscheidungsproblem να βρεθεί μία διαδικασία που να καθορίζει αν μία δεδομένη παράσταση διατυπωμένη στη γλώσσα της λογικής του Frege είναι αληθής ή ψευδής οποιαδήποτε και αν είναι η ερμηνεία της. Αυτό που ζητούσε κατά βάση ο Hilbert ισοδυναμεί με την ανεύρεση μία μεθόδου ικανής να αποφανθεί (entscheiden στη γερμανική γλώσσα) για την εγκυρότητα ή μη του προτασιακού τύπου σε πεπερασμένο αριθμό μηχανιστικών βημάτων, χωρίς να αναλυθεί το περιεχόμενο ή το νόημα του. Αυτό που αναζητούσε ο Hilbert ήταν ένας αλγόριθμος πρωτοφανούς εμβέλειας που θα αυτοματοποιούσε κάθε πτυχή της μαθηματικής επιστήμης ή των ανθρώπινων συλλογισμών (Μιχαηλίδης • Δελλαπόρτας, 2015). Η ιδέα αυτή προξένησε την έντονη αντίδραση αρκετών μαθηματικών της εποχής, όπως ο James Hardy, που συνειδητοποιούσαν πως αν το Entscheidungsproblem πράγματι ίσχυε, κάθε μαθηματικό πρόβλημα θα μπορούσε αναχθεί σε απλό υπολογιστικό πρόβλημα και να επιλυθεί με την εφαρμογή συγκεκριμένων μηχανιστικών κανόνων. Αυτό ισοδυναμεί με το τέλος κάθε μαθηματικής δραστηριότητας. Σίγουρα, η αντιμετώπιση που επιφύλασσε ο Alan Turing στο Entscheidungsproblem θα επανέφερε το χαμόγελο στα πρόσωπα αυτών των θορυβημένων μαθηματικών.

Η διαγωνιοποίηση του CANTOR

Μία σύντομη αναφορά στην μέθοδο της διαγωνιοποίησης του Cantor κρίνεται αναγκαία, δεδομένου ότι τόσο ο Gödel όσο και ο Turing αξιοποίησαν τη μέθοδο αυτή στις μαθηματικές τους στοχεύσεις και ανακαλύψεις. Δημιουργούμε σύνολα αντικειμένων, ή αλλιώς πακέτα αντικειμένων, και ετικέτες για κάθε πακέτο. Η ιδιαιτερότητα της διαγωνιοποίησης έγκειται στο γεγονός πως οι ετικέτες των πακέτων και τα αντικείμενα του κάθε πακέτου πρέπει να είναι στοιχεία ακριβώς του ίδιου τύπου. Για την πληρέστερη κατανόηση της διαγωνίου μεθόδου θα παραθέσουμε ένα παράδειγμα πρακτικής εφαρμογής της, θεωρώντας του τέσσερεις τύπους χαρτιών της τράπουλας. Τα πακέτα και οι ετικέτες του κάθενος εμφανίζονται παρακάτω.

♣ ♥ ♠ ♦

{♦,♥} {♠,♦,♥} {♣,♦} {♦,♠}

Μεταφέροντας τα δεδομένα αυτά σε ένα πίνακα, έχουμε:

Πίνακας 2: Η Διαγωνιοποίηση του Cantor (Davis, 2007)

	♣	♥	♦	♠
♣	–	+	+	–
♥	–	+	+	+
♦	–	–	+	+
♠	+	–	+	–

Χρησιμοποιούμε τα σύμβολα – και +, προκειμένου να εκφράσουμε ότι το στοιχείο- αντικείμενο δεν περιλαμβάνεται και περιλαμβάνεται στο πακέτο αντίστοιχα. Η κάθετη στήλη στο αριστερό μέρος του πίνακα περιλαμβάνει τις τέσσερεις ετικέτες, ενώ στις οριζόντιες γραμμές εμφανίζονται τα στοιχεία κάθε πακέτου. Η διαγωνιοποίηση έγκειται στη δημιουργία ενός καινούριου πακέτου απαρτιζόμενου από ιδίου τύπου στοιχεία αλλά με διαφορετικό περιεχόμενο. Παρατηρώντας τη διαγώνιο στην οποία τα σύμβολα είναι σε γραμμοσκιασμένη κόκκινη ένδειξη, αν αντιστρέψουμε τα σύμβολα αυτής της διαγωνίου, μετατρέποντας δηλαδή τα + σε – και αντίστροφα, προκύπτει ένα πακέτο με διαφορετικό περιεχόμενο.

♣	♥	♦	♠
+	–		+

Το πακέτο είναι το {♣,♠} που πράγματι είναι διαφορετικό από κάθε άλλο πακέτο. Η γενίκευση της μεθόδου είναι βαρύνουσας σημασίας. Η διαγωνιοποίηση λειτουργεί για κάθε πεπερασμένο, αλλά και άπειρο σύνολο στοιχείων.

Το θεώρημα πληρότητας του GÖDEL

Ο Hilbert αναζήτησε πρώτος την ύπαρξη κενών στους κανόνες του Frege. Τα κενά θα σήμαιναν πως ενώ υπάρχουν συμπεράσματα που πρέπει να είναι σωστά, οι κανόνες του Frege δεν επαρκούσαν, προκειμένου να αποδείξουν ότι τα οποιαδήποτε συμπεράσματα εξάγονται από συγκεκριμένες προϋποθέσεις. Ο Hilbert μοιραζόταν την πεποίθηση πως οι κανόνες του Frege ήταν πλήρεις. Υπενθυμίζεται πως στη συμβολική λογική του Frege κάθε προϋπόθεση και κάθε συμπέρασμα κωδικοποιούνται από έναν λογικό τύπο, ο οποίος απαρτίζεται από μία συμβολοσειρά. Αυτά τα σύμβολα αναπαριστούν είτε καθαρά λογικές έννοιες, είτε αντιστοιχούν σε σημεία στίξης ή αναφέρονται σε ειδικές έννοιες του θέματος του συλλογισμού. Παράδειγμα συλλογισμού:

Για όλους τους ακέραιους αριθμούς x υπάρχει ακέραιος y τέτοιος ώστε εάν ο x είναι άρτιος [r(x)], τότε ο y είναι το μισό του x [s(x,y)]

Στη γλώσσα της λογικής του Frege ο παραπάνω συλλογισμός διατυπώνεται ως εξής: $(\forall x)\ (\exists y)\ (r(x) \supset s(x,y))$

Όποια λοιπόν κι αν είναι η ερμηνεία του x,y, όποιο σύνολο αναφοράς κι αν καθορίσουμε, όποια και αν είναι η σχέση s(x,y), αν αυτό γίνει με τρόπο τέτοιο, ώστε οι προϋποθέσεις να είναι αληθείς, τότε και το συμπέρασμα θα είναι αληθές (Μιχαηλίδης, Τ· Δελλαπόρτας Π., 2015).

Το 1930 ο Gödel στη διδακτορική του διατριβή απέδειξε με έναν σχετικά ανώδυνο τρόπο την πληρότητα της λογικής του Frege. Με το Θεώρημα πληρότητας του κατηγορηματικού λογισμού 1^{ης} τάξεως αποδείχτηκε πως ο κατηγορηματικός λογισμός του Frege κωδικοποιεί το σύνολο των κανόνων συναγωγής. Σε αυτό το σημείο κρίνεται απαραίτητη μία μικρή παρένθεση. Ύστερα από την απόδειξη της πληρότητας του λογικού συστήματος του Frege ο Gödel καταπιάστηκε με την απόδειξη της συνέπειας και άλλων λογικών συστημάτων. Στην εργασία του «Πέρι τυπικά μη αποκρίσιμων προτάσεων στο Principia Mathematica και σε σχετικά συστήματα» το 1931 ο Gödel επέλεξε να ασχοληθεί με το σύστημα Principia Mathematica των Whitehead και Russel, που περιέκλειε όλη την ισχύ των κλασικών μαθηματικών. Ο Gödel διαπίστωσε πως υπάρχουν αληθείς προτάσεις που μπορούν να εκφραστούν μέσα στο σύστημα αλλά δεν μπορούν να αποδειχθούν εντός του. Προχώρησε στην κατασκευή προτάσεων A στο PM που βεβαίωναν ότι άλλες προτάσεις B είναι μη αποδείξιμες στο PM. Τότε αναρωτήθηκε εάν οι προτάσεις A και B μπορούσαν να ταυτίζονται. Με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης του Cantor ο Gödel μπόρεσε να αποδείξει ότι η πρόταση για την οποία βεβαιώνεται ότι είναι μη αποδείξιμη και η πρόταση που κάνει αυτή τη βεβαίωση μπορεί να είναι ίδιες. Επομένως, η πρόταση A βεβαιώνει πως η πρόταση A δεν είναι αποδείξιμη στο PM. Το συμπέρασμα αυτό κατέρριψε την πεποίθηση πολλών μαθηματικών κύκλων της εποχής του Gödel πως η μοναδική έννοια αλήθειας εντός του PM είναι αυτή της αποδειξιμότητας. Συνεχίζοντας, ο Gödel απέδειξε πως αν το PM είναι συνεπές, τότε ισχύει η A. Επομένως, η A δεν μπορεί να αποδειχθεί εντός του PM, επειδή το PM είναι συνεπές. Αφού η A δεν μπορεί να αποδειχθεί στο PM, τότε και η συνέπεια του PM δεν μπορεί να αποδειχθεί στο PM (Davis, 2007· Goldstein, 2006). Ο Gödel με το θεώρημα της μη πληρότητας διατράνωσε πως κανένας μαθηματικός φορμαλισμός και κανένα λογικό σύστημα, όσο ισχυρό και αν είναι, δεν μπορεί να περικλείσει το σύνολο της μαθηματικής αλήθειας, η οποία εκτείνεται πέρα από οτιδήποτε μπορεί να αποδειχθεί στο πλαίσιο αυτών των συστημάτων (Davis, 2007).

Ο TURING αναλαμβάνει δράση

Το θέωρημα μη πληρότητας του Gödel εγκαινίασε ένα νέο κλίμα και έναν νέο τρόπο σκέψης στους ευρωπαϊκούς μαθηματικούς κύκλους. Οι ανακαλύψεις του Gödel επέτειναν την πεποίθηση πολλών πως ο αλγόριθμος που είχε απαιτήσει ο Hilbert (Entscheidungsproblem) θα ήταν αδύνατον να υπάρξει. Στη μαθηματική επιστήμη όμως δεν μπορεί να γίνεται λόγος για βεβαιότητα δίχως απόδειξη. Την εργασία ανεύρεσης αυτής της απόδειξης ανέλαβε ο Turing. Η πρώτη κίνηση του Turing υπήρξε η ενδελεχής ανάλυση της υπολογιστικής διαδικασίας. Τη δεκαετία του 1930 τους υπολογισμούς εκτελούσαν οι λεγόμενες computers, γυναίκες των οποίων αρμοδιότητα ήταν η εκτέλεση υπολογισμών (Μιχαηλίδης • Δελλαπόρτας, 2015). Ο Turing κατέδειξε πως ο περιορισμός των βασικών ενεργειών των computers ήταν εφικτός. Μάλιστα, οι ενέργειες τους περιορίζονταν τόσο πολύ που σε περίπτωση αντικατάστασής τους από μία μηχανή η τελευταία δε θα αντιμετώπιζε καμία δυσκολία στην εκτέλεση των πράξεων. Ο Turing φαντάστηκε η υπολογιστική διαδικασία να εκτελείται κατά μήκος μίας ταινίας χαρτιού, διαμερισματοποιημένης σε κουτάκια.

Σχήμα 1: Αναπαράσταση της ταινίας του Turing machine (Davis, 2007)

1	5	8	4	X	9	2	=	3	1	6	8	+	1	4	2	5	6	0	=	1	4	5	7	2	8

Στην αρχή η προσοχή της computer είναι συγκεντρωμένη στον πολλαπλασιασμό των ζευγών αρχής γενομένης από το ζεύγος των αριθμών σε κόκκινη επισήμανση. Μόλις ολοκληρωθεί η διαδικασία αυτή, τα επιμέρους γινόμενα προστίθενται. Η διαδικασία της πρόσθεσης ξεκινά με την πρόσθεση του ζεύγους των αριθμών σε γαλάζια ένδειξη. Η ανάλυση της διαδικασίας του υπολογισμού επέτρεψε στον Turing να κατανοήσει πως ο υπολογισμός θα μπορούσε να εκτελείται γράφοντας μόνο σύμβολα σε κουτάκια πάνω σε μία ταινία χαρτιού. Σε κάθε βήμα αυτός που υπολογίζει διαβάζει το σύμβολο που είναι γραμμένο σε ένα από αυτά τα κουτάκια. Η ενέργεια που θα ακολουθήσει καθορίζεται από το προηγούμενο σύμβολο και την κατάσταση του μυαλού στην προκειμένη στιγμή και αποτελείται από την εγγραφή ενός συμβόλου στο κουτάκι στο οποίο επικεντρώθηκε η προσοχή του. Ύστερα, η προσοχή του μετατοπίζεται στο κουτάκι που βρίσκεται αριστερά ή δεξιά του προηγούμενου κουτιού (Davis, 2007). Η απλοποίηση αυτή κατέστησε δυνατή την αντικατάσταση του ατόμου από μία μηχανή που ονομάστηκε μηχανή Turing. Η μηχανή αυτή είναι σε θέση να εντοπίσει ένα ανιχνευόμενο σύμβολο και να αντιδράσει σύμφωνα με αυτό. Στη συνέχεια, η μηχανή θα σβήσει το ανιχνευόμενο σύμβολο και μέσα στο ίδιο κουτάκι θα αποτυπώσει ένα άλλο σύμβολο και ακολούθως είτε συνεχίζει την ανάγνωση της ταινίας από το ίδιο σημείο είτε μετατοπίζεται ένα κουτάκι αριστερά ή ένα κουτάκι δεξιά. Ο Turing κατέδειξε ότι κάθε πρόβλημα υπολογίσιμο με αλγοριθμική διαδικασία μπορεί να διεκπεραιωθεί από μία τέτοια μηχανή. Η λειτουργία της πρέπει αρχικά να καθορισθεί από μία λεπτομερή καταγραφή όλων των ενδεχόμενων καταστάσεων στις οποίες θα βρεθεί. Το επόμενο βήμα έγκειται στην περιγραφή-τον προγραμματισμό της αντίδρασης τη μηχανής απέναντι σε κάθε κατάσταση και σε κάθε σύμβολο που ανιχνεύει. Η αντίδραση της μηχανής συνίσταται στην αλλαγή του συμβόλου στην ταινία, την μετακύκλιση της προσοχής ένα κουτί δεξιά ή αριστερά και την αλλαγή κατάστασης. Ο συμβολισμός που χρησιμοποίησε ο Turing ακολουθούσε το πρότυπο: Q a: c → F (πεντάδα), προκειμένου να κωδικοποιηθεί η πρόταση: όταν η μηχανή βρίσκεται στην κατάσταση Q και εντοπίζει στην ταινία το σύμβολο α, θα σβήσει το α και θα γράψει c, θα μετακινηθεί ένα κουτάκι δεξιά και θα περιέλθει στην κατάσταση F. Η αλλαγή του συμβόλου χωρίς μετακίνηση της μηχανής σε άλλο κουτί αποτυπώνεται ως Qa:c*F (Davis, 2007). Σημαντικές είναι δύο επισημάνσεις. Πρωτίστως, ο όρος μηχανή Turing δεν θα έπρεπε να παραπλανά. Επρόκειτο περισσότερο για μοντέλο αφηρημένων μαθηματικών εννοιών παρά για μηχανή, με την έννοια που της αποδίδεται σήμερα. Δεύτερον, στη μηχανή δεν υπήρχε κάποιο όριο στην ποσότητα της ταινίας διαθέσιμης για κάθε υπολογισμό. Η συμπεριφορά της μηχανής, δηλαδή αν θα προχωρά απο κουτάκι σε κουτάκι, αν θα συνεχίζει ατέρμονα πάνω στην ταινία χωρίς να σταματά ή αν θα παλινδρομεί ατέρμονα εξαρτόταν από την τιμή εισόδου της μηχανής.

Η επίλυση του ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

Ο Turing θεώρησε ένα σύνολο τιμών φυσικών αριθμών για τους οποίους η μηχανή, ανιχνεύοντάς τους θα σταματήσει, ονομάζοντας αυτό το σύνολο Σύνολο Εισόδων Τερματισμού (Σ.Ε.Τ.). Θεώρησε ακόμα ένα άλλο σύνολο φυσικών αριθμών D, διαφορετικό από το Σ.Ε.Τ.. Η κατασκευή του συνόλου D διαφορετικού από αυτό του Σ.Ε.Τ. επετεύχθη με τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης του Cantor. Επομένως, κάθε στοιχείο του συνόλου D δεν ανήκει στο Σ.Ε.Τ. Αφού όρισε τα δύο αυτά σύνολα ο Turing διατύπωσε ένα πρόβλημα, το οποίο ήλπιζε ότι δε θα μπορούσε να επιλυθεί από τη μηχανή Turing, δηλαδή να επιλυθεί αλγοριθμικά. Το πρόβλημα ήταν το εξής: Βρείτε αλγόριθμο που να αποφαίνεται για κάθε δεδομένο φυσικό αριθμό εάν ανήκει ή όχι στο σύνολο D (Davis, 2007). Η σπουδαιότητα ανακάλυψης αυτού του προβλήματος ήταν τεράστια. Η επίλυση του Entscheidungsproblem θα κατέληγε στην ανακάλυψη ενός αλγορίθμου για την επίλυση κάθε μαθηματικού προβλήματος. Εάν ένα πρόβλημα όμως δεν μπορεί να επιλυθεί αλγοριθμικά, τότε το Entscheidungsproblem πρέπει να είναι μη επιλύσιμο. Η μηχανή θα έπρεπε να σταματά με μία ταινία κενή εκτός από το τελευταίο κουτάκι, που θα περιέχει τον αριθμό 1, εάν η τιμή εισόδου ανήκει στο D και 0 εάν η τιμή εισόδου δεν ανήκει στο D. Επιπλέον, θα έπρεπε να καταλήγει σε μία κατάσταση F, για την οποία καμία πεντάδα της μηχανής δεν αρχίζει με το γράμμα F. Προσθέτοντας στις πεντάδες της μηχανής τις ακόλουθες δύο πεντάδες: F0: □→F και F□:□→F
αν η τιμή εισόδου ανήκει στο D, η νέα μηχανή θα λειτουργήσει και θα σταματήσει γράφοντας ένα 1 στο τελευταίο κουτάκι. Αν όμως η τιμή εισόδου δεν ανήκει στο D, η μηχανή θα μετακινείται πάνω στην ταινία ατέρμονα (halting problem). Έτσι, το Σ.Ε.Τ. και το D ταυτίζονται, γεγονός που είναι άτοπο λόγω του ορισμού που δόθηκε για το Σ.Ε.Τ και το D μέσα από τη μέθοδο της διαγωνιοποίησης του Cantor. Άρα, δεν υπάρχει αλγόριθμος που να διακρίνει αν ένας φυσικός αριθμός ανήκει στο σύνολο D. Έτσι, το Entscheidungsproblem είναι μη επιλύσιμο (Davis, 2007). Καμία μηχανή χρησιμοποιώντας το σύνολο κανόνων του Frege δεν είναι σε θέση να καταλήξει ασφαλώς από ένα σύνολο υποθέσεων σε ένα συμπέρασμα, διότι είναι αδύνατον να προβλέψουμε εάν θα κινείται ατέρμονα ή θα σταματά (Μιχαηλίδης• Δελλαπόρτας, 2015).

Το πιο εκπληκτικό συμπέρασμα, αν και παράπλευρο, από την επίλυση του Entscheidungsproblem είναι το γεγονός πως ο Turing παρείχε με τη μηχανή του το πρώτο μοντέλο για τον οικουμενικό υπολογιστή. Η μηχανή του στην ουσία συνένωσε τις έννοιες του hardware (μηχανικά μέρη), του προγράμματος (ο κωδικός-οι πεντάδες στην ταινία) και των πρόσθετων δεδομένων (τα ψηφία στην ταινία). Η μηχανή του συνιστά τον πρόδρομο όλων των προγραμμάτων διερμηνέων, αφού αποκωδικοποιεί εντολές κωδικοποιημένες σε διατάξεις συμβόλων (πεντάδες). Αυτές οι πεντάδες μάλιστα έχουν τη θέση αποθηκευμένου προγράμματος, με τη διάκριση μεταξύ προγράμματος και δεδομένων να είναι όπως στον σύγχρονο υπολογιστή εξαιρετικά ρευστή (Davis, 2007). Τέλος, η καθολική μηχανή του Turing κατέδειξε πως το hardware, που περιγράφει τη λειτουργία ενός μηχανισμού και το software μπορούν να υφίστανται με ισοδύναμη μορφή. Αυτή των κωδικοποιημένων πεντάδων πάνω στην ταινία μίας μηχανής.

Επίλογος-Συμπέρασμα

Η εργασία αυτή ακολουθεί τα επιστημονικά επιτεύγματα λαμπρών ανθρώπων σε μία περίοδο που υπερβαίνει τα τριακόσια χρόνια. Αυτό που εμφατικά καταδεικνύεται είναι το γεγονός πως η ανθρώπινη λογική συνιστά τομέα της επιστήμης με ανεξάντλητα όρια. Το όραμα αυτών των ανθρώπων επιβεβαιώνει την αδάμαστη δύναμη που διαθέτει ο ανθρώπινος νους και μεταφέρουν οι ιδέες. Οι ατομικές συνεισφορές του Leibniz, του Frege, του Hilbert, του Gödel και του Turing δόμησαν και ωρίμασαν το πλαίσιο μέσα από το οποίο προέκυψε ο ψηφιακός ηλεκτρονικός υπολογιστής. Ο Leibniz είχε την ιδέα. Ο Calculus Ratiocinator υποσχόταν να περιλάβει το σύνολο της ανθρώπινης επιχειρηματολογίας στους νόμους της μαθηματικής απόδειξης και να αναγάγει μεγάλο μέρος της ανθρώπινης σκέψης και της μαθηματικής επιστήμης σε απλούς υπολογισμούς. Ο Frege είχε την υπομονή να δομήσει ένα λογικό σύστημα, οι κανόνες του οποίου αξιοποιούνται σε προγράμματα υπολογιστών σήμερα για τη διεξαγωγή αποδεικτικών διαδικασιών. Ο Hilbert διακρινόταν από την ακόρεστη επιθυμία του να θέτει ερωτήματα που προήγαγαν την επιστήμη. Ο Gödel ανέτρεψε μία ολόκληρη σχολή σκέψης με τα θεωρήματά του, αποδεικνύοντας τη συνέπεια ή την ασυνέπεια λογικών συστημάτων. Ο Turing αφιέρωσε όλες τις δεξιότητες, που διέθετε στη φαρέτρα του, προκειμένου να απαντήσει στο Entscheidungsproblem. Και όσο κι αν φαντάζει απίθανο, οι πρακτικές εφαρμογές όλων αυτών των ιδεών και των ανακαλύψεων ήταν ο σύγχρονος ηλεκτρονικός υπολογιστής. Η επιστήμη επιβεβαιώνεται πως συνιστά ένα ατέρμονο παιχνίδι ερωτοαπαντήσεων, το οποίο προάγει την ανθρώπινη σκέψη και τον βαθμό κατανόησης του Κόσμου από τον άνθρωπο. Το όραμα της αυτοματοποιήσης των υπολογισμών, η απαίτηση ενός Calculus Ratiocinator το 1679, μετουσιώθηκε στην πρακτική κατασκευή του ψηφιακού υπολογιστή τον $20^{ο}$ αιώνα. Και όλα αυτά χάρη στο πολυτιμότερο δώρο του ανθρώπου, την ανθρώπινη λογική.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω από βάθους καρδιάς τον υπεύθυνο καθηγητή και καθηγητή μαθηματικών μου, τον κύριο Μιχαηλίδη για την άψογη συνεργασία, τη σύλληψη του θέματος της εργασίας, την προθυμία και τη συνεχή καθοδήγηση. Τον ευχαριστώ, γιατί με έκανε να επανεκτιμήσω τον κόσμο των μαθηματικών.

Βιβλιογραφία

Μιχαηλίδης, Τ., Δελλαπόρτας, Π. Ο Alan Turing και η μίμηση του νου. *blod.* <http://www.blod.gr/lectures/Pages/viewlecture.aspx?LectureID=1829>.

Davis, M. (2007). *Οι μηχανές της λογικής*. Αθήνα: Εκκρεμές.

Goldstein, R. (2006). *Αιχμάλωτος των μαθηματικών*. Αθήνα: Τραυλός.

Μία μέθοδος εύρεσης του Μ.Κ.Δ. δ των α, β ∈ N* (α>β) και της μορφής του αx+βy, (δηλ. δ=αx+βy, όπου x, y ∈ Z*).

Τσιλιακός Λευτέρης

Προκαταρκτικές γνώσεις

Η μέθοδος αυτή απαιτεί μία απλή παρουσίαση της ανάπτυξης ενός κλάσματος $\frac{\alpha}{\beta}$, (α, β ∈ **N***) σε συνεχόμενο κλάσμα (συν. κλ.) και την αναφορά σε ένα απλό θεώρημα που σχετίζεται με αυτό. Θα περιοριστούμε σε συγκεκριμένα αριθμητικά παραδείγματα. Έστω ότι αναπτύσσουμε σε (συν. κλ.) το κλάσμα $\frac{156}{66}$. Έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{156}{66}=2+\frac{24}{66}=2+\frac{1}{\frac{66}{24}}=2+\frac{1}{2+\frac{18}{24}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{24}{18}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{6}{18}}}=$$

$$=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{18}{6}}}}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}}=\ldots=\frac{26}{11}=2{,}363636\ldots$$

και η διαδικασία τερματίζεται πάντα για κάθε κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$ με α, β ∈**N*** όταν ο αριθμητής του τελευταίου κλάσματος είναι ο 1 (εδώ το $\frac{1}{3}$). Χάριν συντομίας γράφουμε: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{156}{66}=[2,2,1,3]$. Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{156}{66}=2+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}} \quad (1)$$

- Το 1$^{\text{ο}}$ πηλίκο 2 ($2=\frac{2}{1}<\frac{\alpha}{\beta}$) είναι μία πρώτη προσέγγιση με έλλειψη του $\frac{156}{66}$ ($\frac{156}{66}$=2,363636…)
- Ο αριθμός $2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}>\frac{\alpha}{\beta}$ (τμήμα του 2$^{\text{ου}}$ μέλους της (1)) είναι μία πρώτη προσέγγιση με υπεροχή του $\frac{156}{66}$.
- Ο αριθμός $2+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}=\frac{7}{3}<\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μία δεύτερη προσέγγιση με έλλειψη του $\frac{156}{66}$.
- Τέλος ο αριθμός που εκφράζει το 2$^{\text{ο}}$ μέλος της (1) είναι το ανάγωγο κλάσμα $\frac{26}{11}$ που είναι ισοδύναμο με το $\frac{156}{66}$.

Η διαδικασία αυτή για την εύρεση των πηλίκων 2, 2, 1, 3 τερματίζεται γιατί ταυτίζεται με τον τερματιζόμενο αλγόριθμο του Ευκλείδη για την εύρεση του ΜΚΔ των (156, 66) (καθώς και κάθε άλλου ζεύγους ακέραιων στο **Z***). Πράγματι:

156	=	66	·	**2**	+	24
66	=	24	·	**2**	+	18
24	=	18	·	**1**	+	6
18	=	6	·	**3**	+	0

Γενικότερα έστω ότι ενδεικτικά για 5 πηλίκα έχουμε: $\frac{M}{N}=[\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon]$ τότε: $\frac{M}{N}=\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon}}}}$.

Τα κλάσματα που προσεγγίζουν με έλλειψη ή υπεροχή το $\frac{M}{N}$ είναι κατά σειρά τα εξής: $\frac{\alpha}{1}(=\frac{\kappa_1}{\lambda_1})$, $\alpha+\frac{1}{\beta}$ ή $\frac{\alpha\beta+1}{\beta}(=\frac{\kappa_2}{\lambda_2})$, $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma}}$ ή $\frac{\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma+1}(=\frac{\kappa_3}{\lambda_3})$, $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta}}}$ ή $\frac{\alpha\beta\gamma\delta+\gamma\delta+\alpha\delta+\alpha\beta+1}{\beta\gamma\delta+\delta+\beta}(=\frac{\kappa_4}{\lambda_4})$ και τέλος $\alpha+\cfrac{1}{\beta+\cfrac{1}{\gamma+\cfrac{1}{\delta+\cfrac{1}{\varepsilon}}}}$ ή $\frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon+\gamma\delta\varepsilon+\alpha\delta\varepsilon+\alpha\beta\varepsilon+\alpha\beta\gamma+\gamma+\alpha}{\beta\gamma\delta\varepsilon+\delta\varepsilon+\beta\varepsilon+\beta\gamma+1}$ $(=\frac{\kappa_5}{\lambda_5})=\frac{M}{N}$. Παρατηρούμε ότι για τα κλάσματα αυτά ισχύει ο εξής τρόπος (νόμος) κατασκευής τους: «Αν $\frac{m}{n},\frac{p}{q}$ είναι δύο τυχαία διαδοχικά κλάσματα (πλην των δύο πρώτων), που προσεγγίζουν με έλλειψη ή υπεροχή το κλάσμα $\frac{M}{N}$ και μ το πηλίκο που αντιστοιχεί στο $\frac{p}{q}$, τότε το επόμενο κλάσμα που προσεγγίζει το $\frac{M}{N}$ είναι το $\frac{p\mu+m}{q\mu+n}$ (2). (Διευκρίνιση: Αν πχ $\frac{p}{q}=\frac{\kappa_3}{\lambda_3}$ όπως το ορίσαμε προηγουμένως, τότε το πηλίκο μ που αντιστοιχεί στο $\frac{p}{q}$ είναι το $4^{\text{ο}}$ από την αρχή δηλ. το δ).

Εφαρμογή του νόμου (2)

Είναι $\frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\kappa_2}{\lambda_2}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}$ οπότε δυνάμει του (2) έχουμε $\frac{\kappa_3}{\lambda_3}=\frac{\gamma\kappa_2+\kappa_1}{\gamma\lambda_2+\lambda_1}=\frac{\gamma(\alpha\beta+1)}{\gamma\beta+1}$ που ισχύει.
$\frac{\kappa_4}{\lambda_4}=\frac{\delta\kappa_3+\kappa_2}{\delta\lambda_3+\lambda_2}=\frac{\delta[\gamma(\alpha\beta+1)+\alpha]+\alpha\beta+1}{\delta(\gamma\beta+1)+\beta}$ που ισχύει. Τελείως ανάλογα και για το $\frac{\kappa_5}{\lambda_5}$, που μετά τις πράξεις διαπιστώνουμε ότι το αποτέλεσμα είναι το αναμενόμενο.
Ο νόμος (2) αποδεικνύεται άμεσα ότι ισχύει σε οποιαδήποτε τέτοια **πεπερασμένη** διαδικασία (πεπερασμένα βήματα) και μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον επόμενο πίνακα για να βρούμε εύκολα και σύντομα τα κλάσματα που ολοένα προσεγγίζουν το $\frac{M}{N}$.

Πίνακας ανάπτυξης σε συνεχόμενο κλάσμα ενός ρητού $\frac{M}{N}$ και εύρεση, βάσει του νόμου (2), των κλασμάτων $\frac{\kappa_i}{\lambda_i}$ που προσεγγίζουμε με έλλειψη ή υπεροχή το $\frac{M}{N}$.

$$\frac{M}{N}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \alpha & \beta\alpha+1 & \gamma(\beta\alpha+1)+\alpha \\ 1 & \alpha\cdot 1+0 & \beta\cdot\alpha+1 & \gamma(\beta\alpha+1)+\alpha & \delta[\gamma(\beta\alpha+1)+\alpha]+\beta\alpha+1 \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta, & \varepsilon \\ 0 & \alpha\cdot 0+1 & \beta & \gamma\beta+1 & \delta(\gamma\beta+1)+\beta \\ 1 & 0 & 1 & \beta & \gamma\beta+1 \end{bmatrix}$$

ε[δ[γ(βα+1)+α]+βα+1]+γ(βα+1)+

Γραμμή πηλίκων

ε[δ(γβ+1)+β]+γβ+1

$\frac{\kappa^*}{\lambda^*}=\frac{1}{0}$, $\frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{\alpha}{1}$, $\frac{\kappa_2}{\lambda_2}=\frac{\beta\alpha+1}{\beta}$, $\frac{\kappa_3}{\lambda_3}=\frac{\gamma(\beta\alpha+1)+\alpha}{\gamma\beta+1}$,
$\frac{\kappa_4}{\lambda_4}=\frac{\delta[\gamma(\beta\alpha+1)+\alpha]+\beta\alpha+1}{\delta(\gamma\beta+1)+\beta}$ και $\frac{\kappa_5}{\lambda_5}=\frac{\varepsilon[\delta[\gamma(\beta\alpha+1)+\alpha]+\beta\alpha+1]+\gamma(\beta\alpha+1)+\alpha}{\varepsilon[\delta(\gamma\beta+1)+\beta]+\gamma\beta+1}=\frac{M}{N}$.

Αριθμητικό παράδειγμα

Να αναπτυχθεί σε (συν. κλ.) το κλάσμα $\frac{M}{N}=\frac{3668}{952}$.

Λύση

$$\frac{M}{N}=\frac{3\,6\,6\,8}{9\,5\,2}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 23 \\ 1 & 3 & 4 & 23 & 27 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

131=p και p_0=27

Γραμμή πηλίκων

34=q και q_0=7

Έτσι: $\frac{\kappa^*}{\lambda^*}=\frac{1}{0}$, $\frac{\kappa_1}{\lambda_1}=\frac{3}{1}$, $\frac{\kappa_2}{\lambda_2}=\frac{4}{1}$, $\frac{\kappa_3}{\lambda_3}=\frac{23}{6}$, $\frac{\kappa_4}{\lambda_4}=\frac{p_0}{q_0}=\frac{27}{7}$ και $\frac{\kappa_5}{\lambda_5}=\frac{p}{q}=\frac{131}{34}=\frac{3668}{952}$.

Θεώρημα

Αν $\frac{p}{q}$, $\frac{p_1}{q_1}$ είναι δύο τυχαία διαδοχικά κλάσματα που προσεγγίζουν το κλάσμα $\frac{M}{N}$, το οποίο έχει αναπτυχθεί σε (συν. κλ.), τότε ισχύει: $\begin{vmatrix} p & p_1 \\ q & q_1 \end{vmatrix}=\pm 1$ με τον +1 αν $\frac{p}{q}$ ανήκει σε στήλη περιττής τάξης και τον –1 αν το $\frac{p}{q}$ ανήκει σε στήλη άρτιας τάξης.

Απόδειξη

Έστω $\frac{M}{N}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & & & & & \\ 1 & \alpha & p' & \dots & p_0, & p, & p_1, & \dots \\ \alpha, & \mu_1, & \dots, & & & \mu & & \\ 0 & 1 & q' & \dots & q_0, & q, & q_1, & \dots \\ 1 & 0 & \dots & & & & & \end{bmatrix}$

Γραμμή πηλίκων

όπου $\frac{p_0}{q_0}$ είναι το κλάσμα που προσεγγίζει το $\frac{M}{N}$ και προηγείται του $\frac{p}{q}$. Από τον νόμο κατασκευής (2) έχουμε: $\left.\begin{matrix} p_1=\mu p+p_0 \\ q_1=\mu q+q_0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{vmatrix} p & p_1 \\ q & q_1 \end{vmatrix}=pq_1-p_1q=p(\mu q+q_0)-(\mu p+p_0)q=p\mu q+pq_0-\mu pq-p_0q=-\begin{vmatrix} p_0 & p \\ q_0 & q \end{vmatrix}$

που σημαίνει ότι δύο διαδοχικές ορίζουσες, που ορίζονται από τους όρους αυτών των κλασμάτων, είναι αντίθετες.

Έτσι πηγαίνοντας προς τα πίσω, συνάγεται ότι η δεύτερη ορίζουσα $\begin{vmatrix} \alpha & p' \\ 1 & q' \end{vmatrix}$ είναι ίση με την αντίθετη τιμή της 1ης ορίζουσας, δηλ. με $-\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=-1$. Άρα:

1η ορίζουσα = 1
2η ορίζουσα = –1
3η ορίζουσα = 1 κτλ

Συμβολίζουμε με $\frac{p}{q}$ το τελευταίο κλάσμα της ανάπτυξης του $\frac{M}{N}$ σε (συν. κλ.) (εδώ το $\frac{131}{34}$) και με $\frac{p_0}{q_0}$ το αμέσως προηγούμενο (εδώ το $\frac{27}{7}$) (Κοίτα το αριθμητικό παράδειγμα ανάπτυξης του $\frac{3668}{952}$ σε (συν. κλ.)).

Πρόταση

«Αν (α,β)=δ≥1, δ∈**N***, α,β ∈ **N*** με α>β, τότε οι ακέραιοι x,y για τους οποίους ισχύει αx+βy=δ είναι οι εξής: x=–q_o, y=p_0 αν οι p_0, q_0 ανήκουν σε στήλη περιττής τάξης και x=q_o, y=–p_0 αν οι p_0, q_0 ανήκουν σε στήλη άρτιας τάξης του πίνακα που προκύπτει από την ανάπτυξη του $\frac{\alpha}{\beta}$ σε (συν. κλ.)

Απόδειξη: Από το θεώρημα που αναφέραμε ισχύει $pq_0+q(-p_0)=1$ (2) ή $p(-q_0)+qp_0=1$ (3)

και επειδή 1/p, 1/q $\Rightarrow 1=(p,q)$. Είναι: $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{p}{q}$ και $\frac{p}{q}$ ανάγωγο. Άρα $\frac{\alpha}{p}=\frac{\beta}{q}=\delta=(\alpha,\beta)\Rightarrow\alpha=p\delta,\beta=q\delta$ (4)

$(2)\Leftrightarrow pq_0\delta+q(-p_0)\delta=\delta\overset{(4)}{\Leftrightarrow}\alpha q_0+\beta(-p_0)=\delta$ (5)

και τελείως ανάλογα από την (3) $\alpha(-q_0)+\beta p_0=\delta$ (6)

Οι ισότητες (5) και (6) ολοκληρώνουν την απόδειξη.

Παράδειγμα 1ο

Με χρήση του πίνακα της ανάπτυξης του $\frac{156}{66}$ να βρεθεί ο δ=(156,66) καθώς και οι x,y∈Z* έτσι ώστε: δ=156x+66y.

Λύση

$$\frac{156}{66}=\begin{bmatrix}0&1&2&5\\1&2&5&7\\2&2&1&3\\0&1&2&3\\1&0&1&2\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\26=p\\\text{Γραμμή πηλίκων}\\11=q\\\\\end{array}$$

Οι p_0, q_0 ανήκουν στην 4η στήλη (p_0=7, q_0=3, άρτια στήλη), άρα σύμφωνα με την πρόταση έχουμε:

$\delta=(156,66)=156\cdot q_0+66\cdot(-p_0)=156\cdot3+66\cdot(-7)=6$ δηλ. x=3 και y=–7.

Παράδειγμα 2ο

Με χρήση του πίνακα ανάπτυξης του $\frac{3668}{952}$ να βρεθεί ο δ=(3668,952) καθώς και οι x,y∈Z* έτσι ώστε: δ=3668x+952y.

Λύση: Ένας απλός και σύντομος τρόπος εμφάνισης της κεντρικής γραμμής των πηλίκων του πίνακα ανάπτυξης σε (συν. κλ.) του $\frac{3668}{952}$ είναι ο εξής: $\frac{3668}{952}$=3+0,852941176…

$$\frac{1}{0{,}852941176...}=1+0{,}172413793...$$

$$\frac{1}{0{,}172413793...}=5+0{,}8$$

$$\frac{1}{0{,}8}=1+0{,}25$$

$$\frac{1}{0{,}25}=4 \text{ ΤΕΛΟΣ}$$

$$\text{Άρα: }\frac{3668}{952}=\begin{bmatrix}0&1&3&4&23\\1&3&4&23&27\\3&1&5&1&4\\0&1&1&6&7\\1&0&1&1&6\end{bmatrix}\begin{array}{l}\\131=p\text{ και }p_0=27\\\text{Γραμμή πηλίκου}\quad\text{ηλίκου}\\34=q\text{ και }q_0=7\\\\\end{array}$$

Οι p_0, q_0 βρίσκονται στην 5η στήλη (περιττή στήλη). Άρα σύμφωνα με την πρόταση έχουμε:

$\delta=3668\cdot(-q_0)+952\cdot p_0=3668\cdot(-7)+952\cdot27=28\Rightarrow x=-7, y=27$

(Σημειωτέον ότι πρώτα βρίσκονται οι x,y και μετά ο δ).

Θεωρητική Σημείωση: Αν δ ο ΜΚΔ και ε το Ε.ΚΠ. των φυσικών αριθμών α,β, τότε από τη γνωστή εξίσωση $\alpha\cdot\beta=\delta\cdot\varepsilon$ και την θεωρία που αναπτύξαμε, βρίσκουμε άμεσα τον ε.

Τρίγωνα, τετράγωνα και πρώτοι αριθμοί.

Μαρίνος Σπηλιόπουλος-Ερευνητής

Ξεκινάμε με το σύνολο των περιττών πρώτων αριθμών ($P \geq 3$): 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, … κ.λπ. Το 2 που είναι πρώτος και ο μοναδικός άρτιος πρώτος, δεν τον βάζουμε στην συγκεκριμένη εργασία και θα εξηγήσουμε πιο κάτω γιατί. Είναι γνωστή από την Ευκλείδεια Γεωμετρία η τριγωνική ανισότητα, με την οποία τρεις αριθμοί αν εκφράζουν ευθύγραμμα τμήματα, μπορούν να αποτελούν πλευρές τριγώνου και φυσικά αν θέλουμε, να μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα τέτοιο τρίγωνο. Πιο γενικά ισχύει ότι: Στα τρίγωνα, κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων πλευρών και μεγαλύτερη από την διαφορά τους. Στην συνέχεια μπορούμε να σκεφτούμε τα εξής: Αν χωρίσουμε τους πρώτους αριθμούς σε τριάδες διαδοχικών πρώτων π.χ. (2, 3, 5), (3, 5, 7), (5, 7, 11), … κ.λπ άραγε αποτελούν πλευρές σκαληνών τριγώνων; Σκαληνό τρίγωνο θυμίζουμε, λέγεται το τρίγωνο του οποίου όλες οι πλευρές είναι άνισες. Το 2, 3, 5 δεν σχηματίζει, γιατί όπως εύκολα μπορεί να επιβεβαιώσει κάποιος, δεν υπακούει στην τριγωνική ανισότητα. Γι’ αυτό το 2 το απορρίψαμε και κρατούμε το σύνολο των περιττών πρώτων αριθμών. Εκεί έχει αποδειχθεί ότι κάθε τριάδα διαδοχικών περιττών πρώτων, εκφραζόμενες σε ευθύγραμμα τμήματα, μπορούν να αποτελούν πλευρές σκαληνών τριγώνων. Με την βοήθεια Η/Υ μέχρι 1.000.000 διαδοχικούς πρώτους επαληθεύτηκε αυτό, αν και δεν χρειαζόταν αυτή η «ταλαιπωρία», αφού έχει αποδειχθεί η σχέση $P_{n+1} < 1,6P_n$ από $P_n > 7$ που εξασφαλίζει την ορθότητα του ζητήματος μέσω της τριγωνικής σχέσης. Είναι γνωστή η εξίσωση του Ήρωνα (σπουδαίου μαθηματικού και μηχανικού της αρχαιότητας) που δίνει το εμβαδόν ενός τριγώνου από τα μήκη των πλευρών του. Αυτός είναι:
$E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ όπου α, β, γ οι πλευρές του τριγώνου και τ η ημιπερίμετρός του.

Εμείς φυσικά, μπορούμε να συμβολίσουμε με P_1, P_2, P_3 τις πλευρές των σκαληνών τριγώνων, που προκύπτουν από τους τρεις διαδοχικούς περιττούς πρώτους. Αν μας ενδιαφέρει, με βάση το νόμο των συνημιτόνων, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις γωνίες ή άλλα γεωμετρικά στοιχεία ενός τέτοιου τριγώνου. Στη συνέχεια το εμβαδόν αυτό το εξισώνουμε με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς α την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε αν γνωρίζουμε τους τρεις διαδοχικούς περιττούς πρώτους. Παραδείγματα: 3, 5, 7 Ε = 6,49519…και α = 2,54856…

Για το 5, 7, 11 Ε = 12,96871… και α = 3,6012… κ.λπ. Από πολλά παραδείγματα φαίνεται ότι $\alpha < P_1$, αλλά αυτό θα το δούμε καλύτερα πιο κάτω. Εξισώνοντας τον τύπο του Ήρωνα για το εμβαδόν του τριγώνου, με το εμβαδόν τετραγώνου με πλευρά α, εύκολα καταλήγουμε (δεν κάνουμε τις πράξεις που είναι πολλές, αλλά όχι δύσκολες), στην εξής σχέση:

$$P_3^4 - 2\left(P_1^2 + P_2^2\right) P_3^2 + \left(P_2^2 - P_1^2\right)^2 + 16\alpha^4 = 0 \quad (1)$$

Λύνοντας την διτετράγωνη εξίσωση (1) καταλήγουμε στην

$$P_3 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 \pm 2\sqrt{P_1^2 P_2^2 - 4\alpha^4}} \qquad (2)$$

Από την τριπλέτα 7, 11, 13 και στην συνέχεια, ισχύει το πλην στην σχέση (2) για τον υπολογισμό του P_3, όταν είναι γνωστά το P_1, P_2 και α.

Από την (2) πρέπει να ισχύει $P_1^2 P_2^2 - 4\alpha^4 > 0$ που σημαίνει

$$\alpha < \frac{P_1 P_2}{2} \qquad (3)$$

Παραδείγματα: στην περίπτωση 3, 5, 7 $\alpha < \sqrt{\frac{3\cdot 5}{2}}$ $\alpha < 2,73\ldots$ με $\alpha = 2,54856\ldots$

Στην περίπτωση 23, 29, 31 $\alpha < 18,26198\ldots$ με $\alpha = 17,8168\ldots$ κ.λπ.

Επειδή $\alpha < P_1$ έχουμε $\frac{P_1 P_2}{2} < P_1$ που δίνει $P_2 < 2P_1$ (θεώρημα του Τσέμπισεφ). Επομένως το P_3 μπορεί να προσδιοριστεί μέσω ενός «πλαισίου», που αρχίζει με $P_3 = P_2 + 2$ (όταν P_3 και P_2 είναι δίδυμοι πρώτοι) και φτάνει έως: .

$$P_3 = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}\ .\ \text{όταν } \alpha = \sqrt{\frac{P_1 P_2}{2}} \text{ και } P_1 \geq 7.$$

Βέβαια αν αυτό το πλαίσιο θέλουμε να το εκφράσουμε μόνο με το α, υπάρχει αντίστοιχο α από την εξίσωση (1) για $P_3=P_2+2$.

Η αξία των πιο πάνω, ίσως για κάποιους είναι περισσότερο θεωρητική (σαν μια άσκηση αριθμητικής ή γεωμετρίας) και λιγότερο πρακτική ή καθόλου τέτοια. Επειδή δεν μπορεί να βρεθεί μαθηματικός τύπος που να δίνει τον επόμενο πρώτο αριθμό, έχουν βρεθεί διάφορα «πλαίσια», ενώ συνεχώς ανακαλύπτονται νέα. Φτιάχνονται με διάφορα κριτήρια και διαδικασίες. Ένα πρόσφατο είναι: για $\eta \geq 25$ ο επόμενος πρώτος βρίσκεται στο διάστημα (πλαίσιο) $\left[\eta, \frac{6}{5}\eta\right]$ κ.λπ.

Σε κάθε πλαίσιο πάντως, με τη βοήθεια Η/Υ ή χωρίς (για μικρές περιπτώσεις), γίνονται δύο «κοσκινίσματα», αφαιρούνται αφ' ενός οι άρτιοι αριθμοί και αφ' ετέρου οι περιττοί που λήγουν σε 5, γιατί δεν μπορεί να είναι πρώτοι και οι περιττοί που μένουν είναι οι υποψήφιοι για τον επόμενο πρώτο, αφού ελεγχθούν. Σε ένα πλαίσιο μπορεί να βρίσκονται και άλλοι πρώτοι, επόμενοι του επόμενου πρώτου. Θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί αν ο αριθμός τους, ακολουθεί κάποια πιθανή κατανομή στα διάφορα πλαίσια κ.λπ. Η συγκεκριμένη εργασία παρέχει ένα πλαίσιο για πρώτους χωρίς να σημαίνει ότι είναι καλύτερο ή χειρότερο από άλλα.

Ως προς την υπολογιστική του ικανότητα υπερτερεί άλλων π.χ. Τσέμπισεφ ή τον $P_3 < 1{,}6P_2$ κ.λπ όπως εύκολα μπορεί να διαπιστώσει κάποιος, ενώ μπορεί να υστερεί από άλλα. Όμως δεν μπορεί να αρνηθεί κάποιος ότι έχει τα δικά του γοητευτικά χαρακτηριστικά. Προήλθε από συγκεκριμένη «γεωμετρική διαδικασία» η οποία δεν αποκλείεται να μπορεί να βελτιωθεί ακόμα περισσότερο, είτε από πιο καλύτερη διαχείριση των εξισώσεων, είτε με το να μπουν στην διαδικασία και εμβαδά άλλων σχημάτων π.χ. ισόπλευρο τρίγωνο, κύκλος[1] κ.λπ.

Τέλος έχει την ιδιαιτερότητα να εξαρτάται κάποιος άγνωστος πρώτος, από τους δύο προηγούμενούς του γνωστούς πρώτους και όχι από τον προηγούμενό του, όπως σε άλλα πλαίσια. Εδώ το πλεονέκτημα ή το μειονέκτημα είναι σχετικό.

[1] Θεωρούμε το σκαληνό τρίγωνο με πλευρές P_1, P_2, P_3 (διαδοχικοί πρώτοι αριθμοί με $P_1 \geq 7$) εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Φέρνουμε τις ακτίνες στις κορυφές του τριγώνου και σχηματίζονται τρία μικρότερα τρίγωνα. Από την ανισωτική σχέση των εμβαδών των τριγώνων με πλευρές (R, R, P_3) και (R, R, P_2) προκύπτει μια εξαβάθμια ανίσωση. Θέτοντας $P_3^2 = X$ παίρνουμε μια τριτοβάθμια ανίσωση $X^3 - \left(2P_1^2 + P_2^2\right) X^2 - \left(P_2^4 - P_1^4\right)X + P_2^2\left(P_2^2 - P_1^2\right)^2 < 0$. Λύνοντάς την, θα προκύψει ένα ανώτερο φράγμα για το P_3, αν είναι γνωστά το P_1 και το P_2. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε αν είναι και καλύτερο πλαίσιο από αυτό που βρήκαμε προηγουμένως στην εργασία ή και από άλλα πλαίσια.

35η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"

3 Μαρτίου 2018

Θέματα μεγάλων τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε την ακολουθία $(x_n), n \in \mathbb{N}^*$, που ορίζεται αναδρομικά από τη σχέση $x_{n+1} = 3x_n^3 + x_n$, με $x_1 = \frac{a}{b}$, όπου a, b είναι θετικοί ακέραιοι και ο 3 δεν διαιρεί τον ακέραιο b. Αν για κάποιο θετικό ακέραιο m ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού, να αποδείξετε ότι και ο x_1 είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

Λύση

Θα δείξουμε ότι αν ο x_{n+1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, τότε και ο x_n είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε επαγωγικά θα πάρουμε το ζητούμενο.

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αφού ο 3 δεν διαιρεί τον b, δεν θα διαιρεί κανέναν παρονομαστή όρου της ακολουθίας.

Από την αναδρομική σχέση έχουμε $x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1}$. Θέτουμε $x_{m-1} = \frac{p}{q}$ όπου ο q δεν διαιρείται με 3 (*) και $(p,q)=1$. Τότε $x_m = 3x_{m-1}^3 + x_{m-1} = \frac{3p^3 + pq^2}{q^3} = \frac{p(3p^2+q^2)}{q^3}$.

Αφού $(p,q)=1$, αυτή είναι η ανάγωγη μορφή του x_m. Πράγματι, οι αριθμοί $p(3p^2+q^2)$, q^3 είναι πρώτοι μεταξύ τους, αφού αν ένας πρώτος s διαιρεί και τους δύο, τότε $s \mid q^3 \Rightarrow s \mid q$ και $s \mid 3p^2+q^2$ τότε $s \mid 3p^2$. Αφού όμως s δεν διαιρεί τον p , θα έχουμε $s \mid 3 \Rightarrow s=3$, $3 \mid q$, άτοπο από την (*).

Από την εκφώνηση ο x_m είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, οπότε θα πρέπει ο αριθμητής και ο παρονομαστής να είναι τέλεια τετράγωνα.

Για να είναι ο παρονομαστής τέλειο τετράγωνο, πρέπει ο q να είναι τέλειο τετράγωνο, έστω $q = a^2$.

Για να είναι ο αριθμητής τέλειο τετράγωνο, έστω $p(3p^2+q^2) = \kappa^2$, πρέπει και οι δύο παράγοντες να είναι τέλεια τετράγωνα αφού είναι σχετικά πρώτοι. Πράγματι, αν ένας πρώτος t διαιρεί τον p και τον $3p^2+q^2$, τότε $t \mid q$, που είναι άτοπο αφού $(p,q)=1$.

Έτσι $p=b^2$, $2p^2+q^2=c^2$. Επομένως $x_{m-1} = \frac{p}{q} = \frac{b^2}{a^2}$, άρα ο x_{m-1} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού.

Όμοια τώρα, πηγαίνοντας προς τα πίσω δείχνουμε ότι ο x_{m-2} είναι τέλειο τετράγωνο ρητού, κ.ο.κ μέχρι να φτάσουμε στον x_1.

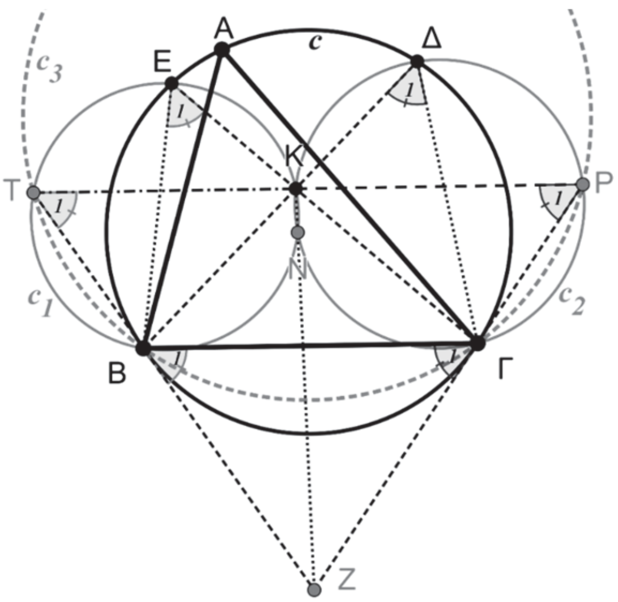
Πρόβλημα 2

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του c με κέντρο Ο και ακτίνα R. Στα μικρά τόξα ΑΓ και ΑΒ θεωρούμε τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Έστω Κ είναι το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και Ν είναι το δεύτερο κοινό σημείο των περιγεγραμμένων

κύκλων των τριγώνων ΒΚΕ, έστω c_1, και ΓΚΔ (έστω c_2). Να αποδείξετε ότι: τα σημεία Α,Κ,Ν είναι συνευθειακά, αν και μόνο αν, το σημείο Κ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο του τριγώνου ΑΒΓ, που αντιστοιχεί στην κορυφή Α.

Σημείωση: *Συμμετροδιάμεσος τριγώνου είναι η συμμετρική ευθεία της διαμέσου ως προς τη διχοτόμο που περνάει από την ίδια κορυφή με τη διάμεσο*

Λύση



Σχήμα 1

1ος Τρόπος

Έστω Κ το σημείο τομής των ΒΔ, ΓΕ και Ν το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Ζ το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B,Γ του κύκλου c. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{K},\mathrm{N},\mathrm{Z}$ είναι συνευθειακά.

Σημειώνουμε με Τ τη τομή της ΒΖ με τον c_1 και Ρ τη τομή της ΖΓ με τον c_2, τότε θα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{T}}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_1 και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΚ)

$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_1$: (η $\hat{\mathrm{B}}_1$ δημιουργείτε από τη χορδή ΒΓ και την εφαπτομένη BZ στο κύκλο c)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\mathrm{P}}_1$: (εγγεγραμμένες στο κύκλο c_2 και βαίνουν στο ίδιο τόξο ΓΚ)

$\hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma}_1$: (η $\hat{\Gamma}_1$ είναι γωνία της χορδής ΒΓ και την εφαπτομένης ΓΖ στο κύκλο c)

$\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\Gamma}_1$: (οι ΖΒ και ΖΓ είναι εφαπτόμενες στο κύκλο c)

Από τις παραπάνω ισότητες προκύπτουν τα εξής: $\hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{T}}_1$, άρα $\mathrm{KT}//\mathrm{B\Gamma}$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\mathrm{P}}_1$, άρα $\mathrm{KP}//\mathrm{B\Gamma}$. Επομένως το τετράπλευρο ΒΓΡΤ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια εγγράψιμο σε κύκλο (έστω c_3). Άρα η κοινή χορδή ΚΝ των κύκλων c_1 και c_2 θα διέρχεται από το ριζικό κέντρο Ζ των κύκλων c_1, c_2, c_3.

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{K},\mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, τότε (επειδή και τα σημεία $\mathrm{K},\mathrm{N},\mathrm{T}$ είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{K},\mathrm{N},\mathrm{T}$ είναι συνευθειακά , δηλαδή τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{K},\mathrm{N}$ θα ανήκουν στη συμμετροδιάμεσο ΑΤ .

Αντίστροφα τώρα, αν υποθέσουμε ότι το σημείο Κ ανήκει στη συμμετροδιάμεσο ΑΤ , τότε τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{K},\mathrm{T}$ θα είναι συνευθειακά. Οπότε (επειδή και τα σημεία $\mathrm{K},\mathrm{N},\mathrm{T}$ είναι συνευθειακά) συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A},\mathrm{K},\mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

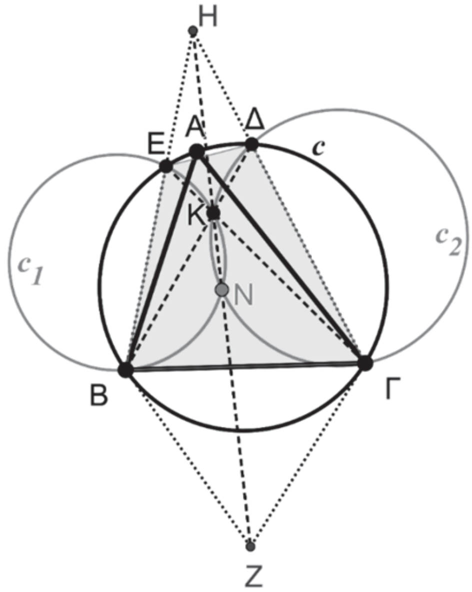
2ος Τρόπος

Έστω K το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\Gamma\mathrm{E}$ και N το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων c_1, c_2. Έστω ακόμη Z το σημείο τομής των εφαπτομένων στα σημεία B, Γ του κύκλου c. Αν H είναι το σημείο τομής των EB και $\Delta\Gamma$, θα αποδείξουμε ότι τα σημεία $\mathrm{K}, \mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.

Από την εφαρμογή του θεωρήματος Pascal στο εκφυλισμένο εξάγωνο $\mathrm{BB}\Gamma\Gamma\Delta\mathrm{E}$, συμπεραίνουμε ότι τα σημεία $\mathrm{H}, \mathrm{K}, \mathrm{Z}$ είναι συνευθειακά.

Το σημείο H έχει την ίδια δύναμη ως προς το κύκλο c. Δηλ. $\mathrm{HE} \cdot \mathrm{HB} = \mathrm{H}\Delta \cdot \mathrm{H}\Gamma$.

Άρα τα σημεία $\mathrm{K}, \mathrm{N}, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά. Οπότε τα σημεία $\mathrm{K}, \mathrm{N}, \mathrm{Z}, \mathrm{H}$ είναι συνευθειακά.



Σχήμα 2

Αν τώρα υποθέσουμε ότι τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά, το σημείο K θα ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ.

Αντίστροφα, αν το K ανήκει στην συμμετροδιάμεσο AZ τότε τα σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{K}, \mathrm{N}$ είναι συνευθειακά.

Πρόβλημα 3

(α) Δίνονται οι φυσικοί αριθμοί *n, m* με n<m και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$. Να βρεθούν όλα τα πολυώνυμα P με πραγματικούς συντελεστές, βαθμού το πολύ n, για τα οποία ισχύει η ισότητα $\left|P(a_i) - P(a_j)\right| = \left|a_i - a_j\right|$, (1)

για κάθε i,j με $1 \leq \mathrm{I} \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{m}$.

(β) Δίνονται φυσικοί αριθμοί $m, n \geq 2$ με $n < m$. Να εξετάσετε αν υπάρχει πολυώνυμο Q με πραγματικούς συντελεστές βαθμού n καθώς και διακεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί $a_1, \ldots, a_m$, τέτοιοι ώστε $|Q(a_i) - Q(a_j)| < |a_i - a_j|$, για κάθε i, j με $1 \leq \mathrm{I} < \mathrm{j} \leq \mathrm{m}$.

Λύση

(α) Θα ασχοληθούμε πρώτα με το ερώτημα (α). Λόγω της συμμετρίας υποθέτουμε ότι $a_1 > a_2 > \ldots > a_m$ και για ευκολία θέτουμε $d_i = P(a_i) - P(a_{i+1})$. Τότε λόγω της (1) έχουμε:

$$|d_1| + |d_2| + \ldots + |d_{m-1}| = |P(a_1) - P(a_2)| + |P(a_2) - P(a_3)| + \ldots + |P(a_{m-1}) - P(a_m)|$$

$$= |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{m-1} - a_m| = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + \ldots + a_{m-1} - a_m = a_1 - a_m$$

$$= |a_1 - a_m| = |P(a_1) - P(a_m)| = |P(a_1) - P(a_2) + P(a_2) - P(a_3) + \ldots + P(a_{m-1}) - P(a_m)|$$

$$= |d_1 + d_2 + \ldots + d_{m-1}|$$

Αυτό σημαίνει ότι οι αριθμοί $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι ομόσημοι. Οπότε έχουμε δύο περιπτώσεις.

1η περίπτωση: Όλοι οι $d_1, d_2, \ldots, d_{m-1}$ είναι θετικοί. Είναι Τότε από την (1) έχουμε ότι

$P(a_1)-P(a_2)=a_1-a_2 \Rightarrow P(a_1)-a_1=P(a_2)-a_2$.Όμοια $P(a_2)-a_2=P(a_3)-a_3$,….,

$P(a_{m-1})-a_{m-1}=P(a_m)-a_m$. Έπεται ότι $P(a_1)-a_1=P(a_2)-a_2=\ldots=P(a_m)-a_m=k$ (2)

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $Q(x)=P(x)-x-k$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m>n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1>a_2>\ldots>a_m$). Έπεται ότι το $Q(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x)=x+k$, όπου $k\in\mathbb{R}$.

2η περίπτωση: Όλοι οι $d_1,d_2,\ldots,d_{m-1}$ είναι αρνητικοί. Τότε από την (1) έχουμε ότι

$-P(a_1)+P(a_2)=a_1-a_2 \Rightarrow P(a_1)+a_1=P(a_2)+a_2$.

Επομένως $P(a_1)+a_1=P(a_2)+a_2=\ldots=P(a_m)+a_m=\lambda$ (3)

Αυτό σημαίνει ότι το πολυώνυμο $R(x)=P(x)+x-\lambda$ που είναι βαθμού το πολύ n, έχει $m>n$ διακεκριμένες ρίζες (τα $a_1>a_2>\ldots>a_m$). Έπεται ότι το $R(x)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, οπότε $P(x)=-x+\lambda$, όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Επομένως δύο πολυώνυμα, το $P(x)=x+k$ και το $P(x)=-x+\lambda$ είναι τα μόνα που ικανοποιούν τις συνθήκες του προβλήματος.

2ος τρόπος: Ας υποθέσουμε ότι $m\ge 3$ και ότι υπάρχουν $p,q,r\in\{a_1,\ldots,a_m\}$ ώστε να ισχύει:

$$P(p)-P(q)=p-q,\ P(p)-P(r)=r-p\ .$$

Με αφαίρεση κατά μέλη των παραπάνω παίρνουμε ότι

$$P(r)-P(q)=2p-q-r\ . (4)$$

Όμως από την συνθήκη της εκφώνησης έχουμε ότι $P(r)-P(q)=r-q$ ή $P(r)-P(q)=q-r$. Στην πρώτη περίπτωση η (4) γίνεται $2r=2p\Rightarrow r=p$, άτοπο αφού οι $p,r\in\{a_1,\ldots,a_m\}$ που είναι διακεκριμένοι. Όμοια, αν $P(r)-P(q)=q-r$ τότε η (4) δίνει $q=p$, πάλι άτοπο.

Αυτό σημαίνει ότι είτε $m<3$, είτε ότι δεν υπάρχουν τέτοιοι $p,q,r\in\{a_1,\ldots,a_m\}$.

1η περίπτωση: Αν $m<3$, τότε $n=1$ ή $n=0$. Προφανώς η $n=0$ απορρίπτεται αφού κανένα σταθερό πολυώνυμο δεν ικανοποιεί. Η $n=1$ δίνει $P(x)=ax+b$, οπότε πρέπει

$$|a\cdot a_i+b-a\cdot a_j-b|=|a_i-a_j|\Leftrightarrow|a|=1 \text{ οπότε } P(x)=x+b, \text{ ή } P(x)=-x+b\ .$$

2η περίπτωση: Αν δεν υπάρχουν τέτοιοι $p,q,r\in\{a_1,\ldots,a_m\}$, τότε είτε $P(a_1)-a_1=P(a_2)-a_2=\ldots=P(a_m)-a_m=k$, οπότε οδηγούμαστε στην 1η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο, είτε $P(a_1)+a_1=P(a_2)+a_2=\ldots=P(a_m)+a_m=\lambda$, οπότε οδηγούμαστε στην 2η περίπτωση που είδαμε στον 1ο τρόπο.

(β) Θα δείξουμε ότι αν $Q(x)=x^n$ και $|a_i|<\dfrac{1}{n}$ για κάθε $1\le i\le m$ τότε ισχύει η ζητούμενη ανισότητα.

Πράγματι, $|Q(a_i)-Q(a_j)|=|a_i^n-a_j^n|=|a_i-a_j|\cdot|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|$(1)

και $|a_i^{n-1}+a_i^{n-2}a_j+\ldots+a_j^{n-1}|\le|a_i^{n-1}|+|a_i^{n-2}a_j|+\ldots+|a_j^{n-1}|<\dfrac{1}{n^{n-1}}+\dfrac{1}{n^{n-1}}+\ldots+\dfrac{1}{n^{n-1}}=\dfrac{n}{n^{n-1}}<1$ οπότε από την (1) έχουμε $|P(a_i)-P(a_j)|<|a_i-a_j|$.

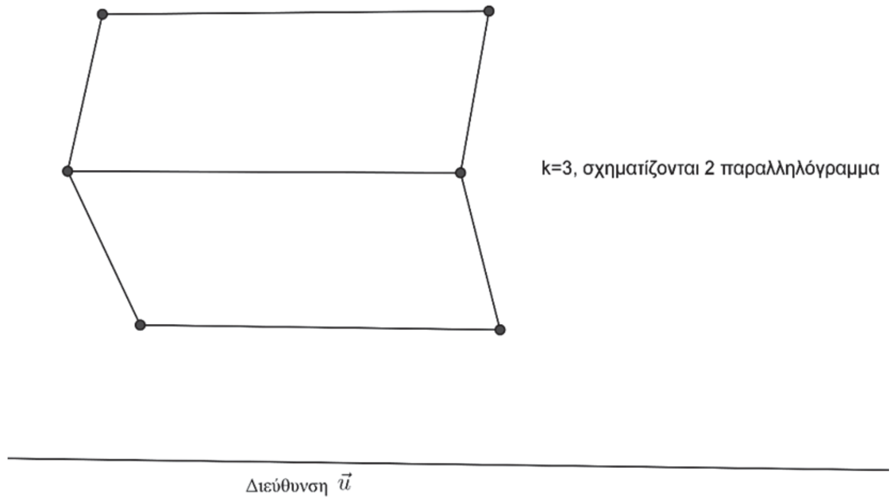
Σημείωση: Στο δεύτερο ερώτημα υπάρχουν και άλλες πιθανές κατασκευές που μπορεί να γίνουν.

Πρόβλημα 4.

Θεωρούμε n σημεία στο επίπεδο, $n\ge 4$, ανά τρία μη συνευθειακά. Ονομάζουμε $\mathrm{A}(n)$ το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 που σχηματίζονται με κορυφές αυτά τα σημεία. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{A}(n)\le\dfrac{n^2-3n}{4}$, για κάθε $n\ge 4$.

Λύση

Σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vec{u}$ στο επίπεδο. Σε κάθε ευθεία παράλληλη σε αυτή τη διεύθυνση μπορεί να έχουμε το πολύ δύο σημεία. Ας υποθέσουμε ότι σε ότι υπάρχουν k ζεύγη σημείων για αυτή τη διεύθυνση. Τότε όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $k=3$), σχηματίζονται το πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 με αυτά τα k ζεύγη σημείων.

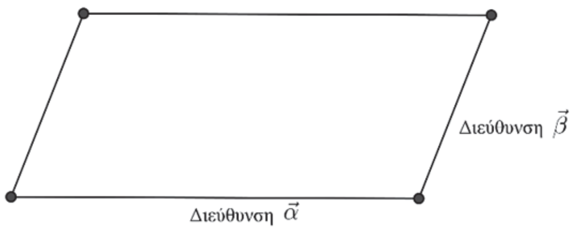


Σχήμα 3

Επομένως σε μία διεύθυνση με k ζεύγη σημείων, σχηματίζονται πολύ $k-1$ παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, αν αθροίσουμε τα παραλληλόγραμμα σε όλες τις διευθύνσεις, θα πάρουμε

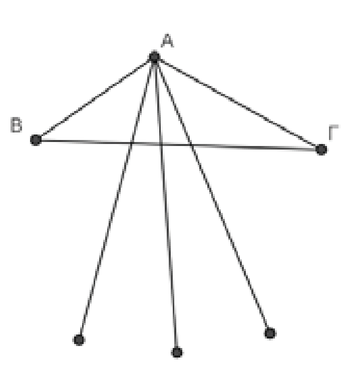
$$\sum(k-1)=\left(\sum k\right)-s\ ,$$

όπου s είναι το συνολικό πλήθος των διευθύνσεων στις οποίες βρίσκονται σημεία. Το άθροισμα όμως $\left(\sum k\right)$ είναι το άθροισμα όλων των τμημάτων, που είναι $\binom{n}{2}$. Επομένως, το πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το $\binom{n}{2}-s$. Αλλά με αυτό τον τρόπο μετρήσαμε κάθε παραλληλόγραμμο δύο φορές. Μία φορά για την διεύθυνση $\vec{\alpha}$ και μία φορά για τη διεύθυνση $\vec{\beta}$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Σχήμα 4

Επομένως το συνολικό πλήθος των παραλληλογράμμων εμβαδού 1 είναι το πολύ $\dfrac{\binom{n}{2}-s}{2}$. Θα δείξουμε τώρα ότι αν έχουμε $n\geq 4$ σημεία στο επίπεδο, ανά τρία μη συνευθειακά, τότε το πλήθος των διευθύνσεων είναι $s\geq n$. Πράγματι ας πάρουμε τρία γειτονικά σημεία $\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma$ (σε κυρτή θέση) όπως στο σχήμα:



Σχήμα 5

Το σημείο Α συνδέεται με $n-1$ τμήματα με τα υπόλοιπα σημεία. Όλα αυτά τα τμήμα έχουν κοινό σημείο το Α, οπότε ορίζουν $n-1$ διαφορετικές διευθύνσεις. Επιπλέον το τμήμα ΒΓ δεν είναι παράλληλο σε κανένα από αυτά τα τμήματα, αφού τα τέμνει όλα, άρα ορίζει μία ακόμη διεύθυνση. Επομένως έχουμε τουλάχιστον $n-1+1=n$ διαφορετικές διευθύνσεις, οπότε το πλήθος των παραλληλογράμμων είναι το πολύ $\dfrac{\binom{n}{2}-n}{2}=\dfrac{n^2-3n}{4}$.

Οι λύσεις των ασκήσεων του τεύχους 107. Ευκλείδη Β΄

Α50. Βρείτε όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a,b,c που ικανοποιούν τις εξισώσεις: $ab\left(1-\dfrac{c^2}{(a+b)^2}\right)=bc\left(1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right)=ca\left(1-\dfrac{b^2}{(c+a)^2}\right)$.

Λύση (Σ. Μπραζιτίκος).

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε ένα τρίγωνο με πλευρές a,b,c και δ_α είναι η διχοτόμος που αντιστοιχεί στην πλευρά a, τότε $\delta_\alpha^2=bc\left(1-\dfrac{a^2}{(b+c)^2}\right)$. Επομένως αν δείξουμε ότι οι αριθμοί a,b,c αποτελούν πλευρές τριγώνου, η δοσμένη ισότητα λέει ότι οι τρεις διχοτόμοι είναι ίσοι, άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο, άρα $a=b=c$.

Θα δείξουμε λοιπόν ότι οι a,b,c αποτελούν πλευρές τριγώνου. Ας υποθέσουμε το αντίθετο, τότε κάποιος θα είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το άθροισμα των άλλων δύο. Έστω $c\ge a+b$.

Από τις πρώτες δύο σχέσεις έχουμε

$$\frac{a((a+b)^2-c^2)}{(a+b)^2}=\frac{c((c+b)^2-a^2)}{(c+b)^2}\Leftrightarrow\frac{a(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}=\frac{c(a+b+c)(b+c-a)}{(c+b)^2}\Leftrightarrow\frac{a(a+b-c)}{(a+b)^2}=\frac{c(b+c-a)}{(c+b)^2}$$

άτοπο, αφού $a+b-c\le 0$, ενώ $b+c-a>0$. Άρα οι a,b,c αποτελούν πλευρές τριγώνου με ίσες διχοτόμους, άρα $a=b=c$.

Γ40. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Η προέκταση της διαμέσου ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο *c* του τριγώνου ΑΒΓ στο σημείο Ρ. Έστω $\mathrm{AH_1}$ ύψος του τριγώνου ΑΒΓ και Η το ορθόκεντρο του. Οι ημιευθείες ΜΗ και $\mathrm{PH_1}$ τέμνουν τον κύκλο *c* στα σημεία Κ και Τ, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{KTH_1}$ εφάπτεται της πλευράς ΒΓ.

Λύση

Έστω ότι οι $\mathrm{KH_1}$, ΑΗ τέμνουν τον κύκλο στα Ν, Δ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{T\widehat{K}H_1}=\mathrm{T\widehat{H_1}B}$. Όμως $\mathrm{T\widehat{K}H_1}=\mathrm{T\widehat{K}B}+\mathrm{B\widehat{K}N}$ και $\mathrm{T\widehat{H_1}B}=\mathrm{M\widehat{H_1}P}=\mathrm{T\widehat{P}B}+\mathrm{P\widehat{B}\Gamma}$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mathrm{B\widehat{K}N}=\mathrm{P\widehat{B}\Gamma}$ (*). Είναι όμως γνωστό ότι η ΗΜ τέμνει τον κύκλο στο αντιδιαμετρικό Ε του Α, οπότε $\mathrm{M\widehat{K}A}=90^\circ$, άρα το τετράπλευρο $\mathrm{H_1KAM}$ είναι εγγράψιμο. Επομένως $\mathrm{N\widehat{K}E}=\mathrm{\Delta\widehat{A}P}$, οπότε $\overset{\frown}{\mathrm{PE}}=\overset{\frown}{\mathrm{\Delta N}}$ (1). Όμως, $\mathrm{E\widehat{A}\Gamma}=\mathrm{B\widehat{A}\Delta}=90^\circ-\widehat{\mathrm{B}}\Rightarrow\overset{\frown}{\mathrm{B\Delta}}=\overset{\frown}{\mathrm{E\Gamma}}$ (2). Με πρόσθεση οι (1) και (2), δίνουν ότι $\overset{\frown}{\mathrm{BN}}=\overset{\frown}{\mathrm{P\Gamma}}$ που είναι ισοδύναμη με την (*), επομένως έχουμε το ζητούμενο.

HOMO MATHEMATICUS

Η Homo Mathematicus είναι μια στήλη στο περιοδικό μας, με σκοπό την ανταλλαγή απόψεων και την ανάπτυξη προβληματισμού πάνω στα εξής θέματα: 1) Τι είναι τα Μαθηματικά, 2) Πρέπει ή όχι να διδάσκονται, 3) Ποιοι είναι οι κλάδοι των Μαθηματικών και ποιο το αντικείμενο του καθενός, 4) Ποιες είναι οι εφαρμογές τους, 5) Ποιες επιστήμες ή κλάδοι επιστημών απαιτούν καλή γνώση των Μαθηματικών για να μπορέσει κάποιος να τους σπουδάσει.

συντακτική επιτροπή: *Κερασαρίδης Γιάννης, Βλάχος Σπύρος, Μανιατοπούλου Αμαλία, Μήλιος Γιώργος, Μπρούζος Στέλιος*

I. τι είναι τα Μαθηματικά;

προλεγόμενα *ο συνάδελφος Πέτρος Φαραντάκης είναι διδάκτωρ της φιλοσοφίας. Έχει, μεταξύ των άλλων, διατελέσει συντονιστής έκδοσης του διεπιστημονικού περιοδικού "Skepsis", συνεργάτης του Ακαδημαϊκού Ευάγγελου Μουτσόπουλου και της Ρωξάνης Αργυροπούλου, διευθύντριας Ερευνών στο Κέντρο Νεοελληνικών Ερευνών του Εθνικού Ιδρύματος Ερευνών. Ο συνάδελφος Πέτρος είναι πολυγραφότατος και, το κυριότερο, είναι μάχιμος εκπαιδευτικός. Μας έστειλε ένα σημείωμα με τίτλο*

«Το φιλοσοφικό υπόβαθρο των Μαθηματικών», μέρος του οποίου δημοσιεύουμε,

«Εάν εντρυφήσει κάποιος στα Μαθηματικά, αντιλαμβάνεται ότι αυτά δεν είναι απλώς και μόνον ένας τομέας ή ένα εργαλείο κατανόησης του κόσμου, αλλά μια ολόκληρη πραγματικότητα. Αυτή, αποτελείται από ένα «σύστημα», μιας ιδιαίτερης γλώσσας, η οποία, με τη σειρά της, περιλαμβάνει έναν αρμό συναφών εννοιολογικών δικτύων. Τα δίκτυα αυτά προσλαμβάνουν σημασία, στο μέτρο που τεκμηριώνουν *συλλογισμούς*. Κατ` ουσίαν όμως, ο συλλογισμός, συνιστά φιλοσοφικό γνώρισμα, υπό την έννοιαν ότι εξάγουμε μια κρίση από άλλες κρίσεις, που έχουν έναν κοινό όρο. Στο πεδίο πάλι της θεωρίας των ιδεών, διακρίνουμε τον παραγωγικό συλλογισμό και τον επαγωγικό συλλογισμό. Παραγωγικός, ονομάζεται ο συλλογισμός, ο οποίος βαίνει από τα καθόλου στα καθέκαστα, ενώ επαγωγικός είναι εκείνος, που προχωρεί από τα επιμέρους στα καθόλου. Ας μην παραλείψουμε να αναφερθούμε και στον αναλογικό συλλογισμό, κατά τον οποίον συνάγουμε το μερικό από το μερικό.

Δεύτερο κοινό γνώρισμα ανάμεσα στα Μαθηματικά και τη Φιλοσοφία, είναι η *υπόθεση*. Με τη λέξη, ή καλλίτερα, τον όρο υπόθεση, εννοούμε την κοινή αποδοχή, μιας αρχής, η οποία είναι δυνητική προς εξήγηση κάποιων ομοειδών φυσικών φαινομένων. Έτσι κάποια υπόθεση γίνεται πιο πιθανή όσο κατορθώνει να ερμηνεύσει περισσότερα φαινόμενα. Και στις δύο επιστημονικές πειθαρχίες – Μαθηματικά και Φιλοσοφία – μια υπόθεση δύναται να καταστεί *θεωρία*, εφόσον, κατορθώσει να ερμηνεύσει φαινόμενα, χωρίς χάσματα. Ωστόσο, οι υποθέσεις έχουν και έναν άλλον λειτουργικό ρόλο. Ακόμα και στην περίπτωση που δεν μπορούμε να τις αποδείξουμε, καλύπτουμε τα κενά, τα οποία παρουσιάζει η εμπειρία. Περιττό να τονίσουμε ότι οι υποθέσεις έχουν πλέον εμφιλοχωρήσει και σε άλλες επιστήμες, όπως τη βιολογία (προέλευση της ζωής από την ανόργανη ύλη), την κοσμολογία (γένεση του κόσμου από ένα αρχικό νεφέλωμα, κ.λ.π.), την οικολογία (φαινόμενο του θερμοκηπίου), κ.ά.

Τέλος, στο λίγο χωρικό διάστημα που μας απομένει, θα σταθούμε στην απόδειξη.

Αυτή, τόσο στην ευρεία έννοια όσο και στην αυστηρά μαθηματική, είναι απολύτως απαραίτητη σήμερα, μια και μιλάμε για μια κοινωνία υπερπληθώρας πληροφοριών και τεχνολογικής κοσμογονίας. Η απόδειξη, από μόνη της, καταδεικνύει την ισχύ μιας θέσης, ενός ισχυρισμού, μιας θεωρίας. Επίσης, στη φιλοσοφικομαθηματική αντίληψη, η επικράτηση της απόδειξης, φανερώνει ότι: α. Κατορθώσαμε να διαχειριστούμε μια πολυπλοκότητα εννοιών. β. Διακρίναμε τα σχετικά στοιχεία από τα άσχετα στοιχεία, τα οποία αφορούν σε ένα συγκεκριμένο στόχο και γ. Επιδείξαμε δεξιότητα επιλογής εν μέσω παρεμφερών, αλλά ουσιαστικά, ανόμοιων στόχων. Ας παρατηρήσουμε, στο σημείο αυτό, ότι εκείνο το οποίο, στην επιστημολογία, κάνει μια θεωρία επιστημονική, είναι η ελεγξιμότητα και δη *διαψευσιμότητά* της · με άλλα λόγια η ανοιχτότητα, που μας παρέχει η ίδια για να την ελέγξουμε και να την αναδείξουμε ως αναληθή, στο πλαίσιο μιας γνώσης, η οποία παραμένει ατελής. (Βλ. Karl Popper, Imre Lakatos, George Pólya …)»

ΙΙ. "Ευκλείδεια Γεωμετρία, αγάπη μου"

προλεγόμενα ικανοποιώντας το αίτημα του συναδέλφου Θ. Χριστόφη, δημοσιεύουμε τη δεύτερη συνέχεια για την επίπεδη τομή στερεών με σκοπό «*...να θυμηθούμε την ομορφιά που χάθηκε...*». Ζητείται απάντηση στο ερώτημα «*...γιατί, χάθηκε;...*»

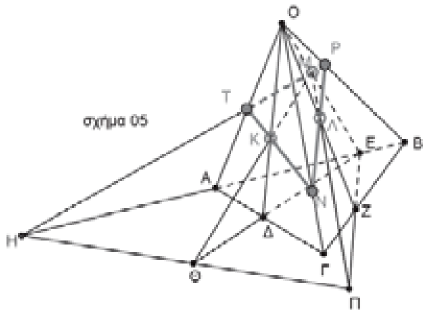
δεύτερο μέρος

iii. ***Τρίτη περίπτωση*** τα δοσμένα σημεία βρίσκονται στο εσωτερικό τριών εδρών της πυραμίδας

παράδειγμα Δίνεται πυραμίδα Ο.ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ,Μ στο εσωτερικό των εδρών ΟΑΓ,ΟΒΓ,ΟΑΒ αντίστοιχα. Να βρεθεί η τομή της πυραμίδας με το επίπεδο που ορίζουν τα δοσμένα σημεία.

απάντηση (σχήμα 05)

Οι ευθείες που ορίζονται από τα ζεύγη σημείων (Ο,Κ),(Ο,Λ),(Ο,Μ) τέμνουν τις ΑΓ,ΓΒ,ΒΑ στα Δ,Ζ,Ε αντίστοιχα.



επίπεδη τομή πυραμίδας όταν γνωρίζουμε τρία κοινά σημεία του επιπέδου με την επιφάνεια της πυραμίδας (στο εσωτερικό τριών εδρών της)

● Στα πλαίσια του επιπέδου που ορίζουν οι ΜΕ,ΜΚ, οι οι ευθείες ΕΔ, ΜΚ τέμνονται σε σημείο Θ.

● Στα πλαίσια του επιπέδου που ορίζουν οι ΜΕ,ΜΛ, οι ευθείες ΕΖ,ΜΛ τέμνονται σε σημείο Π.

● Στα πλαίσια του επιπέδου της βάσης ΑΒΓ, η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Π,Θ τέμνουν την ευθεία ΒΑ σε σημείο Η. Το Η είναι το νέο κοινό σημείο του επιπέδου (Κ,Λ,Μ) με το επίπεδο της έδρας ΟΑΒ.

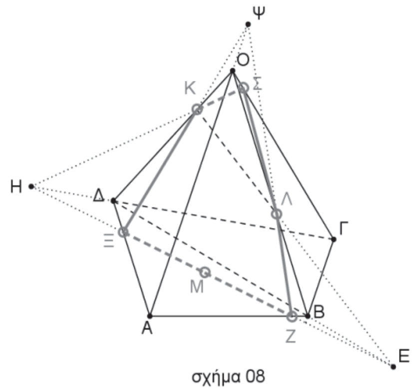
● Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΟΑΒ, το τέμνον επίπεδο έχει μ' αυτήν δύο κοινά σημεία Η,Μ. Η ευθεία ΗΜ τέμνει τις ακμές ΟΑ,ΟΒ στα Τ,Ρ αντίστοιχα.

● Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΟΒΓ, το τέμνον επίπεδο έχει μ' αυτήν δύο κοινά σημεία Ρ,Λ. Η ευθεία ΡΛ τέμνει την ακμή ΟΓ στο Ν.

● Άρα το επίπεδο που ορίζουν τα Κ,Λ,Μ τέμνουν την πυραμίδα κατά το τρίγωνο ΝΤΡ.

iv. ***Τέταρτη περίπτωση*** τα δοσμένα σημεία βρίσκονται σε ακμές και στο εσωτερικό εδρών της πυραμίδας (σχήμα 08)

παράδειγμα Δίνεται πυραμίδα Ο.ΑΒΓΔ και τρία σημεία Κ,Λ,Μ απ' τα οποία τα δύο πρώτα ανήκουν στις ακμές ΟΔ,ΟΒ αντίστοιχα και το τρίτο στο εσωτερικό της βάσης ΑΒΓΔ. Να βρεθεί η τομή της πυραμίδας με το επίπεδο που ορίζουν τα δοσμένα σημεία.



απάντηση (σχήμα 08)

● Στα πλαίσια του επιπέδου που ορίζουν οι ακμές ΟΔ,ΟΒ, η ευθεία ΚΛ τέμνει την προέκταση της ευθείας ΔΒ στο Ε.

● Στα πλαίσια του επιπέδου της βάσης ΑΒΓΔ η ευθεία ΕΜ τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο Η, την ακμή ΔΑ στο Ξ και την ακμή ΑΒ στο Ζ.

● Στα πλαίσια του επιπέδου της έδρας ΟΔΓ, η ευθεία ΗΚ τέμνει την ΟΓ στο Σ

● Άρα το επίπεδο που ορίζουν τα Κ,Λ,Μ τέμνουν την πυραμίδα κατά το πεντάγωνο ΞΖΛΣΚ.

[*το σημείωμα αυτό είναι παρμένο από αντίστοιχα σημειώματα στο* mathematica.gr, *του Γιάννη Κερασαρίδη*]

ΙΙΙ. Αυτό το ξέρατε;

α. τι είναι το "φουτμπωλένιο"

β. ποια είναι η εξίσωση του μυρωδάτου πεπονιού της εικόνας;

(η απάντηση, στο τέλος της στήλης)

IV. «Οι συνεργάτες της στήλης γράφουν-ερωτούν»

$1^{ο}$ θέμα Μαθηματικά και καρκίνος

προλεγόμενα ο συνεργάτης της στήλης Στέλιος Μπρούζος επιμελήθηκε ένα θέμα που είναι ντοκουμέντο για τη χρησιμότητα των Μαθηματικών. Συγγραφέας του θέματος ο Mohammad Kohande, αναπληρωτής καθηγητής Εφαρμοσμένων Μαθηματικών, στο Πανεπιστήμιο του Waterloo (Καναδάς).

«Πώς τα Μαθηματικά βοηθούν στην καταπολέμηση του καρκίνου»

«Οι συνεργασίες μεταξύ των μαθηματικών, των βιολόγων καρκίνου και των κλινικών ογκολόγων καθιστούν δυνατή, τόσο τη γρήγορη και αποτελεσματική δοκιμή των συνδυασμών φαρμάκων καρκίνου , όσο και τη βαθύτερη κατανόηση της αντίστασης των φαρμάκων στον καρκίνο. (Shutterstock)

Σχεδόν οι μισοί από τους Καναδούς θα αναπτύξουν καρκίνο στη διάρκεια της ζωής τους, σύμφωνα με την Canadian Cancer Society. Σε παγκόσμιο επίπεδο, ο καρκίνος είναι η δεύτερη αιτία θανάτου.

Όταν ο καρκίνος αναδύεται στο ανθρώπινο σώμα, καταλήγει σε κύτταρα που είναι "επιθετικά" και μπορούν να αποφύγουν τους μηχανισμούς αυξητικού ελέγχου του σώματος. Αυτά τα κύτταρα είναι επίσης "διεισδυτικά", εισερχόμενα και υποδιαιρούμενα στους παρακείμενους ιστούς. Και αυτά είναι συχνά «μεταστατικά» - ταξιδεύοντας και αποικίζοντας απομακρυσμένες περιοχές του σώματος.

Μία από τις μεγαλύτερες ανεπίλυτες προκλήσεις στην αντιμετώπιση του καρκίνου αφορά τη συχνή υποτροπή ασθενών που υποβάλλονται σε θεραπεία με χημειοθεραπεία και την εμφάνιση χημειοθεραπευτικής αντοχής σε καρκίνους.

Στην Ομάδα Μαθηματικής Ιατρικής του Πανεπιστημίου του Waterloo, εφαρμόζουμε μαθηματικές και υπολογιστικές προσεγγίσεις για να κατανοήσουμε την ανάπτυξη και τον έλεγχο του καρκίνου για περισσότερο από μια δεκαετία τώρα. Συνεργαζόμενοι με βιολόγους καρκίνου και κλινικούς ογκολόγους, προσπαθούμε να κατανοήσουμε μερικές από τις προκλήσεις στην αντιμετώπιση του καρκίνου, συμπεριλαμβανομένης της αντοχής στα φάρμακα και της υποτροπής.

Τα μαθηματικά μοντέλα μας επιτρέπουν να ψάχνουμε γρήγορα και να εντοπίζουμε τους πιο αποτελεσματικούς συνδυασμούς φαρμάκων για τους ασθενείς με καρκίνο. Επίσης, εμβαθύνουν την κατανόησή μας για το πώς και γιατί τα καρκινικά κύτταρα συχνά γίνονται ανθεκτικά στα χημικοθεραπευτικά φάρμακα.

Πιστεύουμε ότι αυτή η αυξανόμενη αλληλεπίδραση μαθηματικών επιστημόνων με βιολόγους καρκίνου και κλινικούς ογκολόγους θα οδηγήσει, επίσης, σε πολλές μελλοντικές εξελίξεις και επιτεύγματα στην αντιμετώπιση του καρκίνου.

Η πρόκληση της αντοχής στα φάρμακα

Η τυπική θεραπεία για τους περισσότερους καρκίνους περιλαμβάνει συνδυασμό χειρουργικής επέμβασης και χημειοθεραπείας και/ ή ακτινοθεραπείας.

Τα φάρμακα χημειοθεραπείας έχουν, σε γενικές γραμμές, αποδειχθεί αποτελεσματικά στην καταστροφή των καρκινικών κυττάρων εμποδίζοντας αυτά να αναπτυχθούν και να διαχωριστούν. Αλλά είναι σαφώς "δίκοπο μαχαίρι" καθώς καταστρέφουν και προκαλούν μεταλλάξεις σε υγιή, κανονικά κύτταρα ιστού.

Και η επιβίωση των ασθενών δεν εξαρτάται μόνο από την εξάλειψη των καρκινικών κυττάρων. Πρέπει επίσης να ελέγξουμε ή να ξεπεράσουμε την αντίσταση στα φάρμακα. Κάθε χρόνο χιλιάδες ασθενείς πεθαίνουν από υποτροπιάζοντες καρκίνους, που έχουν καταστεί ανθεκτικοί στη χημειοθεραπεία.

Η συνδυασμένη θεραπεία είναι μια πολύ ελπιδοφόρα στρατηγική. Αλλά αυτή θέτει τις δικές της ερωτήσεις για το πώς να διαχειριζόμαστε τα φάρμακα, τα οποία μπορούν να συνδυαστούν σε μια φαινομενικά άπειρη σειρά και ακολουθία.

Τα μαθηματικά μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να μελετήσουν αυτά τα είδη ερωτήσεων, προσφέροντας στον βιολόγο του καρκίνου και στους κλινικούς ογκολόγους ισχυρά νέα εργαλεία, εργαστηριακών και κλινικών προσεγγίσεων, για να προσθέσουν στο οπλοστάσιό τους.

Αυτά τα μοντέλα προσφέρουν μια ορθολογική και μοναδική μέθοδο αναζήτησης μέσω ενός μεγάλου αριθμού πιθανών στρατηγικών για τον εντοπισμό των πλέον αποτελεσματικών δόσεων για την επέκταση της επιβίωσης των ασθενών.

Η ίδια η χημειοθεραπεία προκαλεί αντίσταση

Η ομάδα μας επικεντρώνεται επί του παρόντος στην ανάπτυξη μιας βαθύτερης κατανόησης του τρόπου με τον οποίο τα καρκινικά κύτταρα γίνονται ανθεκτικά στα χημειοθεραπευτικά φάρμακα, οδηγώντας σε υποτροπή.

Με την ενσωμάτωση των Μαθηματικών με υπολογιστικές και πειραματικές μελέτες, προσπαθούμε να κατανοήσουμε και να ξεδιπλώσουμε πώς οι συγκεκριμένοι συνδυασμοί φαρμάκων μπορούν να βοηθήσουν στην υπέρβαση αυτής της αντίστασης.

Δεν είναι όλα καρκινικά κύτταρα γεννημένα ίσα. Ανταγωνίζονται μεταξύ τους και εκείνα που επιβιώνουν μεταδίδουν γενετικές πληροφορίες στα θυγατρικά τους κύτταρα.

Η έλλειψη ομοιόμορφων χαρακτηριστικών μεταξύ των κυτταρικών πληθυσμών έχει αναγνωριστεί ως ένας σημαντικός παράγοντας που περιπλέκει και παρεμποδίζει την ανταπόκριση της θεραπείας σε έναν αριθμό όγκων. Έχουμε δύο ανταγωνιστικές θεωρίες για να εξηγήσουμε αυτό: 1) την τυπική θεωρία της "κλωνικής εξέλιξης" και 2) την "Υπόθεση των βλαστικών καρκινικών κυττάρων".

Η θεωρία της κλωνικής εξέλιξης

Η θεωρία της κλωνικής εξέλιξης αναφέρει ότι οι περισσότεροι όγκοι προκύπτουν από μεμονωμένα κύτταρα μέσω της συσσώρευσης πολλών γενετικών αλλαγών.

Ωστόσο, η υπόθεση των βλαστικών καρκινικών κυττάρων υποδηλώνει ότι μόνο ένας υποπληθυσμός των αποκαλούμενων "κυττάρων που εκκινούν από καρκίνο" έχει την ικανότητα για απεριόριστη κυτταρική διαίρεση και επομένως οδηγεί στην ανάπτυξη του όγκου. Αυτά τα κύτταρα είναι πολύ επιθετικά, λιγότερο ευαίσθητα στα φάρμακα και φαίνεται να είναι η κινητήρια δύναμη της μετάστασης (η εξάπλωση των καρκινικών κυττάρων σε απομακρυσμένες περιοχές), η οποία συχνά οδηγεί σε θάνατο ασθενών.

Η ομάδα μας δημοσίευσε άρθρα στα Nature Communication και ACS Nano σε συνεργασία με δύο βιολόγους καρκίνου στη φαρμακευτική σχολή του Harvard -- Dr. Sengupta και Dr. Goldman -- για να δείξει ότι τα μη καρκινικά γαμετοκύτταρα μπορούν επίσης να καταστούν ανθεκτικά στα χημειοθεραπευτικά φάρμακα.

Αυτό σημαίνει ότι, η αντίσταση μπορεί να αποκτηθεί ως άμεσο αποτέλεσμα της χημειοθεραπείας. Αυτό προκαλεί την τρέχουσα εξήγηση ότι η αντίσταση είναι έμφυτη ή αποκτάται ως αποτέλεσμα τυχαίων μεταλλάξεων.

Εμπνευσμένη νανοϊατρική

Χρησιμοποιήσαμε επίσης μαθηματικά μοντέλα, ενσωματωμένα με πειραματικά δεδομένα, για να κατανοήσουμε τα χημειοανθεκτικά χαρακτηριστικά των καρκινικών κυττάρων και πώς επιβιώνουν με την πάροδο του χρόνου.

Χρησιμοποιώντας μοντέλα ποντικιών με επιθετικό καρκίνο του μαστού επιβεβαιώσαμε τις προβλέψεις από το μαθηματικό μας μοντέλο ότι, για να ξεπεραστεί η αντίσταση και η υποτροπή, ένας θανατηφόρος συνδυασμός φαρμάκων σε ένα μόνο νανοσωματίδιο (ένα μικροσκοπικό σωματίδιο) πρέπει να παραδοθεί στο ίδιο κύτταρο.

Αυτές οι πρόσφατες εργασίες υπογραμμίζουν τη σημασία των μαθηματικών και των βιολόγων καρκίνου που εργάζονται μαζί. Δείχνουν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να βοηθήσουν στην κατανόηση του καρκίνου και επίσης να έχουν βαθιές επιπτώσεις στα αποτελέσματα της θεραπείας.

Οι μαθηματικές και υπολογιστικές στρατηγικές παρέχουν έναν ανώδυνο, γρήγορο και οικονομικό τρόπο δοκιμής διαφορετικών στρατηγικών συνδυασμού φαρμάκων, καθώς και άλλων υποθέσεων που χρησιμοποιούν υπολογιστικά μοντέλα. Τα Μαθηματικά μπορούν να εμπνεύσουν ακόμη και το σχεδιασμό της νανοϊατρικής!»

2ο θέμα. «αρχιμήδεια στερεά»,

προλεγόμενα ο συνάδελφος Σωτ. Γκουντουβάς, μας συνήθισε (στο Διαδίκτυο) με εκλεκτά σημειώματα. Αυτή τη φορά διαλέξαμε ένα σημείωμά του, με αναφορά στα λεγόμενα "αρχιμήδεια στερεά". Λόγω έλλειψης χώρου, θα σας τα παρουσιάσουμε σε δυο συνέχειες. Εμάς, μας άρεσαν· απολαύστετο

«αρχιμήδεια στερεά», του Σωτήρη Γκουντουβά

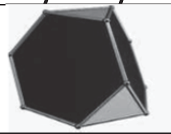
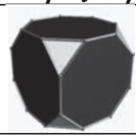
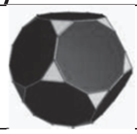
«Αρχιμήδειο Στερεό ή ημικανονικό πολύεδρο είναι ένα κυρτό πολύεδρο, οι έδρες του οποίου είναι κανονικά πολύγωνα, αλλά όχι του ίδιου τύπου, αντίθετα με ό,τι συμβαίνει στα Πλατωνικά στερεά. Τα κανονικά πολύγωνα, που αποτελούν τις έδρες, έχουν όλα ίσες τις πλευρές τους, δηλαδή οι ακμές του πολυέδρου είναι όλες ίσες.

Επίσης, γύρω από κάθε κορυφή υπάρχει η ίδια διάταξη πλευρών. Τα Αρχιμήδεια στερεά αποτελούνται από δύο ή τρία είδη κανονικών πολυγώνων και το πλήθος των εδρών τους κυμαίνεται μεταξύ 8 και 92.

Το ενδιαφέρον για τα κανονικά πολύεδρα αναζωογονήθηκε τον 15ο αιώνα με τις εργασίες του Pierro dela Frantseska (1457) και του Luca Paccioli “Θεϊκή αναλογία” (1509), όπου εξετάζονται τα Αρχιμήδεια στερεά και τρόποι κατασκευής τους.

Στα κανονικά πολύεδρα αναφέρονται επίσης στο έργο τους οι Orontios Finaeus (1550), J. Ramos (1569) και Johannes Kepler "Κόσμος αρμονίας" (1619).
Όλα τα αρχιμήδεια στερεά έχουν διάφορες εφαρμογές στην τεχνολογία και σε επιστήμες»

Υπάρχουν 13 ημικανονικά κυρτά πολύεδρα, τα οποία είχε μελετήσει ο Αρχιμήδης στο, μη σωζόμενο, έργο του «Περί των κγ΄ ημικανονικών πολυέδρων» και είναι τα παρακάτω:

Αρχιμήδεια στερεά [α΄ μέρος]			
Κυβοκτάεδρο	***Κόλουρο τετράεδρο***	***Κόλουρο οκτάεδρο***	***Κόλουρος κύβος***
			
▪ 8 έδρες, ▪ 4 τετράγωνα ▪ 4 ισόπλευρα τρίγωνα	▪ 8 έδρες, ▪ 4 εξάγωνα ▪ 4 ισόπλευρα τρίγωνα	▪ 14 έδρες, ▪ 6 τετράγωνα ▪ 8 εξάγωνα	▪14 έδρες, ▪8ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 6 οκτάγωνα
Κόλουρο κυβοκτάεδρο	***Ρομβοκυβοκτάεδρο***	***Κόλουρο δωδεκάεδρο***	***Κόλουρο εικοσάεδρο***
			
▪ 26 έδρες, ▪ 12 τετράγωνα, ▪ 8 εξάγωνα ▪ 6 οκτάγωνα	▪ 26 έδρες, ▪ 8 ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 14 τετράγωνα	▪ 32 έδρες, ▪ 20 ισόπλευρα τρίγωνα ▪ 12 δωδεκάγωνα	▪ 32 έδρες, ▪ 12 πεντάγωνα ▪ 20 εξάγωνα

«*ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΔΙΑΔΡΟΜΕΣ*»,Θέματα Γεωμετρίας από την αρχαιότητα ως τον 20ό αιώνα, Σ.Χ.Γκουντουβάς

(το δεύτερο μέρος στο επόμενο)

V. ειδήσεις – ειδησούλες

1η. θεώρημα για το Μουσείο φίλος της στήλης μας παρέπεμψε στη διεύθυνση: *http://mathhmagic.blogspot.gr/2018/01/blog-post_27.html*, όπου βρήκαμε ένα σημείωμα με την ένδειξη «*Ένα θεώρημα για την φύλαξη του μουσείου και μια απόδειξη από το βιβλίο...*».
Διαβάζουμε: «Το θεώρημα φύλαξης του μουσείου (Art gallery problem) είναι ένα γνωστό πρόβλημα υπολογιστικής γεωμετρίας. Τέθηκε το 1973,από τον Αμερικανό μαθηματικό Victor Clee. Το απέδειξε το 1975,ο μαθηματικός Václav Chvátal. Περίπου πέντε χρόνια αργότερα ένας άλλος μαθηματικός, ο S. Fisk επανήλθε με μια κομψή απόδειξη.

Το πρόβλημα *«Ας υποθέσουμε ότι σε ένα μουσείο έχουμε μια μεγάλη αίθουσα με εκθέματα και θέλουμε να προσλάβουμε ικανό αριθμό φυλάκων έτσι ώστε κάθε σημείο της αίθουσας να εποπτεύεται από κάποιο φύλακα. Οι φύλακες θα θεωρήσουμε ότι είναι στατικοί, δηλαδή δεν κινούνται και ενδεχομένως θα μπορούσαν να αντικατασταθούν από κάμερες. Το ερώτημα: Ποιος είναι ο ελάχιστος αριθμός φυλάκων για να εποπτεύεται πλήρως η αίθουσα;».*
Εμείς, αυτό το σημείωμα, το είδαμε πολύ ενδιαφέρον. Όμως, παρόλα αυτά επειδή είναι μεγάλο σε έκταση κι επειδή η στήλη μας πάσχει μόνιμα από έλλειψη χώρου, σας συνιστούμε να το διαβάσετε εσείς.

http://mathhmagic.blogspot.gr/2018/01/blog-post_27.html

2η. Ρεαλιστικά Μαθηματικά Ο τρόπος διδασκαλίας των μαθηματικών στο σχολείο απασχολεί διεθνώς την εκπαιδευτική κοινότητα. Ο λόγος που η διδασκαλία αυτού του μαθήματος προβληματίζει περισσότερο, σε σχέση με άλλα μαθήματα, τους εκπαιδευτικούς συνδέεται κυρίως με τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν αρκετοί μαθητές να κατανοήσουν τις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και τη χρησιμότητα των Μαθηματικών.

Μια νέα δυναμική προσπάθεια, βασίζεται σε πρόσφατη μέθοδο διδασκαλίας που εφαρμόζεται με επιτυχία στην Ολλανδία και τοποθετεί στο πλαίσιο της πραγματικής ζωής και της καθημερινότητας τη μαθησιακή διαδικασία. Πρόκειται για ένα εκπαιδευτικό πρόγραμμα με τίτλο *Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση* που θα εφαρμοστεί πειραματικά σε 120 σχολεία της Μεγάλης Βρετανίας.

[https://thalesandfriends.org/el/2018/02/22/realistika-mathimatika/]

3η. *100 χρόνια χωρίς τον Georg Kantor*

Συμπληρώθηκαν 100 χρόνια από τότε (6/1/1918), που πέθανε ο G.Cantor, ο μαθηματικός που δάμασε το άπειρο με το μέτρημα του τσοπάνη...

[https://mathhmagic.blogspot.gr/2018/01/6-1918-gcantor.html]

4η. *για τον Jean Cocteau* (1889 -1963) Στην εκδήλωση που διοργάνωσε η ομάδα ΘΑΛΗΣ + ΦΙΛΟΙ την Παρασκευή 9 Φεβρουαρίου στο Πνευματικό Κέντρο του Δήμου της Αθήνας (Αμφιθέατρο ΑΝΤΩΝΗΣ ΤΡΙΤΣΗΣ), η μαθηματικός **Στέλλα Δημητρακοπούλου** μίλησε για το δημιουργικό πνεύμα του Γάλλου δημιουργού **Jean Cocteau** (1889 -1963).
Ο Cocteau κατέπλησσε τους πάντες με τη δαιμόνια ενεργητικότητά του στο θέατρο, στην ποίηση, στην πρόζα, στον κινηματογράφο, σε σχέδια και πίνακες. Στο μονόπρακτό του «Le Menteur» – «Ο Ψεύτης», στη σειρά του «θεάτρου τσέπης», του ελάσσονος αυτού θεάτρου – «théâtre mineur», αφήνει να λάμψει ένα αστέρι υπό μια γωνία λιγότερο γνωστή. Αυτή η άγνωστη οπτική στο έργο του Cocteau, που συνδιαλέγεται με τα μαθηματικά, θα μας δώσει το έναυσμα για μια περιδιάβαση στον κόσμο των μαθηματικών παραδόξων, από την εποχή του Επιμενίδη και του Ζήνωνα του Ελεάτη μέχρι τον 21οαιώνα.

https://thalesandfriends.org/el/2018/02/16/video-apo-tin-ekdilosi-o-jean-cocteau-kai-ta-mathimatika-paradoxa/

5η. *λίγη Αρχιτεκτονική* Ο Balkrishna Doshi, γνωστός για το πρωτοποριακό έργο του σε χαμηλού κόστους κτίρια, είναι ο φετινός νικητής του βραβείου Pritzker,
Ο 90χρονος αρχιτέκτονας είναι ο πρώτος Ινδός που κερδίζει το συγκεκριμένο βραβείο, το οποίο θεσπίστηκε το 1979 κι έκτοτε θεωρείται η μεγαλύτερη διάκριση στον τομέα της αρχιτεκτονικής, κάτι σαν το Νόμπελ της αρχιτεκτονικής.
Στο παρελθόν το έχουν λάβει μεταξύ άλλων οι Oscar Niemeyer και Zaha Hadid.

http://stagona4u.gr/index.php?option=com_k2&view=item&id=6121:indian-architect-balkrishna-doshi-is-this-year-s-pritzker-prize-winner

6η. *απόσυρση σχολικού βιβλίου* Η απόσυρση του βιβλίου μαθηματικών της Ε΄ Δημοτικού ανακοινώθηκε με την ΥΑ Φ.31/35496/Δ/1-3-2018, η οποία ορίζει ότι για το σχολικό έτος 2018-19 εγκρίνεται νέο σχολικό εγχειρίδιο. Δεν έχουμε εικόνα του νέου εγχειριδίου, ωστόσο πιστεύουμε ειλικρινά ότι είναι σχεδόν ακατόρθωτο να υπάρξει βιβλίο μαθηματικών χειρότερο από το προηγούμενο.

www.alfavita.gr/arthron/.../aposyrthike-sholiko-vivlio-mathimatikon-tis-e-dimotikoy

7η. *Παγκόσμια ημέρα εορτασμού του π=3,14...*

Από τη σημαντική φίλη Ευαγγελία Λώλη, λάβαμε ένα σημείωμα, με το οποίο μας υπενθύμισε πως πέρυσι (14/03/2017) εορτάστηκε η «παγκόσμια ημέρα του "**π**"». Εμείς απευθυνθήκαμε στη διεύθυνση που μας έδωκε, όπου, μεταξύ άλλων, απολαύσαμε τη διπλανή φωτογραφία και το απόφθεγμα του Ντε Μοργκάν: «*Το μυστηριώδες 3,14159... που τρυπώνει σε κάθε πόρτα και παράθυρο,και από κάθε καμινάδα». Αύγουστος Ντε Μοργκάν, A budget of paradoxes*

Στο επόμενο τεύχος θα ασχοληθούμε μ' αυτό το θέμα.

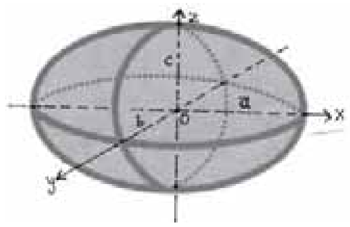
[πηγή: https://mathhmagic.blogspot.gr/2017/03/314.html]

VI. Απάντηση στο "αυτό το ξέρατε;

α. από τα «Αρχιμήδεια Στερεά», το κόλουρο εικοσάεδρο λέγεται και *φουτμπωλένιο* γιατί η μπάλα ποδοσφαίρου έχει τέτοιο σχήμα.

β. το μυρωδάτο πεπόνι της φωτογραφίας έχει σχήμα *ελλειψοειδούς (από περιστροφή)*. Αν a,b,c τα μήκη των ημιαξόνων (των *τετμημένων*, *τεταγμένων* και *κατηγμένων* αντίστοιχα), τότε η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



προαγγελία στις 14/03/2018, που έκλεινε η ύλη του Homo mathematicus (για το τεύχος 108), αναγγέλθηκε ότι "έφυγε" ο μεγάλος επιστήμονας Stephen Hawking. Λόγω της σπουδαιότητας αυτού του επιστήμονα, η στήλη υπόσχεται να παρουσιάσει (στο τεύχος 109), ένα επιμελημένο βιογραφικό του.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Χρ. Λαζαρίδης, Χρ. Τσιφάκης, Γ. Κατσούλης

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ — Ασκήσεις Άλγεβρας

Οι ασκήσεις 1–4 από τον **Καπόπουλο Χρήστο** Μαθηματικός 4^{ο} ΓΕΛ Πύργου
Οι ασκήσεις 5–11 από **Κόρδα Τιμόθεο** Μαθηματικός 2^{ο} ΓΕΛ Πύργου

1. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2+\beta^2-2\alpha-10\beta+17=0$ (1)

i. Να δείξετε ότι $-2\le\alpha\le4$ και $2\le\beta\le8$

ii. Να δείξετε ότι $-64\le\dfrac{2\beta^2}{\alpha-6}\le-1$

iii. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2+|x|=\sqrt{\alpha^2+4\alpha+4}+\sqrt{\alpha^2-8\alpha+16}$$

iv. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\beta|2x-3|-|20x-30|\ge5\beta-50$$

Λύση: i. Έχουμε: (1) $\Rightarrow$

$$\alpha^2-2\alpha+1+\beta^2-10\beta+25=1+25-17$$

$$\Rightarrow(\alpha-1)^2+(\beta-5)^2=9\Rightarrow\begin{cases}(\alpha-1)^2=9-(\beta-5)^2\\(\beta-5)^2=9-(\alpha-1)^2\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(\beta-5)^2\le9\\(\alpha-1)^2\le9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}|\beta-5|\le3\\|\alpha-1|\le3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3\le\beta-5\le3\\-3\le\alpha-1\le3\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\le\beta\le8 \quad (2)\\-2\le\alpha\le4 \quad (3)\end{cases}$$

ii. Ομοίως (2), (3) $\Rightarrow\begin{cases}4\le\beta^2\le64\\-8\le\alpha-6\le-2\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}8\le2\beta^2\le128\\2\le-(\alpha-6)\le8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\le2\beta^2\le128\\\frac{1}{8}\le-\frac{1}{\alpha-6}\le\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow1\le-\frac{2\beta^2}{\alpha-6}\le64\Rightarrow-64\le\frac{2\beta^2}{\alpha-6}\le-1$$

Αφού $-2\le\alpha\le4<6\Rightarrow\alpha-6\ne0$.

iii. Η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται

$$x^2+|x|=|\alpha+2|+|\alpha-4|\overset{(i)}{\Leftrightarrow}x^2+|x|=\alpha+2-\alpha+4$$

$$\Leftrightarrow x^2+|x|=6\Leftrightarrow|x|^2+|x|-6=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(|x|+3)(|x|-2)=0\Leftrightarrow|x|=2\Leftrightarrow x=\pm2$$

iv. Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$-5\le2x-3\le5\Leftrightarrow-2\le2x\le8\Leftrightarrow-1\le x\le4$$

2. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_2\ne\alpha_4$ και $\dfrac{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2-\alpha_4}=2$ (1)

i. Να βρείτε το λόγο λ

ii. Αν επιπλέον το γινόμενο των τριών πρώτων όρων της (α_ν) είναι 2^{18}, τότε:

α) Να βρείτε τον α_1

β) Να λύσετε την ανίσωση:

$$x+\alpha_1x+\alpha_2x+\ldots+\alpha_8x\le10\alpha_3-\alpha_2x^2$$

Λύση i. Από την υπόθεση έχουμε: $\alpha_1\lambda\ne\alpha_1\lambda^2$ δηλαδή $\lambda\ne1$ (αφού $\alpha_1,\lambda\ne0$

Τότε: (1) $\Rightarrow\dfrac{\alpha_1\lambda+\alpha_1\lambda^2}{\alpha_1\lambda-\alpha_1\lambda^3}=2\Rightarrow\dfrac{\lambda+\lambda^2}{\lambda-\lambda^3}=2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{\lambda(1+\lambda)}{\lambda(1+\lambda)(1-\lambda)}=2\Rightarrow2-2\lambda=1\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

(δεκτή τιμή αφού $\frac{1}{2}\ne1$)

ii. Εξάλλου: $\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3=2^{18}\Rightarrow\alpha_1\cdot\alpha_1\lambda\cdot\alpha_1\cdot\lambda^2=2^{18}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\alpha_1^3\cdot\frac{1}{2^3}=2^{18}\Rightarrow\alpha_1=2^7 \text{ άρα } \alpha_1=128$$

iii. Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$x+S_8x\le10\cdot\alpha_1\cdot\lambda^2-\alpha_1\cdot\lambda\cdot x^2\Leftrightarrow$$

$$x+128\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^8-1}{\frac{1}{2}-1}x\le10\cdot128\cdot\frac{1}{4}-128\cdot\frac{1}{2}x^2\Leftrightarrow$$

$$64x^2+256x-320\le0\Leftrightarrow x^2+4x-5\le0\Leftrightarrow-5\le x\le1$$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+\lambda x-7$, $\lambda\in\mathbb{R}$. Οι αριθμοί $f(2),f(6),f(8)$, με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

i. Να βρείτε την τιμή του λ.

ii. Να δείξετε ότι f(x) έχει άνισες ρίζες x_1,x_2 για τις οποίες να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\left(\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^2+x_2^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x)+f(x-1)\le-3$

iv. Να δείξετε ότι $f(x)\ge-8$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να βρείτε για ποια τιμή του x ισχύει η ισότητα.

Λύση: i. Από τον τύπο της f έχουμε

$$f(2)=2\lambda-3,\ f(6)=6\lambda+29,\ f(8)=8\lambda+57$$

Οπότε: $2f(6)=f(2)+f(8)\Rightarrow12\lambda+58=10\lambda+54$

$\Rightarrow \lambda = -2$ Επομένως $f(x) = x^2 - 2x - 7$ (1)

ii. Προφανώς $\Delta = 4 - 4 \cdot 1(-7) > 0$ άρα η f(x) έχει άνισες ρίζες x_1, x_2 η παράσταση Α γίνεται:

$$A = \left[\frac{(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}{(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2}\right]^{\frac{1}{2}} \overset{\text{VIETA}}{=} \left[\frac{S(S^2-3P)}{S^2-2P}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2(4+21)}{4+14}} = \sqrt{\frac{50}{18}} = \frac{5}{3}$$

iii. Η ανίσωση ισοδύναμα γράφεται

$x^2 - 2x - 7 + (x-1)^2 - 2(x-1) - 7 \le -3 \Leftrightarrow$

$2x^2 - 6x - 8 \le 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 4]$

iv. Έχουμε: $f(x) = x^2 - 2x + 1 - 8 = (x-1)^2 - 8 \ge -8$ για κάθε $x \in R$. Η ισότητα ισχύει μόνο $x = 1$

4. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{12}{x^2 + 2x + \alpha} + 3$ διέρχεται από το σημείο Μ(–2,–1). Να βρείτε: i. Τον αριθμό α

ii. Το πεδίο ορισμού της f

iii. Τα σημεία τομής Α και Β της C_f με τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα.

iv. Την εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από τα σημεία Α και Β.

v. Την εξίσωση της ευθείας ζ που είναι παράλληλη στην ε και διέρχεται από το σημείο Ν(2,–6).

vi. Το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία ζ με τους άξονες x΄x και y΄y.

Λύση i. Έχουμε:

$$f(-2) = -1 \Rightarrow \frac{12}{4-4+\alpha} + 3 = -1 \Rightarrow \frac{12}{\alpha} = -4 \Rightarrow \alpha = -3$$

Επομένως: $f(x) = \dfrac{12}{x^2+2x-3} + 3$ (1)

ii. γι να ορίζεται η f(x) πρέπει και αρκεί $x^2 + 2x - 3 \ne 0$ δηλαδή $x \ne -3$ και $x \ne 1$. Άρα $D_f = R - \{-3, 1\}$

iii. Έχουμε: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{x^2+2x-3} + 3 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{12}{x^2+2x-3} = -3$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = -4 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x = -1$. Άρα Α(–1,0).

Επίσης $f(0) = \dfrac{12}{-3} + 3 = -1$. Άρα Β(0,–1)

iv. Έστω (ε): $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας.

Τότε $A, B \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ -1 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$.

Άρα (ε): $y = -x - 1$

v. Αποκλείεται να είναι $\zeta // y'y$ οπότε (ζ): $y = \lambda x + \kappa$ και $\zeta // \varepsilon \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \kappa \ne -1 \end{cases}$

Άρα η εξίσωση της (ζ) είναι: $y = -x + \kappa$ με $\kappa \ne -1$. Εξάλλου $N \in \zeta \Leftrightarrow -6 = -2 + \kappa \Leftrightarrow \kappa = -4$, δεκτή τιμή αφού $-4 \ne -1$. Τελικά (ζ): $y = -x - 4$

vi. Η ευθεία ζ τέμνει τους άξονες x΄x και y΄y αντίστοιχα στα σημεία Γ(–4,0) και Δ(0,–4). Το εμβαδόν του τριγώνου ΓΟΔ ισούται

$$(\Gamma O \Delta) = \frac{1}{2}|O\Gamma||O\Delta| = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$$

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x-3| - 2|x|$.

i. Να γράψετε το τύπο της f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής, και να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

ii. Με τη βοήθεια της C_f να βρείτε:

α) Τα σημεία τομής με τους άξονες

β) τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x

iii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τα (α) και (β) του ερωτήματος (ii).

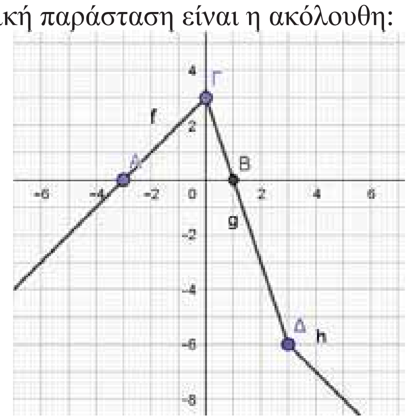
iv. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \Re$ για την οποία η ευθεία (ε): $y = (\lambda^2 - 4\lambda + 1)x + 2018$ είναι παράλληλη με την C_f όταν $x \in (0, 3)$

Λύση: Κάνουμε τον ακόλουθο πίνακα προσήμου για τις παραστάσεις μέσα στα απόλυτα

x	-∞		0		3		+∞
x		—	0	+	|	+	
x-3		-	|	-	0	+	

Άρα $f(x) = \begin{cases} 3 - x + 2x = x + 3, & \text{αν } x < 0 \\ -x + 3 - 2x = -3x + 3, & \text{αν } 0 \le x < 3 \\ x - 3 - 2x = -x - 3, & \text{αν } x \ge 3 \end{cases}$

Η γραφική παράσταση είναι η ακόλουθη:



ii. α. Η C_f τέμνει τον x΄x στα σημεία Α(–3,0) και Β(1,0) και τον y΄y στο σημείο Γ(0,3).

β. Η C_f βρίσκεται κάτω από τον x΄x στα διαστήματα $(-\infty, -3)$ και $(1, +\infty)$

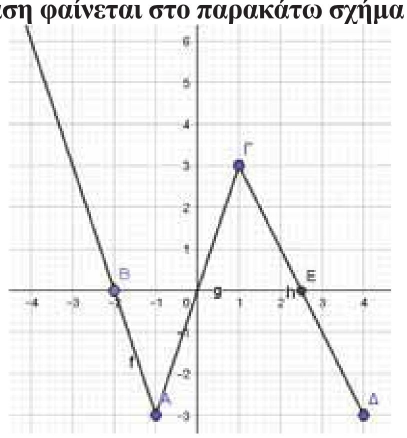
iii. α. Έχουμε: $f(x)=0 \Leftrightarrow |x-3|=2|x| \Leftrightarrow$
$x-3=2x$ ή $x-3=-2x \Leftrightarrow x=-3$ ή $x=1$
Άρα τέμνει τον x΄x στα στα σημεία Α(–3,0) και Β(1,0) και τον y΄y στο $f(0)=3$ Γ(0,3)

β. Έχουμε:. $f(x)<0 \Leftrightarrow |x-3|<2|x| \Leftrightarrow (x-3)^2<4x^2$
$\Leftrightarrow x^2+2x-3>0 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>1$

vi. Ο τύπος της $f(x)$ όταν $x\in(0,3)$ είναι $f(x)=-3x+3$. Άρα: $(\varepsilon)//C_f \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\lambda^2-4\lambda+1=-3\\ 3\neq 2018\end{cases} \Leftrightarrow \lambda^2-4\lambda+4=0 \Leftrightarrow \lambda=2.$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης
ii. Αν $-3<\alpha<1$
Α. Να δείξετε ότι $\alpha^2+2\alpha-4<-1$
Β. Να βρεθεί ο ακέραιος αριθμός α ώστε το σημείο $M(\alpha^2+2\alpha-4, 2\alpha^2+\alpha+6)$ να ανήκει στην C_f
iii. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται μεταξύ της C_f και του άξονα x΄x

Λύση: Η C_f αποτελείται από τμήματα 3 ευθειών με εξισώσεις της μορφής $y=\alpha x+\beta$.
Για $x\le -1$ η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(–1,–3) και Β(–2,0). Άρα

$$\begin{cases}-2\alpha+\beta=0\\ -\alpha+\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\alpha+\beta=0\\ \alpha-\beta=3\end{cases} \Rightarrow \alpha=-3,\ \beta=-6$$

$f(x)=-3x-6$. Για $-1\le x\le 1$ η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Α(–1,–3) και Γ(1,3).

Άρα $\begin{cases}\alpha+\beta=3\\ -\alpha+\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha+\beta=3\\ \alpha-\beta=3\end{cases} \Rightarrow \alpha=3,\ \beta=0$

$f(x)=3x$. Για η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία Δ(4,–3) και Γ(1,3).

Άρα $\begin{cases}3\alpha+\beta=1\\ 4\alpha+\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-3\alpha-\beta=-1\\ 4\alpha+\beta=-3\end{cases} \Rightarrow \alpha=-4, \beta=13$

$f(x)=-4x+13$.

Τελικά: $f(x)=\begin{cases}-3x-6, & \text{αν } x\le -1\\ 3x, & \text{αν } -1\le x\le 1\\ -4x+13, & \text{αν } 1\le x\le 4\end{cases}$

ii. **Α.** $-3<\alpha<1 \Rightarrow \begin{cases}\alpha-1<0\\ \alpha+3>0\end{cases} \Rightarrow (\alpha-1)(\alpha+3)<0 \Rightarrow$
$\alpha^2-2\alpha-3<0 \Rightarrow \alpha^2+2\alpha-4<-1$ που ισχύει.

Β. Για την τετμημένη του σημείου Μ ισχύει $\alpha^2+2\alpha-4<-1$ από Α ερώτημα. Οπότε: $M\in C_f$
$\Leftrightarrow f(\alpha^2+2\alpha-4)=2\alpha^2+\alpha+6 \Leftrightarrow$
$-3(\alpha^2+2\alpha-4)-6=2\alpha^2+\alpha+6 \Leftrightarrow 5\alpha^2+7\alpha=0$
$\Leftrightarrow \alpha(5\alpha+7)=0 \Leftrightarrow \alpha=0$ ή $\alpha=-\dfrac{7}{5} \Leftrightarrow \alpha=0$, αφού
$0\in\mathbb{Z}$ και $-3<0<1$ ενώ $-\dfrac{7}{5}\notin\mathbb{Z}$. Άρα Μ(–4,6)

Το ζητούμενο εμβαδόν αποτελείται από τα δύο τρίγωνα που ορίζονται από την C_f και τον άξονα x΄x.
Θα βρω τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα x΄x.
Θεωρούμε την εξίσωση $f(x)=0$ (1)
Για $x\le -1$ είναι $(1) \Leftrightarrow -3x-6=0 \Leftrightarrow x=-2$,
και $-2\le -1$. Άρα Β(–2,0).
Για $-1\le x\le 1$ είναι $(1) \Leftrightarrow 3x=0 \Leftrightarrow x=0$ και $-1\le 0\le 1$. Άρα Ο(0,0). Για $1\le x\le 4$ είναι $(1) \Leftrightarrow -4x+13=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{13}{4}$ και $1\le\dfrac{13}{4}\le 4$. Άρα $E\left(\dfrac{13}{4},0\right)$ Έχουμε λοιπόν ως σημεία τομής τα Β(–2,0), Ο(0,0), $E\left(\dfrac{13}{4},0\right)$.

$$E=(ΒΑΟ)+(ΟΓΕ)=\frac{2\cdot 3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{13}{4}\cdot 3=3+\frac{39}{8}=\frac{63}{8}$$

7. Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\alpha+3)x+\alpha+6=0$ (1)
i. Να βρείτε για ποιες τιμές του α η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
ii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) να βρείτε τις τιμές του α ώστε $x_1^2+x_2^2<42$
iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $x^2+(\alpha+3)x+\alpha+6\ge 0$ (2) για κάθε $x\in R$
iv. Να βρεθεί εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις αντίστροφες της (1)

Λύση: Βρίσκουμε τη διακρίνουσα
$\Delta=(\alpha+3)^2-4(\alpha+6)=\alpha^2+2\alpha-15$
Για να έχει η (1) ρίζες πραγματικές πρέπει και αρκεί $\Delta\ge 0$. Αλλά $\Delta\ge 0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-15\ge 0$
$\alpha\in(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)=A$

ii. Από τους τύπους του Vieta έχουμε

$x_1+x_2=-\alpha-3$ και $x_1\cdot x_2=\alpha+6$ οπότε στο A είναι: $x_1^2+x_2^2<42 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2<42 \Leftrightarrow$ $(-\alpha-3)^2-2(\alpha+6)<42 \Leftrightarrow \alpha^2+4\alpha-45<0$ $\Leftrightarrow -9<\alpha<5 \Leftrightarrow -9<\alpha\le-5$ ή $3\le\alpha<5$

iii. Για να ισχύει η (2) εφόσον α=1>0 πρέπει και αρκεί πρέπει Δ<0.

Αλλά $\Delta<0 \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha-15<0 \Leftrightarrow -5<\alpha<3$.

iv. Η εξίσωση που θέλουμε να βρούμε θα έχει ρίζες τις $\rho_1=\frac{1}{x_1}$ και $\rho_2=\frac{1}{x_2}$ με $x_1\cdot x_2\neq 0$, δηλαδή $\alpha\neq-6$. Τότε έχουμε

$$S=\rho_1+\rho_2=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-(\alpha+3)}{\alpha+6}$$

$P=\rho_1\cdot\rho_2=\frac{1}{x_1}\cdot\frac{1}{x_2}=\frac{1}{\alpha+6}$. Οπότε με $\alpha=-6$ η ζητούμενη εξίσωση ισοδύναμα γράφεται: $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\alpha+3}{\alpha+6}x+\frac{1}{\alpha+6}=0 \Leftrightarrow$ $(\alpha+6)x^2+(\alpha+3)x+1=0$ με $\alpha\in A-\{-6\}$.

8. Δίνεται η ευθεία (ε): $y=(|\alpha-2|-1)x+\alpha-3$

Να βρείτε το α ώστε

i. Η (ε) να είναι παράλληλη του άξονα x΄x

ii. Η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

iii. Η (ε) να είναι παράλληλη με την 1η διχοτόμο.

iv. Η (ε) να διέρχεται από το συμμετρικό του A(1,–4) ως προς τον άξονα x΄x.

Λύση: i. Η (ε) να είναι παράλληλη του άξονα

$$x'x \Leftrightarrow \begin{cases}|\alpha-2|-1=0\\ \alpha-3\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\alpha-2|=1\\ \alpha\neq3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha-2=1 \text{ ή } \alpha-2=-1\\ \alpha\neq3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=3 \text{ ή } \alpha=1\\ \alpha\neq3\end{cases} \Leftrightarrow \alpha=1$$

ii. Η (ε) σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x $\Leftrightarrow |\alpha-2|-1<0 \Leftrightarrow |\alpha-2|<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1$ $1<\alpha<3$

iii. Η (ε) να είναι παράλληλη με την 1η διχοτόμο$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}|\alpha-2|-1=1\\ \alpha-3\neq0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|\alpha-2|=2\\ \alpha\neq3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha-2=2 \text{ ή } \alpha-2=-2\\ \alpha\neq3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=4 \text{ ή } \alpha=0\\ \alpha\neq3\end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha=4$ ή $\alpha=0$

iv. Το συμμετρικό του A(1,–4) ως προς τον άξονα x΄x είναι το σημείο B(1,4). Οπότε $B\in(\varepsilon) \Leftrightarrow 4=|\alpha-2|-1+\alpha-3 \Leftrightarrow |\alpha-2|=8-\alpha$ (1). Για να έχει λύση η (1) πρέπει $8-\alpha\ge0$, δηλαδή $\alpha\le8$. Τότε $(1) \Leftrightarrow \alpha-2=8-\alpha$ ή $\alpha-2=-8+\alpha \Leftrightarrow$ $\alpha=5$ ή $0\cdot\alpha=-6 \Leftrightarrow \alpha=5$, δεκτή τιμή αφού $5\le8$

Β΄ Τρόπος: Αν $\alpha\ge2$, τότε $(1) \Leftrightarrow \alpha-2=8-\alpha$ ή $\alpha-2=-8+\alpha \Leftrightarrow \alpha=5$ δεκτή τιμή αφού $5\le8$.

Αν $\alpha<2$, τότε $(1) \Leftrightarrow \alpha-2=-8+\alpha \Leftrightarrow 0\cdot\alpha=-6$ αδύνατη. Άρα $(1) \Leftrightarrow \alpha=5$.

9. Οι αριθμοί $x-4$, $x+4$, $3x-4$ με την σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου (α_ν).

A. Να βρείτε τον αριθμό $x\in\mathbb{R}$

B. Αν ο αριθμός $x-4$ είναι ο πέμπτος όρος της α_ν να βρείτε:

i. Τον πρώτο όρο και την διαφορά ω της α_ν

ii. Το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της α_ν

iii. Ποιος όρος της α_ν είναι ίσος με 100

iv. Το πλήθος των αρχικών όρων της α_ν που έχουν άθροισμα 80.

v. Να υπολογίσετε τα αθροίσματα

$$A=\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\ldots+\alpha_{20}$$

$$B=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{21}$$

$$\Gamma=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_7+\alpha_8+\ldots+\alpha_{19}+\alpha_{20}$$

Λύση: A. Εφόσον οι αριθμοί αυτοί αποτελούν διαδοχικούς όρους (Α.Π) έχουμε: $2(x+4)=x-4+3x-4 \Rightarrow x=8$. Άρα οι αριθμοί είναι 4, 12, 20

B.i. Έχουμε $\alpha_5=x-4 \Rightarrow \alpha_5=4 \Rightarrow$, $\omega=\alpha_6-\alpha_5=12-4=8$ και $\alpha_1+4\omega=4 \Rightarrow \alpha_1+32=4 \Rightarrow \alpha_1=-28$

ii. $S_{20}=\frac{20}{2}(2\alpha_1+19\omega)=10(-56+152)=960$

iii. $\alpha_\nu=100 \Leftrightarrow -28+(\nu-1)8=100 \Leftrightarrow \nu=17$ άρα ο 17ος όρος είναι 100

iv. $S_\nu=80 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}(-56+8\nu-8)=80 \Leftrightarrow 4\nu(\nu-8)=80 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \nu^2-8\nu-20=0 \Leftrightarrow \nu=10$ ή $\nu=-2 \Leftrightarrow \nu=10$

v. $A=S_{20}-S_4=960-(-64)=1024$ Παρατηρώ ότι στην παράσταση B είναι οι περιττής τάξεως όροι της ακολουθίας α_ν. Θεωρώ την ακολουθία $\beta_\nu=\alpha_{2\nu-1}=\alpha_1+(2\nu-1-1)\omega=16\nu-44$, οπότε: $\alpha_{2\nu-1}=\alpha_{21} \Rightarrow 2\nu-1=21 \Rightarrow \nu=11$. Με $\beta_1=\alpha_1=-28$ και $\omega'=2\omega=16$. Έχουμε: $B=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{11}=S_{11}$ $=\frac{11}{2}(2\beta_1+10\omega')=11(-28+5\cdot16)=572$

$\Gamma=S_{20}-(\alpha_3+\alpha_6+\ldots+\alpha_{18})$ Θεωρούμε την ακολουθία $\gamma_\nu=\alpha_{3\nu}=\alpha_1+(3\nu-1)\omega=24\nu-36$ με $\gamma_1=\alpha_3=-28+2\cdot8=-12$ και $\omega_\gamma=3\omega=24$

Οπότε: $\Gamma=S_{20}-S_6'=960-3(2\gamma_1+5\omega_\gamma)$

$=960-288=672$

10. Δίνεται Αριθμητική Πρόοδος (α_ν). Ο αριθμητικός μέσος των α_4 και α_{19} είναι 45.

Α. Να βρείτε το άθροισμα S_{22}

Β. Αν επιπλέον το άθροισμα $S_{21}=903$ τότε

i. Τον πρώτο όρο και τη διαφορά ω

ii. Να βρείτε τον όρο α_ν για τον οποίο ισχύει $|\alpha_\nu-19|=6\nu-80$

iii. Ανάμεσα στους αριθμούς α_7 και S_7 να βρείτε 12 αριθμούς ώστε όλοι μαζί να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Λύση: Α. Έχουμε: $\frac{\alpha_4+\alpha_{19}}{2}=45\Rightarrow\alpha_1+3\omega+\alpha_1+18\omega=90$

$\Rightarrow 2\alpha_1+21\omega=90$ (1), οπότε

$$S_{22}=\frac{22}{2}[2\alpha_1+21\omega]\overset{(1)}{=}11\cdot 90=990$$

Β i. $S_{21}+\alpha_{22}=S_{22}\Rightarrow 903+\alpha_1+21\omega=990$

$\Rightarrow \alpha_1+21\omega=87$ (2). Άρα

$$(1),(2)\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+21\omega=87\\ 2\alpha_1+21\omega=90\end{cases}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\alpha_1=3\\ \omega=4\end{matrix}\right\}$$

ii. Έχουμε: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega=3+4(\nu-1)=4\nu-1$, οπότε $|\alpha_\nu-19|=6\nu-80\Leftrightarrow|4\nu-1-19|=6\nu-80$

$$\Leftrightarrow|4\nu-20|=6\nu-80\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}6\nu-80\ge 0\\ 4\nu-20=6\nu-80\end{matrix}\right\}$$

$$\text{ή}\ \left.\begin{matrix}6\nu-80\ge 0\\ 4\nu-20=-6\nu+80\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}6\nu-80\ge 0\\ \nu=30\end{matrix}\right\}\text{ή}\left.\begin{matrix}6\nu-80\ge 0\\ \nu=10\end{matrix}\right\}$$

$\Leftrightarrow \nu=30$

iii. $\alpha_7=\alpha_1+6\omega=27$ και $S_7=\frac{7}{2}(2\alpha_1+6\omega)=\frac{7}{2}\cdot 30=105$

Θεωρώ την ακολουθία (β_ν) με $\beta_1=\alpha_1=27$ και $\beta_{14}=S_7=105\Leftrightarrow\beta_1+13\omega=105\Leftrightarrow\omega=6$ Οι αριθμοί είναι: 33,39,45,…,99

11. Σε μια γεωμετρική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $S_5=310$ και $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10}=9920$

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=10$ και $\lambda=2$

Β. Να βρείτε την τιμή του κλάσματος

$$K=\frac{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+...+\alpha_{19}}{\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+...+\alpha_{25}}$$

Γ. Να βρεθεί ο μεγαλύτερος όρος της ακολουθίας (α_ν) ώστε να ισχύει:

$$\nu^2-3\nu\le\frac{2S_{2018}+\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_3}}{\alpha_{2018}}$$

Λύση: Α. $\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+\alpha_9+\alpha_{10}=9920\Rightarrow$

$S_{10}-S_5=9920\Rightarrow S_{10}=10230$

Ισχύει: $\lambda\ne 1$ (γιατί;) οπότε:

$$\begin{cases}S_{10}=10230\\ S_5=310\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1\cdot\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda-1}=10230\\ \alpha_1\cdot\frac{\lambda^5-1}{\lambda-1}=310\end{cases}\Rightarrow$$

$$\frac{\lambda^{10}-1}{\lambda^5-1}=\frac{10230}{310}\Rightarrow\lambda^{10}-33\lambda^5+32=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda^5=\kappa\\ \kappa^2-33\kappa+32=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda^5=\kappa\\ \kappa=1\ \text{ή}\ \kappa=32\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$\lambda^5=1$ ή $\lambda^5=32\Rightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=2\Rightarrow\lambda=2$ αφού $\lambda\ne 1$. Με αντικατάσταση στη δεύτερη εξίσωση βρίσκουμε $\alpha_1=10$.

Β. Υπολογισμός της παράστασης: Για τον αριθμητή θεωρώ την ακολουθία $\beta_\nu=\alpha_{2\nu-1}=\alpha_1\cdot\lambda^{2\nu-1-1}=\alpha_1\cdot(\lambda^2)^{\nu-1}$ η οποία είναι Γ.Π αφού $\frac{\beta_{\nu+1}}{\beta_\nu}=\frac{\alpha_1\cdot(\lambda^2)^{\nu+1-1}}{\alpha_1\cdot(\lambda^2)^{\nu-1}}=\lambda^2$ δηλαδή με λόγο $\lambda'=\lambda^2$ και $\beta_1=\alpha_1$ άρα $\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+...+\alpha_{19}=$

$$=\beta_1+\beta_2+...+\beta_{10}=S'_{10}=\beta_1\cdot\frac{(\lambda^2)^{10}-1}{\lambda^2-1}=\alpha_1\cdot\frac{\lambda^{20}-1}{3}$$

$$K=\frac{\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+...+\alpha_{19}}{\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8+...+\alpha_{25}}=\frac{S'_{10}}{S_{25}-S_5}$$

$$=\frac{\alpha_1\cdot\frac{\lambda^{20}-1}{3}}{\alpha_1\cdot\frac{\lambda^{25}-1}{\lambda-1}-\alpha_1\cdot\frac{\lambda^5-1}{\lambda-1}}=\frac{1}{3}\frac{\lambda^{20}-1}{\lambda^{25}-\lambda^5}$$

$$K\cong\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda^{20}}{\lambda^{25}-\lambda^5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda^{15}}{\lambda^{20}-1}\cong\frac{1}{3}\cdot\frac{\lambda^{15}}{\lambda^{20}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\lambda^5}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{32}=\frac{1}{96}$$

Γ. $\nu^2-3\nu\le\frac{2S_{2018}+\sqrt{\alpha_1\cdot\alpha_3}}{\alpha_{2018}}$

$$\Leftrightarrow\nu^2-3\nu\le\frac{2\alpha_1\cdot\frac{2^{2018}-1}{2-1}+\sqrt{\alpha_1\cdot 2^2\alpha_1}}{\alpha_1\cdot 2^{2017}}$$

$$\nu^2-3\nu\le\frac{2\alpha_1\cdot 2^{2018}-2\alpha_1+2\alpha_1}{\alpha_1\cdot 2^{2017}}$$

$\Leftrightarrow\nu^2-3\nu-4\le 0\Leftrightarrow -1\le\nu\le 4$

Αφού $\lambda=2>1$, η (α_ν) είναι γνησίως αύξουσα. Άρα ο μέγιστος όρος που ζητάμε θα αντιστοιχεί στο μέγιστο δείκτη ν=4 Είναι λοιπόν ο $\alpha_4=10\cdot 2^3=800$.

Ασκήσεις επανάληψης στη Γεωμετρία

Διονύσης Φ. Αρβανιτάκης, για το παράρτημα της Ε.Μ.Ε. Ηλείας

Ασκήσεις στις Εγγεγραμμένες Γωνίες

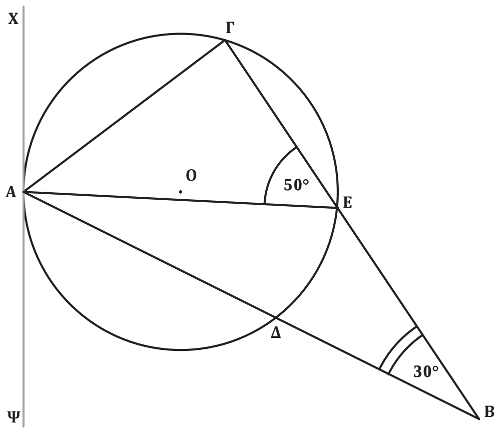
Άσκηση 1: Δίνεται κύκλος κέντρου Ο, τα σημεία του Α, Γ, Δ, Ε και Β σημείο εκτός αυτού. Αν:

- $\mathrm{A\hat{B}\Gamma = 30°}$.
- $\mathrm{A\hat{E}\Gamma = 50°}$.
- **Η ευθεία ΧΨ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Α.**

Τότε:

1. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{A}X}$.
2. Να βρείτε τη γωνία $\mathrm{\Delta\hat{A}E}$.
3. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΓ:
   - I. Τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.
   - II. Τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}$.

Λύση



1. Ισχύει $\mathrm{\Gamma\hat{A}X = A\hat{E}\Gamma = 50°}$, γιατί η γωνία $\mathrm{\Gamma\hat{A}X}$ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης.
2. Έχουμε: $\left(\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}\right) = 2\cdot\left(\mathrm{A\hat{E}\Gamma}\right) = 2\cdot 50° = 100°$.

$$\left(\hat{\mathrm{B}}\right) = \frac{\left(\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}}\right) - \left(\overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}\right)}{2} \; (1) \Rightarrow$$

$$30° = \frac{100° - \left(\overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}\right) = 100°2\cdot 30° = 40° \Rightarrow \left(\mathrm{\Delta\hat{A}E}\right) = \frac{\left(\overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}\right)}{2} = 20°.$$

3. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση την πλευρά ΑΓ.

   I. $\mathrm{A\hat{\Gamma}B = \Gamma\hat{A}B} = \dfrac{180° - 30°}{2} = 75°$.

   II. Έχουμε: $\left(\mathrm{\Delta\hat{A}E}\right) = \dfrac{\left(\overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}\right)}{2} = 20°$.

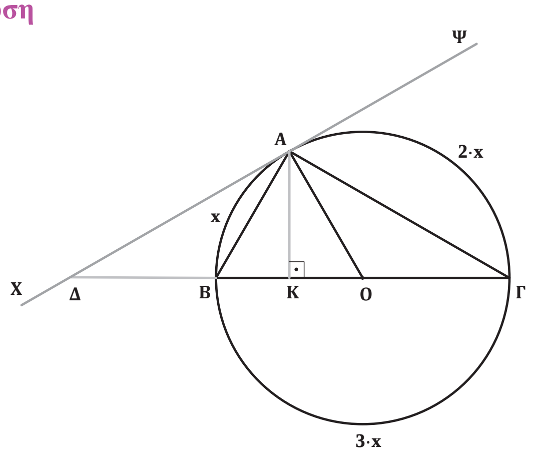
   Άρα: $\left(\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma E}}\right) = 2\cdot\left(\mathrm{\Gamma\hat{A}E}\right) = 2\cdot 55° = 110°$. Συνεπώς: $\left(\overset{\frown}{\mathrm{A\Delta}}\right) = 360° - 100° - 110° - 40° = 110°$.

Σημείωση: *Στο σχολικό βιβλίο (κακώς) η σχέση (1) γράφεται, απλουστευμένα υποτίθεται ως* $\hat{\mathrm{B}} = \dfrac{\overset{\frown}{\mathrm{A\Gamma}} - \overset{\frown}{\mathrm{\Delta E}}}{2}$*, δίνοντας έτσι την εντύπωση, ότι εξισώνουμε γωνίες με τόξα (ανομοιοειδή στοιχεία) ενώ εξισώνουμε μέτρα (αριθμούς).*

Άσκηση 2: Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα διαδοχικά τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ και $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma A}}$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma A}}$ είναι διπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ και το τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$ είναι τριπλάσιο του τόξου $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, τότε:

1. Να βρείτε πόσες μοίρες είναι τα τόξα $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{B\Gamma}}$, $\overset{\frown}{\mathrm{\Gamma A}}$ και να αποδείξετε ότι τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.
2. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ και να χαρακτηρίσετε τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ με βάση τις πλευρές του.
3. Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΟΓ.
4. Φέρουμε στο σημείο Α του κύκλου την εφαπτομένη ΧΨ που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο σημείο Δ.
   - I. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη ΧΨ με τη χορδή ΑΒ.
   - II. Να αποδείξετε ότι το σημείο Β είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΟΔ.
   - III. Αν $\mathrm{AK \perp OB}$, να αποδείξετε ότι: $\mathrm{OK} = \dfrac{\mathrm{\Delta\Gamma}}{6}$.

Λύση



1. Έχουμε ότι:
$x+2x+3x=360^\circ \Leftrightarrow 6x=360^\circ \Leftrightarrow x=60^\circ$.
$\overset{\frown}{AB}=60^\circ$, $\overset{\frown}{A\Gamma}=120^\circ$ και $\overset{\frown}{B\Gamma}=180^\circ$. Άρα τα σημεία Β και Γ είναι αντιδιαμετρικά.
2. Ισχύει $\hat{A}=90^\circ$, γιατί είναι γωνία εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο. Επίσης: $(\hat{B})=\dfrac{(\overset{\frown}{A\Gamma})}{2}=60^\circ$ και $(\hat{\Gamma})=\dfrac{(\overset{\frown}{AB})}{2}=30^\circ$.
Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι σκαληνό, γιατί οι γωνίες του είναι άνισες μεταξύ τους.
3. Επειδή το τρίγωνο ΑΟΒ είναι ισοσκελές με $\hat{B}=60^\circ$, έπεται ότι είναι ισόπλευρο. Άρα $A\hat{O}B=B\hat{A}O=60^\circ$.
4. Έχουμε:

I. $B\hat{A}X=\hat{\Gamma}=30^\circ$, γιατί η γωνία $B\hat{A}X$ είναι υπό χορδής και εφαπτομένης.

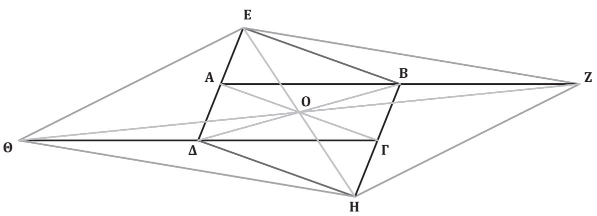
II. Επειδή η ακτίνα ΟΑ καταλήγει στο σημείο επαφής Α της εφαπτομένης ΧΨ ισχύει ότι ΟΑ⊥ΧΨ και άρα το τρίγωνο ΔΑΟ είναι ορθογώνιο στο Α. Άρα: $\hat{\Delta}=90^\circ-A\hat{O}B=30^\circ \Rightarrow$
$OA=\dfrac{\Delta O}{2}\Rightarrow OB=\dfrac{O\Delta}{2}$. Επομένως Β μέσο ΟΔ.

III. Αφού ΑΚ ύψος στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΟΒ, έπεται ότι είναι διάμεσος. Άρα:
$$OK=\frac{OB}{2}=\frac{\frac{\Delta\Gamma}{3}}{2}=\frac{\Delta\Gamma}{6}.$$

Ασκήσεις Επανάληψης

Άσκηση 1: Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ έτσι ώστε ΒΖ=ΑΒ, ΓΗ=ΒΓ, ΔΘ=ΓΔ και ΑΕ=ΕΔ. Να αποδείξετε ότι:
1. Τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΗΘ είναι ίσα.
2. Το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.
3. ΒΕ//ΔΗ.
4. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΘΖ συντρέχουν.

Λύση



1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΕΖ και ΓΗΘ. Αυτά έχουν:

I. ΑΕ = ΓΗ, από υπόθεση.

II. ΑΖ = ΓΘ, γιατί αν σε ίσα τμήματα (ΑΒ=ΓΔ, απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου) προσθέσω ίσα τμήματα (ΔΘ=ΒΖ=ΑΒ) προκύπτουν ίσα τμήματα.

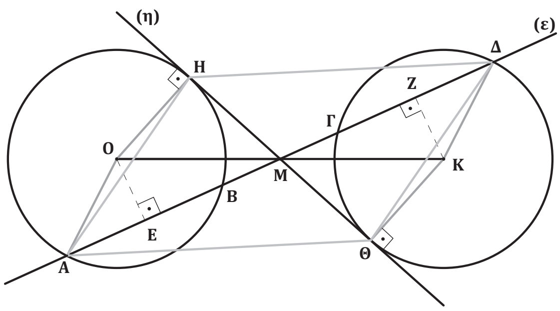
III. $\Theta\hat{\Gamma}H=E\hat{A}H$, ως παραπληρώματα ίσων γωνιών ($\Delta\hat{\Gamma}B=\Delta\hat{A}B$, ως απέναντι γωνίες παραλληλογράμμου). Από κριτήριο Π−Γ−Π έχουμε ότι $\overset{\Delta}{AEZ}=\overset{\Delta}{\Gamma H\Theta}$.

2. Από το ερώτημα 1 έχουμε ότι ΕΖ=ΗΘ (1)
Ομοίως αποδεικνύουμε ότι $\overset{\Delta}{\Theta E\Delta}=\overset{\Delta}{BHZ}$ και άρα ΗΖ=ΘΕ (2) Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι ΕΖΗΘ παραλληλόγραμμο.
3. Το τετράπλευρο ΔΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί ΔΕ//ΒΗ, αφού ΑΔ//ΒΓ και $\Delta E=2\cdot A\Delta=2\cdot B\Gamma=BH$.
Άρα ΒΕ//ΔΗ.
4. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο) στο σημείο Ο.
Οι διαγώνιοι ΒΔ και ΕΗ διχοτομούνται, γιατί ΔΕΒΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αφού το σημείο Ο είναι το μέσο του ΒΔ, έπεται ότι ΒΔ και ΕΗ διχοτομούνται στο Ο. Οι διαγώνιοι ΕΗ και ΘΖ διχοτομούνται στο Ο, γιατί ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο και Ο μέσο του ΕΗ.
Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΘΖ διχοτομούνται σο Ο, άρα συντρέχουν.

Άσκηση 2: Δίνονται οι κύκλοι (Ο,R) και (Κ,R) που δεν τέμνονται και Μ το μέσο της διακέντρου τους. Από το σημείο Μ φέρουμε:
- **Ευθεία (ε) που τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στα σημεία Α και Β με ΑΜ>ΒΜ και τον κύκλο (Κ,R) στα σημεία Γ και Δ με ΔΜ>ΓΜ.**
- **Κοινή εσωτερική εφαπτομένη ευθεία (η) που τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Η και τον κύκλο (Κ,R) στο σημείο Θ.**

Να αποδείξετε ότι:
1. ΑΒ=ΓΔ.
2. ΟΑ//ΚΔ.
3. ΜΗ=ΜΘ.
4. Το τετράπλευρο ΑΗΔΘ είναι παραλληλόγραμμο.
5. $A\hat{O}H=\Delta\hat{K}\Theta$.

Λύση



1. Φέρουμε τα αποστήματα ΟΕ και ΚΖ των χορδών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΕΜ και ΜΚΖ. Αυτά έχουν:

I. ΟΜ = ΜΚ, από υπόθεση.

II. $O\hat{M}E = Z\hat{M}K$, ως κατακορυφήν.
Από κριτήριο Π−Γ έχουμε ότι:
$$\overset{\Delta}{OEM} = \overset{\Delta}{MKZ}.$$

2. $A\hat{O}B = \Gamma\hat{K}\Delta$, γιατί ΑΒ=ΓΔ. Αφού τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{AOB} = \overset{\Delta}{\Gamma K\Delta}$ ισοσκελή, έπεται ότι:
$$O\hat{A}B = \frac{180^\circ - A\hat{O}B}{2} = \frac{180^\circ - \Gamma\hat{K}\Delta}{2} = K\hat{\Delta}\Gamma.$$
Επειδή οι γωνίες είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΟΑ και ΚΔ τεμνομένων από την ΑΔ, έπεται ότι ΟΑ//ΚΔ.

3. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΗΜ και ΜΚΘ. Αυτά έχουν:

I. ΟΗ = ΚΘ, ως ακτίνες ίσων κύκλων.

II. ΟΜ=ΜΚ, από υπόθεση.
Από κριτήριο Π−Π έχουμε ότι:
$\overset{\Delta}{OHM} = \overset{\Delta}{MK\Theta}$. Άρα ΜΗ=ΜΘ.

4. ΜΑ=ΜΔ, γιατί αν σε ίσα τμήματα (ΜΕ=ΜΖ, από ερώτημα 1),προσθέσω ίσα τμήματα (Α-Ε=ΖΔ, ως μισά ίσων χορδών, των ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα) προκύπτουν ίσα τμήματα. Συνεπώς ΑΗΔΘ παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο σημείο Μ.

5. ΑΗ=ΔΘ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου. Άρα $A\hat{O}H = \Delta\hat{K}\Theta$.

Άσκηση 3: Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Έστω Κ, Λ οι προβολές των Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα.

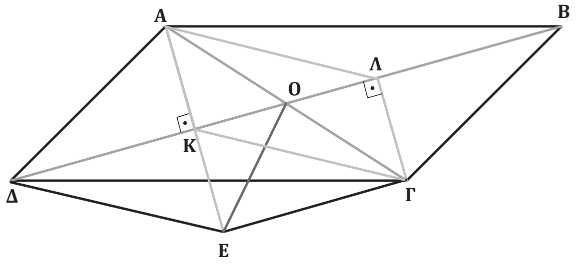
1. Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κορυφών Α και Γ από τη διαγώνιο ΒΔ είναι ίσες.
2. Να αποδείξετε ότι ΑΛ//ΚΓ.
3. Προεκτείνουμε την ΑΚ και παίρνουμε τμήμα ΚΕ=ΚΑ. Να αποδείξετε ότι:

I. ΑΔ=ΑΕ και ΟΑ=ΟΕ.

II. Το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.

III. Το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση



1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΔ και ΓΛΒ. Αυτά έχουν:

I. ΑΔ = ΒΓ, ως απέναντι πλευρές παραλληλογράμμου.

II. $A\hat{\Delta}B = \Delta\hat{B}\Gamma$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΓ τεμνομένων από την ΒΔ.

Από κριτήριο Π−Γ έχουμε ότι: $\overset{\Delta}{AK\Delta} = \overset{\Delta}{\Gamma\Lambda B}$.
Άρα: ΑΚ=ΓΛ.

2. Αφού ΑΚ=ΓΛ και επειδή ΑΚ//ΓΛ, αφού ΑΚ, ΓΛ κάθετες στη ΒΔ, έπεται ότι ΑΚΓΛ είναι παραλληλόγραμμο.

3. Έχουμε ότι:

I. ΔΚ διάμεσος και ύψος στο τρίγωνο ΑΔΕ. Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Συνεπώς ΑΔ = ΔΕ. Επειδή ΔΚ μεσοκάθετος ΑΕ και Ο∈ΔΚ έπεται ότι: ΟΑ=ΟΕ.

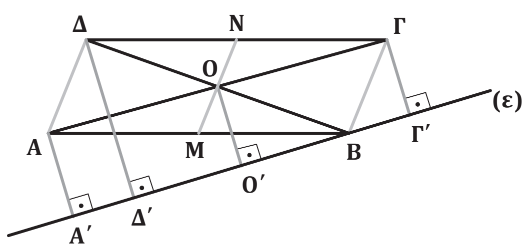
II. ΑΟ=ΟΓ=ΟΕ. Άρα $A\hat{E}\Gamma = 90^\circ$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΕΓ είναι ορθογώνιο.

III. ΕΓ//ΒΔ, γιατί είναι κάθετες στην ίδια ευθεία ΑΕ. Αφού ΒΓ=ΑΔ=ΔΕ, τότε ΒΓΔΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Άσκηση 4: Δίνεται τρίγωνο ΑΟΒ. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΟΑ και ΟΒ προς το μέρος του Ο και παίρνομε τμήματα ΟΓ=ΟΑ και ΟΔ=ΟΒ αντίστοιχα.

1. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα.
2. Έστω Μ μέσο της πλευράς ΑΒ και Ν μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ, Ο, Ν είναι συνευθειακά.
3. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.
4. Έστω (ε) μια τυχαία ευθεία που διέρχεται από το σημείο Β και αφήνει τις κορυφές Α, Γ και Δ του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ προς το ίδιο ημιεπίπεδο. Να αποδείξετε ότι η απόσταση της κορυφής Δ από την ευθεία (ε) ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων των κορυφών Α και Γ από την ευθεία (ε).

Λύση



1. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ. Αυτά έχουν:

I. ΟΑ = ΟΓ, από υπόθεση.

II. ΟΒ = ΟΔ, από υπόθεση.

III. $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, ως κατακορυφήν.
Από κριτήριο Π−Γ−Π έχουμε ότι:

$\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$.

2. Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΓΟΝ. Αυτά έχουν:

I. ΟΑ = ΟΓ, από υπόθεση.

II. ΑΜ=ΓΝ, ως μισά ίσων πλευρών (ΑΒ=ΓΔ, αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα).

III. $O\hat{A}M = O\hat{\Gamma}N$, Αφού τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα.

Από κριτήριο Π−Γ−Π έχουμε ότι:

$$\overset{\triangle}{AOM} = \overset{\triangle}{\Gamma ON}.$$

Άρα $A\hat{O}M = \Gamma\hat{O}N$. Συνεπώς:

$$M\hat{O}A + A\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}N = \Gamma\hat{O}N + A\hat{O}\Delta + \Delta\hat{O}N = A\hat{O}\Gamma = 180^\circ.$$

3. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο Ο.

4. Στο τρίγωνο ΒΔΔ΄ το σημείο Ο είναι μέσο της πλευράς ΒΔ και ΟΟ΄//ΔΔ΄, ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ε). άρα Ο΄ μέσο της πλευράς ΒΔ΄ και συνεπώς $OO' = \frac{\Delta\Delta'}{2}$ (1)

Το τετράπλευρο ΑΑ΄Γ΄Γ είναι τραπέζιο, γιατί ΑΑ΄//ΓΓ΄, ως κάθετες στην ίδια ευθεία (ε). Αφού Ο μέσο της πλευράς ΑΓ και ΟΟ΄//ΑΑ΄//ΓΓ, έπεται ότι ΟΟ΄ διάμεσος του τραπεζίου ΑΑ΄Γ΄Γ. συνεπώς:

$$OO' = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\frac{\Delta\Delta'}{2} = \frac{AA' + \Gamma\Gamma'}{2} \Leftrightarrow \Delta\Delta' = AA' + \Gamma\Gamma'.$$

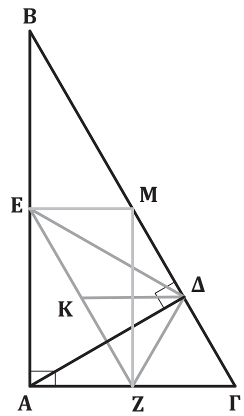
Άσκηση 5: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΑΔ. Έστω Ε, Ζ και Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Κ μέσο του ΕΖ να αποδείξετε ότι:

1. Το τετράπλευρο ΑΕΜΖ είναι ορθογώνιο.
2. $E\hat{\Delta}Z = 90^\circ$.
3. $\Delta K = \frac{B\Gamma}{4}$.
4. Τα τρίγωνα ΔΕΖ και ΕΜΖ είναι ίσα.
5. Το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Λύση

1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν ότι Ε και Μ μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ. Άρα ΕΜ//ΑΓ. Συνεπώς ΕΜ//ΑΖ.

Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν ότι Ζ και Μ μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ. Άρα ΜΖ//ΑΒ. Συνεπώς ΜΖ//ΑΕ. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή $\hat{A} = 90^\circ$ έπεται ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.



2. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΒ η ΔΕ είναι διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας. Άρα ΔΕ=ΑΕ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές και ισχύει $E\hat{A}\Delta = E\hat{\Delta}A$. Ομοίως και στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΓ η ΔΖ είναι διάμεσος και συνεπώς $Z\hat{A}\Delta = Z\hat{\Delta}A$. Επομένως:

$$E\hat{\Delta}Z = E\hat{\Delta}A + A\hat{\Delta}Z = E\hat{A}\Delta + \Delta\hat{A}Z = 90^\circ.$$

3. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΖ η ΔΕ είναι διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας. Άρα $\Delta K = \frac{EZ}{2}$ (1)

Επίσης στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν ότι Ε και Ζ μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Άρα

$$EZ = \frac{B\Gamma}{2} \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$\Delta K = \frac{\frac{B\Gamma}{2}}{2} = \frac{B\Gamma}{4}.$$

4. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΖ και ΕΜΖ. Αυτά έχουν:

I. $EM = \frac{A\Gamma}{2} = \Delta Z$.

II. $EM = \frac{AB}{2} = \Delta E$.

III. $A\hat{O}\Gamma = B\hat{O}\Delta$, ως κατακορυφήν.

Από κριτήριο Π−Γ−Π έχουμε ότι: $\overset{\triangle}{AOB} = \overset{\triangle}{\Gamma O\Delta}$.

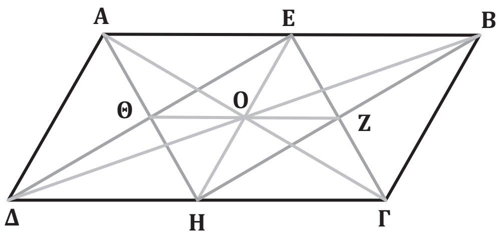
5. Το τετράπλευρο ΑΕΔΖ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, διότι: $E\hat{A}Z + E\hat{\Delta}EZ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$.

Άσκηση 6: Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2\cdot A\Delta$. Έστω Η το μέσο της πλευράς ΓΔ και Ε το μέσο της ΑΒ. Αν Θ το σημείο τομής των ΑΗ και ΔΕ και Ζ το σημείο τομής των ΒΗ

και ΓΕ, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η ΑΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Delta$.
2. Να αποδείξετε ότι η ΒΗ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και ΑΗ⊥ΗΒ.
3. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΗΔ είναι ρόμβος.
4. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο.
5. Να αποδείξετε ότι τα παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΑΕΓΗ και ΕΖΗΘ έχουν κοινό κέντρο.
6. Πόσες μοίρες πρέπει να είναι η γωνία $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο; Τι είδους θα είναι το τραπέζιο ΑΒΓΗ;

Λύση

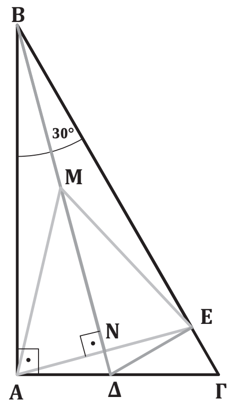


1. Η μέσο του ΔΓ. Άρα $\Delta H = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{2\cdot A\Delta}{2} = A\Delta$.
Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΗ είναι ισοσκελές. Επομένως: $\Delta\hat{A}H = \Delta\hat{H}A$.
Επίσης: $B\hat{A}H = \Delta\hat{H}A$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΓΔ τεμνομένων από την ΑΗ. Άρα $\Delta\hat{A}H = H\hat{A}B$. Συνεπώς ΑΗ διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{A}B$.
2. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ΗΒ διχοτόμος της γωνίας $A\hat{B}\Gamma$. Άρα
$$A\hat{H}B = 180^\circ - H\hat{A}B - H\hat{B}A =$$
$$=180^\circ - \frac{\Delta\hat{A}B}{2} - \frac{A\hat{B}\Gamma}{2} = \frac{360^\circ - \left(\Delta\hat{A}B + A\hat{B}\Gamma\right)}{2} =$$
$$= \frac{360^\circ - 180^\circ}{2} = 90^\circ.$$ Συνεπώς: ΑΗ⊥ΗΒ.
3. Επειδή ΑΒ//ΓΔ έπεται ότι ΑΕ//ΔΗ (1). Επίσης: $AE = \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} = \Delta H$ (2)
Από σχέσεις (!) και (2) έπεται ότι το τετράπλευρο ΑΕΗΔ είναι παραλληλόγραμμο και από ερώτημα 1, αφού ΑΔ=ΔΗ είναι ρόμβος.
4. Έχουμε ΕΔ⊥ΑΗ, γιατί ΑΕΗΔ ρόμβος.
Άρα $A\hat{E}\Theta = 90^\circ$. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι ΕΒΓΗ ρόμβος και συνεπώς $E\hat{Z}H = 90^\circ$. Μέσω του ερωτήματος 2 έχουμε ότι: $\Theta\hat{H}Z = 90^\circ$. Επομένως το τετράπλευρο ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο.
5. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι των παραλληλογράμμων ΑΒΓΔ και ΑΕΓΗ και ΕΖΗΘ διχοτομούνται στο σημείο Ο. Πράγματι: Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ διχοτομούνται (ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο) στο σημείο Ο.
Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΕΗ διχοτομούνται, γιατί ΑΕΓΗ παραλληλόγραμμο (ΑΕ=//ΗΓ). Αφού το σημείο Ο είναι το μέσο του ΑΓ, έπεται ότι ΑΓ και ΕΗ διχοτομούνται στο Ο.
Οι διαγώνιοι ΕΗ και ΘΖ διχοτομούνται στο Ο, γιατί ΕΖΗΘ είναι ορθογώνιο και Ο μέσο του ΕΗ. Συνεπώς διχοτομούνται στο σημείο Ο.
6. ΑΒΓΗ εγγράψιμο ⇔
$$A\hat{H}B + H\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow \frac{H\hat{\Gamma}B}{2} + H\hat{\Gamma}B = 180^\circ \Leftrightarrow$$
$$H\hat{\Gamma}B + 2\cdot H\hat{\Gamma}B = 360^\circ \Leftrightarrow H\hat{\Gamma}B = \frac{360^\circ}{2} = 120^\circ \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \hat{A} = 120^\circ,$$
το δε τραπέζιο ΑΒΓΗ ισοσκελές.

Άσκηση 7: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνα ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Φέρουμε τη διχοτόμο ΒΔ. Από την κορυφή Α φέρουμε κάθετο στη ΒΔ που την τέμνει στο σημείο Ν και η προέκτασή της τέμνει την πλευρά ΒΓ στο σημείο Ε. Αν Μ μέσο της ΒΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

1. Τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΔΕ είναι ισοσκελή.
2. Τα τρίγωνο ΑΕΜ είναι ισόπλευρο.
3. $B\Delta = 2AE$.
4. ΔΕ⊥ΒΓ και $E\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.
5. Να βρείτε τις γωνίες του τετραπλεύρου ΑΔΕΜ. Είναι εγγράψιμο σε κύκλο;

Λύση



1. ΒΝ διχοτόμος και ύψος στο τρίγωνο ΑΒΕ. Άρα ΑΒΕ ισοσκελές.
ΒΝ μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΕ. Άρα ΑΔ=ΔΕ. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΔΕ

είναι ισοσκελές.

2. Το τρίγωνο ΑΜΕ είναι ισοσκελές, γιατί ΜΑ=ΜΕ, αφού Μ σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΕ.
Το τρίγωνο ΒΜΑ είναι ισοσκελές, γιατί ΑΜ είναι διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΔ. Άρα: $M\hat{B}A = M\hat{A}B = 15°$. Συνεπώς
$A\hat{M}N = 2\cdot M\hat{A}B = 2\cdot 15° = 30°$.
ΜΝ είναι και διχοτόμος της γωνίας $A\hat{M}E$, επειδή ΜΝ είναι διάμεσος και ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ. Επομένως $A\hat{M}E = 2\cdot A\hat{M}N = 2\cdot 30° = 60°$. Αφού το ισοσκελές τρίγωνο ΑΜΕ έχει μία γωνία 60° είναι ισόπλευρο.

3. Έχουμε: ΒΔ=2·ΒΜ=2·ΑΜ=2·ΑΕ.

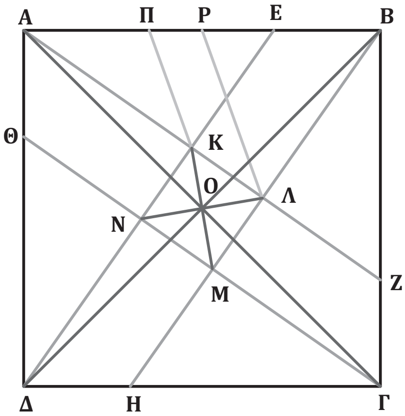
4. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΒΜΕ ισχύει
$M\hat{B}A = M\hat{E}B = 15°$. Επίσης: $M\hat{A}E = A\hat{E}M = 60°$.
Έχουμε: $A\hat{E}\Delta = \Delta\hat{A}E = 90° - B\hat{A}M - M\hat{A}E = 15°$.
$\Delta\hat{E}\Gamma = 180° - B\hat{E}M - M\hat{E}A - A\hat{E}\Delta = 90°$.
Άρα ΔΕ⊥ΒΓ. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΕΓ ισχύει: $E\hat{\Delta}\Gamma = 30°$. Άρα $E\Gamma = \frac{\Delta\Gamma}{2}$.
2ος τρόπος. Εργαζόμαστε με γωνίες και υπολογίζουμε τις $B\hat{\Delta}\Gamma = 105°$ και $N\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}N = 75°$. Άρα: $E\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma - N\hat{\Delta}E = 30°$,
$\Delta\hat{E}\Gamma = 180° - E\hat{\Delta}\Gamma - \hat{\Gamma} = 90°$.

5. $A\hat{\Delta}E = 2\cdot A\hat{\Delta}N = 2\cdot(90° - 15°) = 150°$, αφού το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές και ΔΝ διχοτόμος, αφού είναι ύψος..\
$\Delta\hat{E}M = \Delta\hat{E}A + A\hat{E}M = 75°$.
$A\hat{M}E = 60°$, από ερώτημα 2.
$M\hat{A}\Delta = 90° - B\hat{A}M = 75°$.
Το τετράπλευρο ΑΔΕΜ δεν είναι εγγράψιμο σε κύκλο, γιατί $M\hat{A}\Delta + \Delta\hat{E}M = 150° \neq 180°$.

Άσκηση 8: Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Αν Ε, Ζ, Η, Θ σημεία των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα τέτοια ώστε: ΑΕ=ΒΖ=ΓΗ=ΔΘ. Η ΑΖ τέμνει τις ΔΕ και ΒΗ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, ενώ η ΓΘ τέμνει τις ΔΕ και ΒΗ στα σημεία Ν και Μ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

1. Τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ είναι ίσα.
2. ΑΖ⊥ΔΕ.
3. Το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.
4. Τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ έχουν το ίδιο κέντρο συμμετρίας.
5. Αν Π μέσο ΑΕ και ΛΡ//ΚΠ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ρ τότε: $\Pi P = \frac{BE}{2}$.

Λύση



1. Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΖ και ΑΔΕ. Αυτά έχουν:
I. ΑΕ = ΒΖ, από υπόθεση.
II. ΑΒ = ΑΔ, ως πλευρές τετραγώνου.
Από κριτήριο Π−Γ έχουμε ότι: $\overset{\triangle}{ABZ} = \overset{\triangle}{AE\Delta}$.

2. Ισχύει: $A\hat{E}\Delta = A\hat{Z}B$, γιατί $\overset{\triangle}{ABZ} = \overset{\triangle}{AE\Delta}$.
Άρα: $A\hat{K}E = 180° - Z\hat{A}B - A\hat{E}\Delta =$
$= 180° - Z\hat{A}B - A\hat{Z}B = 180° - \left(Z\hat{A}B - A\hat{Z}B\right) =$
$= 180° - 90° = 90°$.

3. Ομοίως αποδεικνύουμε ότι:
$$B\hat{\Lambda}Z = H\hat{M}\Gamma = 90°.$$
Άρα: $N\hat{K}\Lambda = K\hat{\Lambda}M = \Lambda\hat{M}N = 90°$,
ως κατακορυφήν αντιστοίχως των γωνιών $A\hat{K}E$, $B\hat{\Lambda}Z$, $H\hat{M}\Gamma$. Άρα ΚΛΜΝ ορθογώνιο (1). Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΚΕ και ΔΘΝ. Αυτά έχουν:
I. ΑΕ = ΔΘ, από υπόθεση.
II. $K\hat{A}E = \Theta\hat{\Delta}N$, αφού $\overset{\triangle}{ABZ} = \overset{\triangle}{AE\Delta}$.
Από κριτήριο Π−Γ έχουμε ότι: $\overset{\triangle}{AKE} = \overset{\triangle}{\Delta\Theta N}$.
Συνεπώς ΑΚ=ΔΝ.
$$\left.\begin{aligned} K\Lambda &= AZ - AK - \Lambda Z \\ KN &= \Delta E - \Delta N - KE \end{aligned}\right\} \Rightarrow K\Lambda = KN.$$
Άρα ΚΛΜΝ ρόμβος (2).
Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι ΚΛΜΝ τετράγωνο.

4. Οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τετραγώνου ΑΒΓΔ διχοτομούνται στο σημείο Ο.
Το τετράπλευρο ΑΚΓΜ είναι παραλληλόγραμμο, αφού ΑΜ//ΜΓ, επειδή ΑΖ//ΘΓ (ΑΖΓΘ παραλληλόγραμμο, γιατί ΖΓ=//ΑΘ) και ΑΚ=ΜΓ, αφού $\overset{\triangle}{AKE} = \overset{\triangle}{HM\Gamma}$.
Άρα διχοτομούνται στο σημείο Ο.

Οι διαγώνιοι ΚΜ και ΝΛ διχοτομούνται και μάλιστα στο σημείο Ο. συνεπώς τα τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ έχουν κοινό κέντρο το Ο που αποτελεί το κέντρο συμμετρίας τους. Επομένως έχουν κοινό κέντρο συμμετρίας

5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΕ η ΚΠ είναι η διάμεσος που άγεται από την κορυφή της ορθής γωνίας και άρα το τρίγωνο ΑΚΠ είναι ισοσκελές με $\hat{AKΠ} = \hat{ΠAK}$.

$\hat{AKΠ} = \hat{AΛP}$, ως εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΚΠ και ΛΡ τεμνομένων από την ΚΛ. Άρα $\hat{ΠAK} = \hat{AΛP}$. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΡΛ είναι ισοσκελές και επομένως ΑΡ=ΡΛ.

Επίσης: $\hat{ABΛ} = \hat{AEK} = 90° - \hat{AΛP} = \hat{PΛB}$.

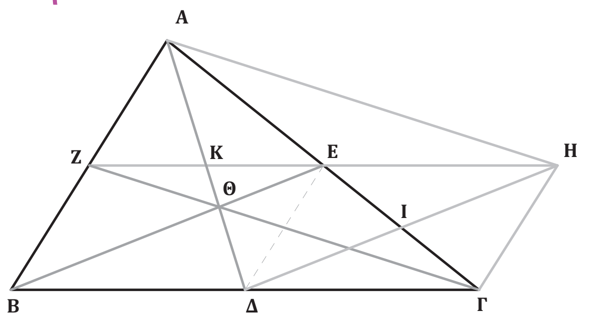
Άρα το τρίγωνο ΛΡΒ είναι ισοσκελές. Συνεπώς ΡΒ=ΡΑ=ΛΡ και επομένως Ρ μέσο του ΑΒ. Άρα έχουμε ότι:

$$ΠP = ΠB - PB = ΠE + EB - PB =$$
$$= \frac{AE}{2} + EB - \frac{AB}{2} = EB - \left(\frac{AB}{2} - \frac{AE}{2}\right) =$$
$$= BE - \frac{BE}{2} = \frac{BE}{2}.$$

Άσκηση 9: Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, οι διάμεσοί του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ και Θ το βαρύκεντρό του. Έστω Κ το σημείο τομής της ΕΖ με την ΑΔ και Ι το σημείο τομής της ΔΗ με την ΑΓ, όπου Η το συμμετρικό του σημείου Ζ ως προς το Ε. Να αποδείξετε ότι:

1. $KΘ = \frac{1}{6}AΔ$.
2. ΑΗ=ΓΖ και ΔΗ//ΒΕ.
3. Το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΔΗ είναι το σημείο Ε και μάλιστα ισχύει ότι $HK = \frac{3}{4}BΓ$

Λύση



1. Στο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν ότι Ζ και Ε μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ. Άρα ΕΖ//ΒΓ. Συνεπώς στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε ΖΚ//ΒΔ και Ζ μέσο ΑΒ, τότε Κ μέσο ΑΔ.

$$KΘ = AΘ - AK = \frac{2}{3}\cdot AΔ - \frac{1}{2}\cdot AΔ = \frac{1}{6}\cdot AΔ.$$

2. ΑΖΓΗ είναι παραλληλόγραμμο, γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται στο σημείο Ε, αφού ΕΖ=ΕΗ, λόγω συμμετρίας. Άρα ΑΗ=ΓΖ. Έχουμε ΖΕ//ΒΓ, τότε ΕΗ//ΒΔ.

Επίσης $EH = ZE = \frac{BΓ}{2} = BΔ$ (1)

ΕΗΒΔ παραλληλόγραμμο. Άρα ΒΕ//ΔΗ.

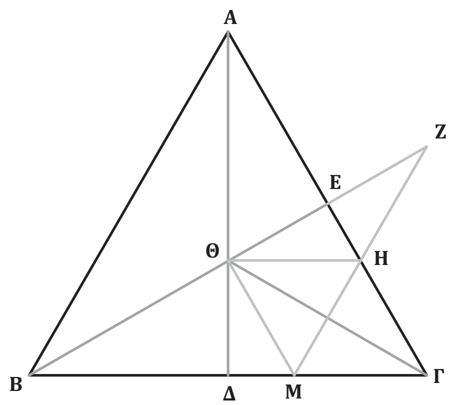
3. ΕΗ//ΔΓ, γιατί ΕΗ//ΒΔ. Επίσης ΕΗ=ΔΓ λόγω (1). Άρα ΕΗΓΔ παραλληλόγραμμο.
Το σημείο Ι είναι το κέντρο του παραλληλογράμμου. Άρα Ι μέσο της ΔΗ. Επομένως ΑΙ διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΗ. Επίσης ΗΚ διάμεσος στο τρίγωνο ΑΔΗ και τέμνεται με την ΑΙ στο σημείο Ε. Άρα Ε βαρύκεντρο. Ισχύει ότι:

$$HK = \frac{3}{2}\cdot HE = \frac{3}{2}\cdot BΔ = \frac{3}{2}\cdot\frac{BΓ}{2} = \frac{3}{4}\cdot BΓ.$$

Άσκηση 10: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται στο σημείο Θ. Έστω Ζ το συμμετρικό του σημείου Θ ως προς το σημείο Ε. Από το Ζ φέρουμε παράλληλο προς την ΑΒ που τέμνει την ΑΓ στο σημείο Η και την ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

1. $ΘA + ΘB + ΘΓ > \frac{3}{2}\cdot AB$.
2. Θ μέσο ΒΖ.
3. ΘΜ⊥ΘΖ.
4. $ΘH = \frac{MZ}{2}$.
5. Το τετράπλευρο ΘΗΓΜ είναι ρόμβος και να βρείτε τις γωνίες του.
6. Τα σημεία Γ, Δ, Θ, Ε είναι ομοκυκλικά.

Λύση



1. Έχουμε από τριγωνική ανισότητα:

$$\left.\begin{aligned} ΘA + ΘB &> AB \\ ΘB + ΘΓ &> BΓ \\ ΘΓ + ΘA &> AΓ \end{aligned}\right\} \underset{AB=BΓ=ΓA}{\overset{(+)}{\Rightarrow}}$$

$$2\cdot ΘA + 2\cdot ΘB + 2\cdot ΘΓ > 3\cdot AB \Leftrightarrow$$

$$ΘΑ + ΘΒ + ΘΓ > \frac{3}{2} \cdot ΑΒ.$$

2. Αφού Θ βαρύκεντρο στο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, έπεται ότι ΑΔ και ΒΕ διάμεσοι. Άρα: $ΒΘ = \frac{2}{3} \cdot ΒΕ$. Συνεπώς:

$$ΘΖ = 2 \cdot ΘΕ = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot ΒΕ = ΒΘ.$$

3. $Α\hat{Β}Ζ = Β\hat{Ζ}Μ = 30°$, ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΒ και ΜΖ τεμνομένων από την ΒΖ. Άρα το τρίγωνο ΒΜΖ είναι ισοσκελές και ΜΘ διάμεσος από το ερώτημα 2. Συνεπώς ΜΘ ύψος. Άρα ΜΘ⊥ΘΖ.

$2^{ος}$ τρόπος: Να αποδείξουμε ότι $ΘΗ = \frac{ΜΖ}{2}$, οπότε απαντάμε άμεσα και στο ερώτημα 4.

4. ΗΕ διάμεσος και ύψος, αφού ΒΕ⊥ΑΓ. Άρα το τρίγωνο ΘΗΖ είναι ισοσκελές. Συνεπώς ΘΗ=ΗΖ. Το τρίγωνο ΘΜΗ είναι ισόπλευρο, γιατί $Μ\hat{Θ}Η = Θ\hat{Μ}Η = Μ\hat{Η}Θ = 60°$, αφού: $Μ\hat{Θ}Η = 90° - 30° = 60°$ και $Μ\hat{Η}Θ = 2 \cdot \hat{Ζ} = 60°$. Άρα ΘΗ=ΗΜ. Συνεπώς $ΘΗ = \frac{ΜΖ}{2}$.

$2^{ος}$ τρόπος: ΕΗ//ΘΜ, ως κάθετοι στην ίδια ευθεία ΒΖ. Ε μέσο ΘΖ. Άρα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΖΘΜ ισχύει για τη διάμεσο ΘΗ ότι $ΘΗ = \frac{ΜΖ}{2}$.

5. Επειδή τα τρίγωνα ΘΜΗ και ΗΜΓ είναι ισόπλευρα με κοινή πλευρά την ΗΜ έπεται ότι ΘΗ=ΗΓ=ΜΓ=ΜΘ. Άρα το τετράπλευρο ΗΓΜΘ είναι ρόμβος. Συνεπώς $Μ\hat{Η}Γ = Β\hat{Α}Γ = 60°$ και $Μ\hat{Θ}Η = Α\ddot{\hat{Γ}}Β = 120°$.

6. Το τετράπλευρο ΘΕΓΔ είναι εγγράψιμμο σε κύκλο, γιατί:

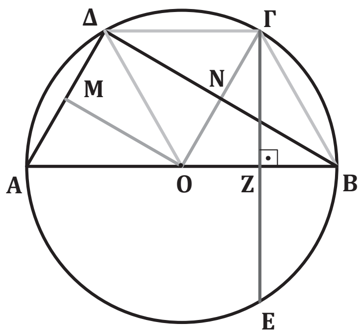
$$Θ\hat{Ε}Γ + Θ\hat{Δ}Γ = 90° + 90° = 180°.$$

Άρα τα σημεία Γ,Δ,Θ,Ε είναι ομοκυκλικά.

Άσκηση 11: Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και ακτίνας R και ΑΒ μια διάμετρός του. Έστω η χορδή ΑΔ=R και Μ, Ν τα μέσα των χορδών ΑΔ και ΒΔ αντίστοιχα. Αν η προέκταση της ΟΝ τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο σημείο Γ, τότε να αποδείξετε ότι:

1. $Α\hat{Β}Δ = 30°$.
2. Το τετράπλευρο ΟΜΔΝ είναι ορθογώνιο.
3. Το τετράπλευρο ΟΒΓΔ είναι ρόμβος.
4. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να βρείτε τη διάμεσό του ως συνάρτηση της ακτίνας R.
5. Η κάθετη χορδή ΓΕ στη διάμετρο ΑΒ ισούται με τη χορδή ΒΔ.

Λύση



1. Το τρίγωνο ΑΟΔ είναι ισόπλευρο, αφού ΟΑ=ΟΔ=ΑΔ=R. Άρα $Α\hat{Ο}Δ = 60°$. Συνεπώς

$$Α\hat{Β}Δ = \frac{Α\hat{Ο}Δ}{2} = 30°.$$

2. Αφού Μ μέσο ΑΔ, έπεται ότι ΟΜ απόστημα της χορδής ΑΔ. Επομένως ΟΜ⊥ΑΔ. Συνεπώς $Δ\hat{Μ}Ο = 90°$. Ομοίως αποδεικνύουμε εργαζόμενοι για την χορδή ΒΔ ότι $Δ\hat{Ν}Ο = 90°$.

Ισχύει $Α\hat{Δ}Β = 90°$, γιατί είναι γωνία εγγεγραμμένη και βαίνει σε ημικύκλιο.
Άρα το τετράπλευρο ΟΜΔΝ είναι ορθογώνιο.

3. Έχουμε ότι $\overset{\frown}{ΑΔ} = Α\hat{Ο}Δ = 60°$. Συνεπώς:

$$\overset{\frown}{ΔΒ} = 180° - 60° = 120°.$$

Αφού Γ μέσο $\overset{\frown}{ΔΒ}$, έπεται ότι $\overset{\frown}{ΔΓ} = \overset{\frown}{ΒΓ} = 60°$.
Άρα για τις αντίστοιχες χορδές έχουμε:
ΒΓ=ΔΓ=ΑΔ=R (1)
Αφού ΟΔ=ΔΓ=ΓΒ=ΒΟ=R, έπεται ότι το τετράπλευρο ΟΒΓΔ είναι ρόμβος.

4. Ισχύει: $Α\hat{Β}Δ = Β\hat{Δ}Γ = \frac{\overset{\frown}{ΒΓ}}{2} = 30°$. Αφού είναι εντός εναλλάξ των ευθειών ΔΓ και ΑΒ τεμνομένων από την ΒΔ, έπεται ότι ΑΒ//ΓΔ. Συνεπώς ΑΒΓΔ τραπέζιο. Αφού $\overset{\frown}{ΑΔ} = \overset{\frown}{ΒΓ} \Rightarrow ΑΔ = ΒΓ$, έπεται ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Η διάμεσος μ του ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο: $μ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2} = \frac{2R + R}{2} \overset{(1)}{=} \frac{3R}{2}$.

5. Έστω Ζ το σημείο τομής της ΓΕ με την ΟΒ. Άρα Β μέσο του $\overset{\frown}{ΓΕ}$, αφού ΟΖ⊥ΓΕ. Συνεπώς:

$$\overset{\frown}{ΓΒΕ} = 2 \cdot \overset{\frown}{ΒΓ} = 120°.$$

Άρα $\overset{\frown}{ΔΒ} = 120°$. Επομένως ΔΒ=ΓΕ.

Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Γενικά Θέματα Άλγεβρας

Σπύρος Γιαννακόπουλος (ΓΕΛ Γαστούνης) Παράρτημα ΕΜΕ Ηλείας

Θέμα 1ο

Έστω ένα γραμμικό σύστημα 2x2 με αγνώστους x,y και ορίζουσες D, D_x, D_y με $D_x>0$, $D_y>0$. Δεχόμαστε ότι ισχύει:

$$2D_x+(\sigma\upsilon\nu^2\theta)D_y=\frac{7}{2}D \quad (1).$$

α. Δείξτε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του $\theta\in R$ με $\sigma\upsilon\nu\theta\neq 0$.

β. Αν η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(x,y)=(1,2)$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{D_x}{\eta\mu 10^0}-\dfrac{D_y.\sqrt{3}}{2\sigma\upsilon\nu 10^0}=4D$.

ii. Να βρεθούν οι τιμές του $\theta\in(-\pi,2\pi)$ με $\sigma\upsilon\nu\theta<0$ που επαληθεύουν την (1) και να σημειωθούν στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Λύση

α. Έχουμε $2D_x>0$ και $(\sigma\upsilon\nu^2\theta)D_y>0$. Άρα

$2D_x+(\sigma\upsilon\nu^2\theta)D_y>0\overset{(1)}{\Rightarrow}D>0\Rightarrow D\neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για οποιαδήποτε τιμή του $\theta\in R$.

β. Αφού το ζεύγος $(1,2)$ είναι λύση του συστήματος, έχουμε $x=\dfrac{D_x}{D}=1$ και $y=\dfrac{D_y}{D}=2$.

i. $\dfrac{D_x}{\eta\mu 10^0}-\dfrac{D_y.\sqrt{3}}{2\sigma\upsilon\nu 10^0}=4D\Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{D_x}{D}}{\eta\mu 10^0}-\frac{\frac{D_y}{D}\sqrt{3}}{2\sigma\upsilon\nu 10^0}=4\Leftrightarrow\frac{1}{\eta\mu 10^0}-\frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^0}=4 \quad (2).$$

Αρκεί να δείξουμε την (2).

$$\frac{1}{\eta\mu 10^0}-\frac{\sqrt{3}}{\sigma\upsilon\nu 10^0}=\frac{\sigma\upsilon\nu 10^0-\sqrt{3}.\eta\mu 10^0}{\eta\mu 10^0\cdot\sigma\upsilon\nu 10^0}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu 10^0-\varepsilon\varphi 60^0\eta\mu 10^0}{\eta\mu 10^0\sigma\upsilon\nu 10^0}=\frac{\sigma\upsilon\nu 10^0-\frac{\eta\mu 60^0}{\sigma\upsilon\nu 60^0}\eta\mu 10^0}{\frac{1}{2}\eta\mu 20^0}=$$

$$2.\frac{\sigma\upsilon\nu 60^0\sigma\upsilon\nu 10^0-\eta\mu 60^0\eta\mu 10^0}{\sigma\upsilon\nu 60^0\eta\mu 20^0}=$$

$$2.\frac{\sigma\upsilon\nu\left(60^0+10^0\right)}{\frac{1}{2}\eta\mu 20^0}=4\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu 70^0}{\eta\mu 20^0}=$$

$$4\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\left(90^0-20^0\right)}{\eta\mu 20^0}=4\cdot\frac{\eta\mu 20^0}{\eta\mu 20^0}=4.$$

ii. $(1)\Leftrightarrow 2\dfrac{D_x}{D}+\left(\sigma\upsilon\nu^2\theta\right)\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow$

$2+2\sigma\upsilon\nu^2\theta=\dfrac{7}{2}\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2\theta=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu^2\theta=\dfrac{3}{4}\overset{\sigma\upsilon\nu\theta<0}{\Leftrightarrow}\sigma\upsilon\nu\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{6}\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}\right)\Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\theta=\sigma\upsilon\nu\dfrac{5\pi}{6}\Leftrightarrow\quad\theta=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ ή

$\theta=2\kappa\pi-\dfrac{5\pi}{6}$, $\kappa\in Z$.

Με $\theta=2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ έχουμε: $-\pi<\theta<2\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\pi<2\kappa\pi+\dfrac{5\pi}{6}<2\pi\Leftrightarrow-\dfrac{11\pi}{6}<2\kappa\pi<\dfrac{7\pi}{6}\Leftrightarrow$

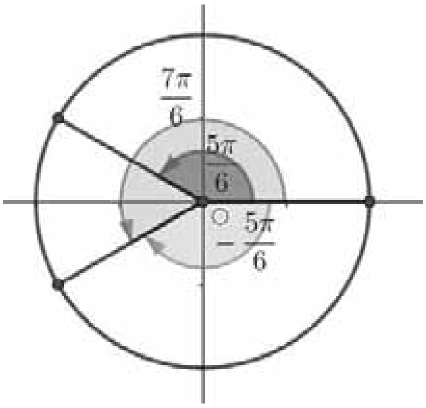
$\Leftrightarrow-\dfrac{11}{12}<\kappa<\dfrac{7}{12}\Leftrightarrow\kappa=0\Leftrightarrow\theta=\dfrac{5\pi}{6}$.

Επίσης $\theta=2\kappa\pi-\dfrac{5\pi}{6}$ έχουμε: $-\pi<\theta<2\pi\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\pi<2\kappa\pi-\dfrac{5\pi}{6}<2\pi\Leftrightarrow-\dfrac{\pi}{6}<2\kappa\pi<\dfrac{17\pi}{6}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{12}<\kappa<\dfrac{17}{12}\Leftrightarrow\kappa=0$ ή $\kappa=1\Leftrightarrow\theta=-\dfrac{5\pi}{6}$ ή $\theta=\dfrac{7\pi}{6}$

Τελικά $\theta\in\left\{-\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6},\dfrac{7\pi}{6}\right\}$.



Θέμα 2ο

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=(\eta\mu\alpha)x^3+\frac{16x}{x^2-9},\ \alpha\in R.}$$

α. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

β. Να δείξετε ότι :

i. Αν $A=f(0)+f(1)$,τότε $A\in[-3,-1]$.

ii. Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha\neq 0$,τότε:

$$(\eta\mu\alpha+2)f(-1)-3=\frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}.$$

γ. Αν οι γραφικές παραστάσεις C_{f_1}, C_{f_2} των συναρτήσεων $f_1(x)=\eta\mu x,\ x\in R,\ f_2(x)=\ln x$, έχουν κοινό σημείο το Α με $x_A=\alpha$ τότε να λύσετε την ανίσωση $\left(\frac{e^{\eta\mu\alpha}}{2\alpha}\right)^{2x}-2^{-x}-2\ln^2\alpha-2\sigma\upsilon\nu^2\alpha<0$ (1) με άγνωστο το x.

Λύση

α. Για το πεδίο ορισμού της f πρέπει και αρκεί $x^2-9\neq 0$ δηλαδή ($x\neq 3$ και $x\neq -3$). Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι το σύνολο $D_f=R-\{-3,3\}$.

- Για κάθε $x\in D_f$ είναι και $-x\in D_f$.
- Για κάθε $x\in D_f$ έχουμε:

$$f(-x)=-(\eta\mu\alpha)x^3-\frac{16x}{x^2-9}=-f(x).$$

Άρα η f είναι περιττή συνάρτηση.

β. i. Για κάθε $x\in D_f$ έχουμε $f(-x)=-f(x)$ και για $x=0$ παίρνουμε $f(0)=-f(0)\Rightarrow$ $2f(0)=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow A=f(1)=\eta\mu\alpha-2$. Αλλά $-1\le\eta\mu\alpha\le 1\Rightarrow -3\le\eta\mu\alpha-2\le -1\Rightarrow$ $-3\le f(1)\le -1\Rightarrow f(1)\in[-3,-1]\Rightarrow A\in[-3,-1]$.

ii. Αφού η f είναι περιττή έχουμε

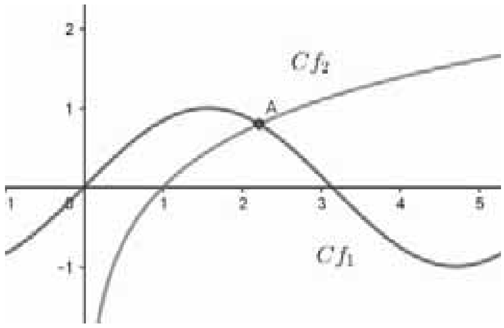
$f(-1)=-f(1)\Rightarrow$

$\Rightarrow(\eta\mu\alpha+2)f(-1)-3=-(\eta\mu\alpha+2)f(1)-3=$

$=-(\eta\mu\alpha+2)(\eta\mu\alpha-2)-3=1-\eta\mu^2\alpha=$

$=\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}.$

γ.



Έχουμε προφανώς $\alpha>0$ και $\ln\alpha=\eta\mu\alpha\Rightarrow$ $\Rightarrow e^{\eta\mu\alpha}=e^{\ln\alpha}=\alpha$ και $2\ln^2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2\alpha=$ $=2(\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha)=2$. Έτσι:

$$(1)\Leftrightarrow\left(\frac12\right)^{2x}-\left(\frac12\right)^{x}-2<0\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac12\right)^x=\omega\\ \omega^2-\omega-2<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\frac12\right)^x=\omega\\ -1<\omega<2\end{cases}\Leftrightarrow -1<\left(\frac12\right)^x<2\Leftrightarrow$$

$\left(\frac12\right)^x<\left(\frac12\right)^{-1}\Leftrightarrow x>-1$, αφού η εκθετική συνάρτηση με βάση το $\frac12$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 3ο

Αν $\theta\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ τότε

α. Δείξτε ότι: $(\varepsilon\varphi\theta-1)\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{\sqrt2}{\omega}\right)<0$.

β. i Να λύσετε την εξίσωση

$$(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{x}+(\eta\mu\theta)\sqrt{x-1}=\sqrt{x}\quad(1)$$

ii. Δείξτε ότι:

$$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\sqrt2(\varepsilon\varphi\theta)\eta\mu\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Λύση

α. Στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ η συνάρτηση του συνη-

μιτόνου είναι γνησίως φθίνουσα και της εφαπτομένης γνησίως αύξουσα.
Έχουμε λοιπόν:

$$\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow\theta>\frac{\pi}{4}\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta>\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta>1\Rightarrow \varepsilon\varphi\theta-1>0 \quad \text{και} \quad \frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}<\sigma\upsilon\nu\theta<\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<\sigma\upsilon\nu\theta<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow \sigma\upsilon\nu\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}<0.$$

Άρα $(\varepsilon\varphi\theta-1)(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{\sqrt{2}}{2})<0$.

β. i. Η (1) ορίζεται μόνο για $x\ge 1$. Τότε τα μέλη της (1) είναι θετικά. Έτσι έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow\left[(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{x}+(\eta\mu\theta)\sqrt{x-1}\right]^2=\left(\sqrt{x}\right)^2\Leftrightarrow$$

$$(\sigma\upsilon\nu^2\theta)x+(\eta\mu^2\theta)(x-1)+$$

$$(2\eta\mu\theta.\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{x(x-1)}=x\Leftrightarrow$$

$$(2\eta\mu\theta.\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{x(x-1)}=\eta\mu^2\theta\overset{\eta\mu\theta.\sigma\upsilon\nu\theta>0}{\Leftrightarrow}$$

$$\sqrt{x(x-1)}=\frac{\varepsilon\varphi\theta}{2}\overset{\varepsilon\varphi\theta>0}{\Leftrightarrow}x^2-x-\frac{1}{4}\varepsilon\varphi^2\theta=0 \ (3).$$

Η διακρίνουσα της (3) είναι $\Delta=1+\varepsilon\varphi^2\theta=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\theta}>0$ οπότε $(3)\Leftrightarrow x=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta\pm1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$. Όμως $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta-1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}<0<1$, ενώ $\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}>\frac{2\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}=1$, οπότε $(3)\Leftrightarrow x=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$ Άρα η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση την $x_1=\frac{\sigma\upsilon\nu\theta+1}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$

ii. Έχουμε: $(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{x_1}+(\eta\mu\theta)\sqrt{x_1-1}=\sqrt{x_1}\Rightarrow$

$$(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}}+(\eta\mu\theta)\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}-1}=$$

$$\sqrt{\frac{1+\sigma\upsilon\nu\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}}\Rightarrow(\sigma\upsilon\nu\theta)\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+(\eta\mu\theta)\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$$\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+(\varepsilon\varphi\theta)\sqrt{1-\sigma\upsilon\nu\theta}=$$

$$\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}\Rightarrow\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+(\varepsilon\varphi\theta)\sqrt{2\eta\mu^2\frac{\theta}{2}}=$$

$$\overset{\eta\mu\frac{\theta}{2}>0}{\Rightarrow}\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}+\sqrt{2}(\varepsilon\varphi\theta)\eta\mu\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{1+\sigma\upsilon\nu\theta}}{\sigma\upsilon\nu\theta}.$$

Θέμα 4^o

α. Αν ο ν είναι θετικός ακέραιος, δείξτε ότι ο 5 διαιρεί τον αριθμό $\alpha=3\cdot27^\nu+2\cdot2^\nu$.

β. Αν ν,κ,ρ θετικοί ακέραιοι με το ρ να μην είναι πολλαπλάσιο του 5, θεωρούμε τα πολυώνυμα $A(x)=3\cdot27^\nu x^3+\rho x^2+2018$ και $B(x)=\kappa x^3+(\kappa+2.2^\nu)x^2+2018$. Εξετάστε αν τα πολυώνυμα είναι ίσα.

Λύση

α. Προφανώς $\alpha=f(27)$, όπου $f(x)=3x^\nu+2\cdot2^\nu$.
Αλλά $f(2)=3\cdot2^\nu+2\cdot2^\nu=5\cdot2^\nu=\pi o\lambda 5$ και $f(x)=(x-2)\Pi(x)+f(2)=(x-2)\Pi(x)+\pi o\lambda5$ όπου $\Pi(x)$ το πηλίκο της διαίρεσης $f(x):(x-2)$, πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές. Έτσι έχουμε: $f(27)=25\Pi(27)+\pi o\lambda5=$

$$5\left[5\Pi(27)+2^\nu\right]\Rightarrow\alpha=\pi o\lambda5.$$

β. Αν δεχτούμε ότι τα πολυώνυμα είναι ίσα θα έχουμε:

$$\begin{cases}3\cdot27^\nu=\kappa\\ \rho=\kappa+2\cdot2^\nu\end{cases}\Rightarrow3\cdot27^\nu+2\cdot2^\nu=\rho\Rightarrow\alpha=\rho\Rightarrow\alpha\neq\pi o\lambda5$$

ενώ α=πολ5, άτοπο.

Άρα τα πολυώνυμα $A(x),B(x)$ δεν μπορεί να είναι ίσα.

Θέμα 5^o

Θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$P(x)=x^3+\frac{1}{4}(\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta)x^2-x+\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-3$$

και $Q(x)=P(2x+1)-3$. Αν το $\rho=\frac{1}{2}$ είναι ρίζα του $Q(x)$ τότε:

α. Δείξτε ότι $\alpha+\beta=\rho\pi,\rho\in Z$.

β. Να λύσετε την εξίσωση

$$5^{\ln x}+5^{-\ln x}=|\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)|+2\sigma\upsilon\nu\frac{2018(x-1)}{5}-1.$$

Λύση

α. Έχουμε $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0\Rightarrow P(2)-3=0\Rightarrow$

$$P(2)=3\Rightarrow8+\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha-5=3\Rightarrow$$

$\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha = 0 \Rightarrow \eta\mu(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha+\beta = \rho\pi,\ \rho \in Z$.

β. Η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού $(0,+\infty)$. Αλλά $\eta\mu(\alpha+\beta)=0 \Rightarrow \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\pm1 \Rightarrow |\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)|=1$, οπότε η εξίσωση ισοδύναμα γράφεται:

$$5^{\ln x} + \frac{1}{5^{\ln x}} = 2\sigma\upsilon\nu\frac{2018(x-1)}{5} \quad (1).$$

Αλλά $2\sigma\upsilon\nu\dfrac{2018(x-1)}{5} \le 2$ και

$5^{\ln x} + \dfrac{1}{5^{\ln x}} = \lambda + \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda} \ge \dfrac{2\lambda}{\lambda} = 2$, αφού $\lambda = 5^{\ln x} > 0$ με το ίσον μόνο λ=1, δηλαδή x=1. Τότε όμως $2\sigma\upsilon\nu\dfrac{2018(x-1)}{5} = 2\sigma\upsilon\nu 0 = 2$.

Άρα $(1) \Leftrightarrow x=1$

Θέμα 6ο

α. Έστω ένα πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές.Αν ο σταθερός όρος και το άθροισμα των συντελεστών του $f(x)$ είναι περιττοί αριθμοί,δείξτε ότι το πολυώνυμο δεν έχει ακέραια ρίζα.

β. Αν το πολυώνυμο

$$g(x) = \left(\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)x^4 + \alpha x^3 + 2x^2 + \alpha x + \eta\mu 2\theta - \frac{5}{3}$$

$,\alpha \in Z$ είναι 3ου βαθμού τότε:

i. Εξετάστε αν το $g(x)$ έχει ακέραιες ρίζες.

ii. Αν η διαίρεση $g(x):(x^2+1)$ δίνει υπόλοιπο $e^{2\kappa} - 2e^{\kappa} - 6$,να βρείτε την τιμή του $\kappa \in R$

Λύση

α. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι το $f(0)$ και το άθροισμα το συντελεστών του το $f(1)$

Υποθέτουμε ότι ο ακέραιος ρ είναι ρίζα του $f(x)$ τότε αφού οι συντελεστές του πολυωνύμου είναι ακέραιοι, ο ρ θα διαιρεί το $f(0)$ οπότε θα είναι περιττός αριθμός. Επιπλέον το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $f(x)$ δηλαδή $f(x)=(x-\rho)\Pi(x)$ όπου $\Pi(x)$ πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές, οπότε: $f(1)=(1-\rho)\Pi(1)=\pi o\lambda(\rho-1)$. Αλλά $f(1)$ περιττός$\Rightarrow$ $(\rho-1)$ περιττός $\Rightarrow$ρ άρτιος, άτοπο.

β. Αφού το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού θα έχουμε

$\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta - \dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0$ (1) και $\alpha \ne 0$

Αλλά

$(1) \Rightarrow \eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\eta\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\eta\mu^2\theta - 2\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = \dfrac{1}{3} \Rightarrow 1 - \eta\mu 2\theta = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$

$\eta\mu 2\theta = \dfrac{2}{3} \Rightarrow g(x) = \alpha x^3 + 2x^2 + \alpha x - 1$ με $\alpha \ne 0$.

i. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου είναι το -1 που είναι περιττός και το άθροισμα των συντελεστών του είναι $2\alpha+1$ με $\alpha \in Z^*$ δηλαδή περιττός. Σύμφωνα με το ερώτημα α,το πολυώνυμο δεν έχει ακέραιες ρίζες.

ii. Εκτελώντας τη διαίρεση βρίσκουμε υπόλοιπο -3 οπότε

$$e^{2\kappa} - 2e^{\kappa} - 6 = -3 \Rightarrow e^{2\kappa} - 2e^{\kappa} - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} e^{\kappa} = \omega \\ \omega^2 - 2\omega - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\kappa} = \omega \\ \omega = -1 \text{ ή } \omega = 3 \end{cases} \Rightarrow e^{\kappa} = -1 \text{ ή } e^{\kappa} = 3 \Rightarrow e^{\kappa} = 3 \Rightarrow \kappa = \ln 3$$

Θέμα 7ο

α. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x^{\ln y} + y^{\ln x} = 2e \\ \ln\sqrt{xy} = 1 \end{cases}$ **(Σ) .**

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1,+\infty)$ ισχύει $\ln(\ln x) < x$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{x - \ln(\ln x)},\ x > 1.$$

***i.* Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο Α του οποίου οι συντεταγμένες επαληθεύουν το (Σ).**

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$f^2(x) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{e^x}}{\ln x}\right) + \ln x \ (1).$$

Λύση

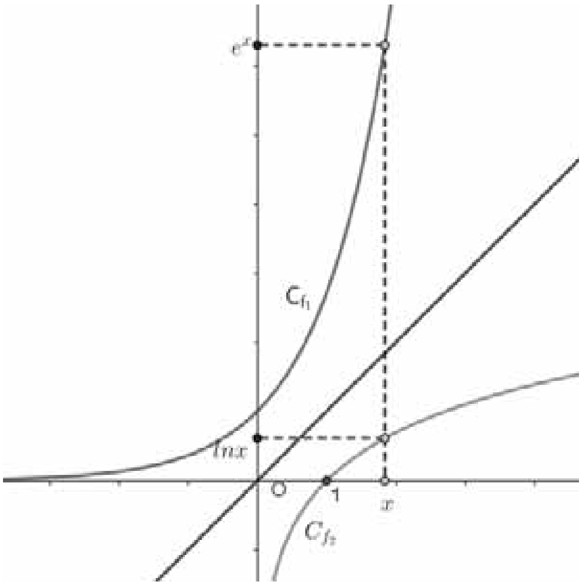
α. Το (Σ) ορίζεται μόνο όταν $x>0$ και $y>0$.

Για $x>0, y>0$ έχουμε $x^{\ln y} = y^{\ln x}$, αφού $\ln(x^{\ln y}) = \ln(y^{\ln x}) (= \ln y \cdot \ln x)$. Άρα η πρώτη εξίσωση του συστήματος ισοδύναμα γράφετε

$$2x^{\ln y} = 2e \Leftrightarrow \ln(x^{\ln y}) = \ln e \Leftrightarrow \ln x . \ln y = 1.$$

$\ln\sqrt{xy}=1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln(xy)=1\Leftrightarrow\ln x+\ln y=2$. Άρα $(\Sigma)\Leftrightarrow\begin{cases}\ln x.\ln y=1\\ \ln x+\ln y=2\end{cases}$. Οι $\ln x,\ln y$ είναι ρίζες της εξίσωσης $\omega^2-2\omega+1=0$ δηλαδή $\ln x=\ln y=1$, άρα $(\Sigma)\Leftrightarrow(x,y)=(e,e)$.

β. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x)=e^x, x\in R$ και $f_2(x)=\ln x, x>0$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία με εξίσωση $y=x$ (διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων).



Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f_1,f_2, για $x>1$ έχουμε $\ln x>0$ και $\ln x<e^x\Rightarrow\ln(\ln x)<\ln e^x\Rightarrow\ln(\ln x)<x$

γ. i. Έχουμε: $A(e,e)$ και

$$f(e)=\sqrt{e-\ln(\ln e)}=\sqrt{e-\ln 1}=\sqrt{e}\neq e.$$

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν διέρχεται από το A.

ii. Η εξίσωση έχει σύνολο ορισμού το $(1,+\infty)$ και

$(1)\Leftrightarrow x-\ln(\ln x)=2\ln\sqrt{e^x}-2\ln(\ln x)+\ln x\Leftrightarrow$

$x-\ln(\ln x)=x-2\ln(\ln x)+\ln x\Leftrightarrow$

$\ln(\ln x)=\ln x\Leftrightarrow\ln x=x$ (2).

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f_2(x)=\ln x$, βρίσκεται κάτω από την ευθεία με εξίσωση $y=x$ οπότε η εξίσωση (2) είναι αδύνατη. Άρα και η (1) είναι αδύνατη.

Θέμα 8ο

Η ποσότητα ενός ραδιενεργού υλικού ακολουθεί το νόμο της εκθετικής απόσβεσης.

Αν μετά από 10 χρόνια έχουν μείνει τα $\frac{2}{3}$ της αρχικής ποσότητας του ραδιενεργού υλικού τότε:

α. Δείξτε ότι η ποσότητα $Q(t)$ (σε γραμμάρια) του ραδιενεργού υλικού μετά από t χρόνια δίνεται από τον τύπο $Q(t)=Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}, t\geq 0$, όπου Q_0 η αρχική ποσότητα.

β. Μετά από 20 χρόνια έχουν μείνει 20 γραμμάρια του ραδιενεργού υλικού.

i. Να βρείτε την αρχική ποσότητα.

ii. Να βρείτε τον μέγιστο χρόνο για τον οποίο η ποσότητα του ραδιενεργού υλικού είναι τουλάχιστον το $\frac{1}{5}$ της αρχικής ποσότητας.

Λύση

α. Είναι $Q(t)=Q_0e^{c.t}, t\geq 0$ όπου c μία σταθερά.

Έχουμε $Q(10)=\frac{2}{3}Q_0\Rightarrow Q_0e^{10c}=\frac{2}{3}Q_0\Rightarrow e^{10c}=\frac{2}{3}$.

$$Q(t)=Q_0\left(e^{10c}\right)^{\frac{t}{10}}\Rightarrow Q(t)=Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}, t\geq 0.$$

β. i. Μετά από 20 χρόνια έχουμε $Q(20)=20\Rightarrow$

$Q_0\left(\frac{2}{3}\right)^2=20\Rightarrow Q_0.\frac{4}{9}=20\Rightarrow Q_0=45$ (Σε γραμμάρια).

ii. $Q(t)\geq\frac{1}{5}Q_0\Leftrightarrow 45\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}\geq 9\Leftrightarrow$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}\geq\frac{1}{5}\Leftrightarrow\ln\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{10}}\geq\ln\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{t}{10}\ln\frac{2}{3}\geq-\ln 5\overset{\ln\frac{2}{3}<0}{\Leftrightarrow}$$

$$\frac{t}{10}\leq\frac{-\ln 5}{\ln\frac{2}{3}}\Leftrightarrow t\leq\frac{10\ln 5}{-\ln\frac{2}{3}}\Leftrightarrow t\leq\frac{10\ln 5}{\ln\frac{3}{2}}.$$

Άρα $t_{max}=\frac{10\ln 5}{\ln\frac{3}{2}}$ (Σε χρόνια).

Ασκήσεις επανάληψης στη Γεωμετρία

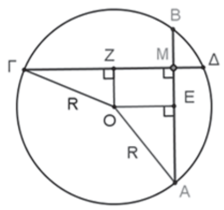
Γιώργος Α. Κουσινιώρης – Μαθηματικός, Διευθυντής του Γυμνασίου Γαστούνης Για το Παράρτημα Ν. Ηλείας της ΕΜΕ

Α. Ασκήσεις στις μετρικές σχέσεις

1. Σε κύκλο (Ο, R) δύο χορδές ΑΒ και ΓΔ τέμνονται κάθετα σε μεταβλητό σημείο Μ του κυκλικού δίσκου (Ο, R).
Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2$ είναι σταθερό.

Λύση: Το ότι το παραπάνω άθροισμα είναι σταθερό σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από τη θέση του σημείου Μ.

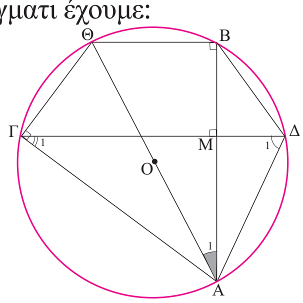
Κατ' αρχήν προσπαθούμε να εντοπίσουμε ποιο είναι το σταθερό αυτό άθροισμα. Το σκεπτικό σε αυτές τις περιπτώσεις είναι να θεωρήσουμε τα μεταβλητά αντικείμενα σε μία οριακή θέση ή σε κάποια θέση που παρουσιάζει ιδιαιτερότητες. Εν προκειμένω θεωρούμε το Μ στο κέντρο του κύκλου. Τότε οι χορδές ΑΒ και ΓΔ είναι διάμετροι οπότε $MA=MB=M\Gamma=M\Delta=R$ και συνεπώς είναι $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2=4R^2$ **(1)**



Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε σημείο Μ του κυκλικού δίσκου ισχύει η (1).

Αλλά η ακτίνα εκφράζεται με βάση το απόστημα και το μισό κάθε χορδής.

Φέρνουμε λοιπόν τα αποστήματα ΟΕ και ΟΖ των χορδών ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως, οπότε αρκεί να υπολογίσουμε τα ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ ως συνάρτηση των ΟΕ,ΕΑ και ΟΖ,ΖΓ. Πράγματι έχουμε:



$$MA^2=(ME+EA)^2=(OZ+EA)^2=$$
$$OZ^2+EA^2+2OZ\cdot EA \quad (2) \text{ και}$$
$$MB^2=(EB-EM)^2=(EA-OZ)^2=$$
$$OZ^2+EA^2-2OZ\cdot EA \quad (3)$$

Οι (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$MA^2+MB^2=2\left(OZ^2+EA^2\right) \quad \textbf{(4)}$$

Ομοίως έχουμε:

$$M\Gamma^2+M\Delta^2=2\left(OE^2+Z\Gamma^2\right) \quad \textbf{(5)}$$

Οι (4) και (5) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$$MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2=$$
$$=2\left[\left(OZ^2+Z\Gamma^2\right)+\left(OE^2+EA^2\right)\right]=2\left(R^2+R^2\right)=4R^2$$

Β΄ Τρόπος: Προφανώς $MA^2+MB^2+M\Gamma^2+M\Delta^2=$
$=\left(MA^2+M\Gamma^2\right)+\left(MB^2+M\Delta^2\right)=A\Gamma^2+B\Delta^2$.

Αν λοιπόν Θ το αντιδιαμετρικό του Α τότε $4R^2=A\Gamma^2+\Gamma\Theta^2$. Αρκεί λοιπόν ΔΒ=ΓΘ, ή $\overset{\frown}{\Delta B}=\overset{\frown}{\Gamma\Theta}$, ή ΘΒ//ΓΔ, που ισχύει αφού:
$\Theta\hat{B}A=90^\circ \Rightarrow \Theta B\perp AB \Rightarrow \Theta B//\Gamma\Delta$.

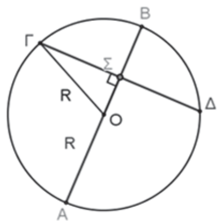
Παράπλευρα συμπεράσματα

1) $\Gamma\hat{M}B=\Delta\hat{M}B \Rightarrow \dfrac{\overset{\frown}{\Gamma\Theta}+\overset{\frown}{\Theta B}+\overset{\frown}{A\Delta}}{2}=\dfrac{\overset{\frown}{\Delta B}+\overset{\frown}{A\Gamma}}{2}\Rightarrow$
$\overset{\frown}{\Theta B}+\overset{\frown}{A\Delta}=\overset{\frown}{A\Gamma}\Rightarrow \hat{A}_1+\hat{\Gamma}_1=\hat{\Delta}_1$

2) Αν Κ,Λ τα μέσα των ΑΓ, ΒΔ αντιστοίχως τότε $MK^2+M\Lambda^2=2R^2$

3) Αν Σ το μέσον του ΚΛ τότε από θεώρημα διαμέσων βρίσκουμε $4M\Sigma^2+K\Lambda^2=4R^2$. Υπάρχει περίπτωση το Σ να ταυτίζεται με το Μ και $K\Lambda=R\sqrt{2}$;

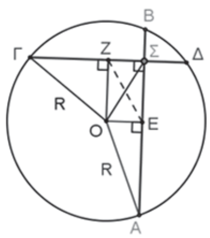
2. Δίνεται κύκλος (Ο, R) και σταθερό σημείο Σ στο εσωτερικό του. Από το Σ φέρνουμε δύο μεταβλητές χορδές ΑΒ και ΓΔ που τέμνονται κάθετα. Να δείξετε ότι το άθροισμα $AB^2+\Gamma\Delta^2$ είναι σταθερό.



Λύση: Έστω ΟΣ=δ. Το ότι το άθροισμα $AB^2+\Gamma\Delta^2$ είναι σταθερό σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από τη θέση των χορδών ΑΒ και ΓΔ. Αν θεωρήσουμε την ΑΒ διάμετρο, τότε είναι

$AB^2=(2R)^2=4R^2$ και

$\Gamma\Delta^2=(2\Gamma\Sigma)^2=4\,\Gamma\Sigma^2=\ldots=$
$=4R^2-4\,\delta^2$.



Επομένως $AB^2+\Gamma\Delta^2=$
$=8R^2-4\,\delta^2$ **(1).**

Θα δείξουμε λοιπόν ότι η (1) ισχύει ανεξάρτητα από τη θέση των χορδών ΑΒ και ΓΔ. Όπως προηγουμένως εκφράζουμε τις ΑΒ, ΓΔ ως συνάρτηση της ακτίνας και των αποστημάτων τους ΟΕ, ΟΖ Έχουμε:

$AB^2=(2AE)^2=4AE^2=$

$=4\left(OA^2-OE^2\right)=4R^2-4OE^2$ **(2)**

Ομοίως: $\Gamma\Delta^2=\left(2\Gamma Z\right)^2=4\Gamma Z^2=$

$=4\left(O\Gamma^2-OZ^2\right)=4R^2-4OZ^2$ **(3)**

Οι (2) και (3) με πρόσθεση κατά μέλη δίνουν:

$AB^2+\Gamma\Delta^2=8R^2-4\left(OE^2+OZ^2\right)=8R^2-4ZE^2=$ $8R^2-4\delta^2$, αφού το ΟΕΣΖ είναι ορθογώνιο, οπότε ΖΕ = ΟΣ=δ.

Β΄ Τρόπος: Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση και τη δύναμη του σημείου Σ ως προς τον κύκλο έχουμε:

$AB^2=\left(\Sigma A+\Sigma B\right)^2=\Sigma A^2+\Sigma B^2+2\Sigma A\cdot\Sigma B=$

$=\Sigma A^2+\Sigma B^2+2\left(R^2-\delta^2\right)$

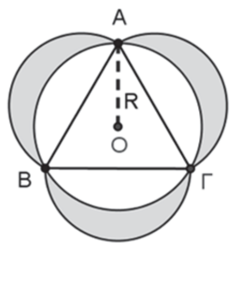
και $\Gamma\Delta^2=\left(\Sigma\Gamma+\Sigma\Delta\right)^2=\Sigma\Gamma^2+\Sigma\Delta^2+2\Sigma\Gamma\cdot\Sigma\Delta=$

$=\Sigma\Gamma^2+\Sigma\Delta^2+2\left(R^2-\delta^2\right)$. Άρα

$AB^2+\Gamma\Delta^2=4R^2+4\left(R^2-\delta^2\right)=8R^2-4\delta^2$.

3. Με διαμέτρους τις πλευρές εγγεγραμμένου σε δοσμένο κύκλο ισόπλευρου τριγώνου και έξω από το τρίγωνο γράφουμε τρία ημικύκλια. Να δειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι μεγαλύτερο από το εμβαδόν του τριγώνου κατά το 1/8 του εμβαδού του δοθέντος κύκλου.

Λύση: Ας είναι R η ακτίνα του κύκλου, τότε η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου είναι $\alpha=R\sqrt{3}$.



Αν είναι μ το εμβαδό των τριών μηνίσκων, τότε για το σκιασμένο εμβαδό ισχύει η σχέση:

$\mu=\left(AB\Gamma\right)+3E_{\eta\mu\iota\kappa}-E_{\kappa\upsilon\kappa}=$

$=\left(AB\Gamma\right)+3\cdot\frac{1}{2}\pi\frac{\alpha^2}{4}-\pi R^2=\left(AB\Gamma\right)+\frac{3\pi\cdot3R^2}{8}-\frac{8\pi R^2}{8}=$

$=\left(AB\Gamma\right)+\frac{9\pi R^2-8\pi R^2}{8}=\left(AB\Gamma\right)+\frac{\pi R^2}{8}$,

οπότε $\mu-\left(AB\Gamma\right)=\frac{1}{8}\pi R^2$.

Β. Ασκήσεις στη Στερεομετρία

1. Να αποδειχθεί ότι ένας κύκλος και ένα επίπεδο (Π) το οποίο δεν τον περιέχει έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Λύση: Έστω (p) το επίπεδο του κύκλου (O, R). Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

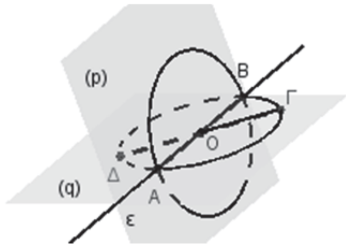
- $(p)//(\Pi)$. Στην περίπτωση αυτή τα επίπεδα δεν έχουν κοινά σημεία οπότε ο κύκλος (O, R) και το επίπεδο (Π) δεν έχουν κοινά σημεία.
- $(p)\not\parallel(\Pi)$. Τότε τα επίπεδα (p) και (Π) τέμνονται κατά ευθεία (ε).

Συνεπώς τα κοινά σημεία του κύκλου (O, R) και του επιπέδου (Π) είναι τόσα όσα και τα κοινά σημεία του κύκλου με την ευθεία (ε) με την οποία είναι συνεπίπεδος. Μια ευθεία και ένας κύκλος στο επίπεδο έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία, συνεπώς ο κύκλος (O, R) και το επίπεδο (Π) έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Άρα σε κάθε περίπτωση ο κύκλος (O, R) και το επίπεδο (Π) έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

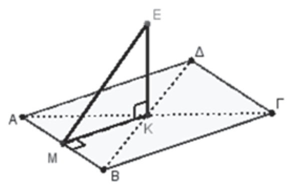
2. Να αποδειχθεί ότι δύο ίσοι ομόκεντροι κύκλοι που δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο έχουν μία μόνο κοινή διάμετρο.

Λύση: Επειδή οι κύκλοι έχουν κοινό κέντρο, έστω O, τα επίπεδά τους (p) και (q) έχουν κοινό σημείο το O οπότε έχουν κοινή μια ευθεία (ε) που περιέχει το O. Η ευθεία (ε) τέμνει και τους δύο κύκλους στα σημεία A και B οπότε έχουν κοινή διάμετρο την AB.



Αν οι κύκλοι είχαν και άλλη κοινή διάμετρο τη ΓΔ τότε τα Γ και Δ δεν ανήκουν στην (ε) αλλά ανήκουν στα επίπεδα (p) και (q), οπότε τα (p) και (q) έχουν κοινή την ευθεία (ε) και κοινό σημείο εκτός αυτής (το Γ ή το Δ), επομένως τα επίπεδα αυτά συμπίπτουν αφού μια ευθεία και ένα σημείο ορίζουν μόνο ένα επίπεδο.

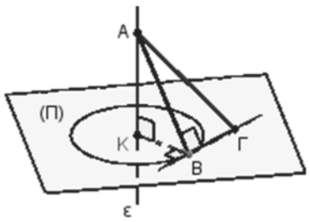
3. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και μια ευθεία (ε) κάθετη στο επίπεδό του στο κέντρο του Κ. Πάνω στην (ε) παίρνουμε τυχαίο σημείο Ε. Αν Μ είναι το μέσον της ΑΒ, να δείξετε ότι $ME\perp AB$.



Λύση: Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $KM\perp AB$ *(γιατί;)*. Έχουμε $EK\perp\left(AB\Gamma\Delta\right)$ και $KM\perp AB$ επομένως από το θεώρημα των τριών καθέτων προκύπτει ότι $ME\perp AB$.

4. Θεωρούμε ένα επίπεδο (Π) και ένα σημείο του Κ. Θεωρούμε ευθεία (ε) κάθετη στο (Π) στο σημείο Κ και πάνω σε αυτή παίρνουμε σημείο Α έτσι ώστε ΑΚ=10cm. Πάνω στο επίπεδο (Π) γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο Κ και ακτίνα 8cm. Φέρνουμε την εφαπτομένη του κύκλου σε ένα σημείο του Β και πάνω σε αυτή παίρνουμε τμήμα $B\Gamma=4\sqrt{2}$cm. Να υπολογιστεί το μήκος του τμήματος ΑΓ.

Λύση: Είναι $AK \perp (\Pi)$ και $KB \perp B\Gamma$ (γιατί;), οπότε από το θεώρημα τριών καθέτων είναι $AB \perp B\Gamma$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $AB^2 = AK^2 + KB^2 = 10^2 + 8^2 = 164$



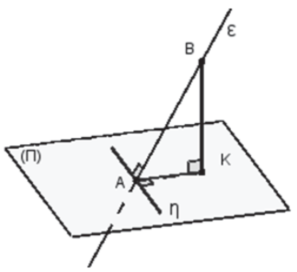
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ επίσης από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:

$$A\Gamma^2 = AB^2 + B\Gamma^2 = 164 + \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 196$$

Οπότε $A\Gamma = \sqrt{196} = 14(\Sigma \varepsilon \, cm)$.

5. Δίνεται ένα επίπεδο (Π) και μία ευθεία (ε) που δεν ανήκει στο (Π), δεν είναι κάθετη σ' αυτό και το τέμνει σε ένα σημείο Α. Να δείξετε ότι υπάρχει μία μόνο ευθεία του (Π) που είναι κάθετη με την ευθεία (ε).

Λύση: Πάνω στην ευθεία (ε) παίρνουμε σημείο Β διαφορετικό του Α και από το Β φέρνουμε τη ΒΚ κάθετη στο (Π). Θεωρούμε την ευθεία (η) του (Π) κάθετη στην ΑΚ στο σημείο Α. Επειδή $BK \perp (\Pi)$ και $AK \perp (\eta)$, από το θεώρημα τριών καθέτων προκύπτει ότι $AB \perp (\eta)$.

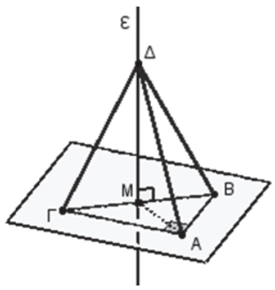


Η ευθεία (η) είναι η μοναδική κάθετη στην (ε) γιατί αν υπήρχε και δεύτερη ευθεία του (Π) κάθετη στην (ε), τότε η (ε) θα ήταν κάθετη στο επίπεδο (Π) ως κάθετη σε δύο ευθείες του (Π), πράγμα άτοπο.

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\widehat{A} = 90°$) και μια ευθεία (ε) κάθετη στο επίπεδό του στο μέσο Μ της υποτείνουσάς του. Να δείξετε ότι κάθε σημείο της (ε) ισαπέχει από τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση: Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η ΜΑ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα οπότε είναι $MA = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$.

Επειδή $(\varepsilon) \perp (A, B, \Gamma)$ θα είναι $(\varepsilon) \perp B\Gamma$ και $(\varepsilon) \perp AM$ *(γιατί;)* οπότε τα τρίγωνα ΔΜΑ, ΔΜΒ και ΔΜΓ είναι ορθογώνια στο Μ και προφανώς είναι ίσα αφού έχουν τη ΜΔ κοινή και ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ. Επομένως είναι ΔΑ = ΔΒ = ΔΓ.

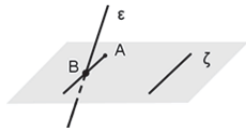


7. Από ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε κάποια από δύο ασύμβατες ευθείες (ε) και (ζ) να φέρετε ευθεία που τέμνει και τις δύο αυτές ασύμβατες ευθείες.

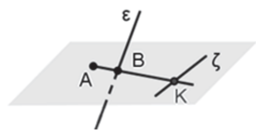
Λύση: Θεωρούμε το επίπεδο που ορίζει η μία από τις δύο ασύμβατες, έστω η (ζ) και το σημείο Α. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\varepsilon \not\parallel (A, \zeta)$.

Στην περίπτωση αυτή η (ε) τέμνει το επίπεδο σε ένα σημείο Β.

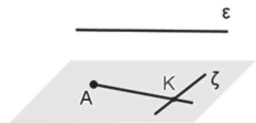


Αν είναι ΑΒ//ζ τότε η ζ είναι παράλληλη με το επίπεδο που ορίζουν η ΑΒ και η ε και επομένως οποιαδήποτε ευθεία του που διέρχεται από το Α δεν μπορεί να τέμνει τη ζ, αφού αυτή βρίσκεται σε επίπεδο παράλληλο με τη ζ.



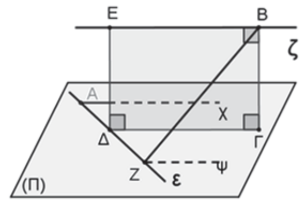
Αν η ευθεία ΑΒ δεν είναι παράλληλη με τη ζ τότε την τέμνει σε σημείο Κ. Η ΑΒ είναι προφανώς η ζητούμενη ευθεία.

- ε // (Α, ζ).



Στην περίπτωση αυτή οποιαδήποτε ευθεία διέρχεται από το Α και τέμνει τη ζ βρίσκεται στο επίπεδο (Α, ζ) που είναι παράλληλο με την (ε) και συνεπώς δεν τέμνει την ευθεία ε.

8. Δίνονται δύο ασύμβατες ευθείες (ε) και (ζ). Να δειχθεί ότι υπάρχει μία μόνο ευθεία που είναι κάθετη και στις δύο ασύμβατες ευθείες (ε) και (ζ).



Λύση: Θεωρούμε δύο ασύμβατες ευθείες (ε) και (ζ). Από ένα σημείο Α της μιας, έστω της ε φέρνουμε την $Ax \parallel \zeta$ και ονομάζουμε (Π) το επίπεδο που ορίζουν η (ε) και η Αχ. Τότε $\zeta \parallel Ax \Rightarrow \zeta \parallel (\Pi)$. Από ένα σημείο Β της (ζ) φέρνουμε $B\Gamma \perp (\Pi)$, οπότε είναι και $B\Gamma \perp \zeta$.

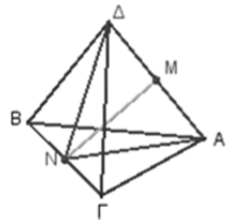
Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την Αχ που τέμνει την (ε) στο Δ. Από το Δ φέρνουμε την παράλληλη προς τη ΒΓ που, προφανώς, θα τμήσει τη (ζ) σε σημείο Ε. Είναι ΔΕ // ΒΓ και $B\Gamma \perp (\Pi)$

οπότε είναι $ΔΕ \perp (Π)$ και επομένως $ΔΕ \perp ε$. Επειδή $ΔΕ \,//\, ΒΓ$ και $ΒΓ \perp ζ$ θα είναι και $ΔΕ \perp ζ$. Συνεπώς η ΔΕ είναι η ζητούμενη κοινή κάθετος των δύο ασυμβάτων ευθειών (ε) και (ζ). Η ΔΕ είναι η μοναδική κοινή κάθετος των ασυμβάτων γιατί αν υπήρχε και άλλη για παράδειγμα η ΒΖ τότε θα ήταν $ΒΖ \perp ε$, $Ζ \not\equiv Γ$ (γιατί;). Αν $Ζψ \,//\, ζ$, τότε $ΒΖ \perp ζ \Rightarrow ΒΖ \perp Ζψ \Rightarrow ΒΖ \perp (Π)$ ως κάθετη στις ευθείες του ΖΨ, ε. Άρα $Ζ \equiv Γ$, άτοπο (Για να μην περιπλέξουμε το σχήμα θεωρήσαμε ως ένα σημείο της δεύτερης κοινής καθέτου το σημείο Β της ζ αντί τυχαίου σημείου Θ αυτής. Αυτό προφανώς δεν περιορίζει τη γενικότητα).

Συντομότερα:
$ΕΔ \perp (Π)$, $ΒΖ \perp (Π) \Rightarrow ΕΔ \,//\, ΒΖ \Rightarrow Ε, Δ, Β, Ζ$ συνεπίπεδα $\Rightarrow ΕΒ, ΔΖ$ συνεπίπεδες, άτοπο.

9. Σε στρεβλό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (*στρεβλό ονομάζεται το τετράπλευρο που οι κορυφές του δεν βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο*) οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα των διαγωνίων του ΑΔ και ΒΓ είναι η κοινή κάθετός τους.

Λύση: Έστω ΑΒΓΔ το δεδομένο στρεβλό τετράπλευρο με ΑΒ = ΓΔ και ΑΓ = ΒΔ. Έστω Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΔ και ΒΓ αντιστοίχως.



Θα δείξουμε ότι $ΜΝ \perp ΑΔ$ και $ΜΝ \perp ΒΓ$. Για να είναι $ΜΝ \perp ΑΔ$ αρκεί στο τρίγωνο ΑΝΔ η ΜΝ εκτός από διάμεσος να είναι και ύψος δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι ΝΑ = ΝΔ.

Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΓ είναι ίσα γιατί έχουν ίσες πλευρές (ΑΒ = ΓΔ, ΑΓ = ΒΔ και τη ΒΓ κοινή) θα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες διαμέσους ΝΑ = ΝΔ. Ομοίως αποδεικνύεται η καθετότητα της ΜΝ με τη ΒΓ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Στέργιος Τουρναβίτης

1. Με σκοπό την σχεδίαση ενός καραβιού, ένας μαθητής Δημοτικού σχολείου ζωγράφισε αρχικά ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις $ΑΒ = 5$ cm, $ΓΔ = 17$ cm.
Μπορείτε να τον βοηθήσετε να υπολογίσει το ύψος υ, τις μη παράλληλες πλευρές του y και τις διαγώνιες δ, αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν αυτού του τραπεζίου, καταλαμβάνει το $\frac{1}{4}$ της επιφάνειας ενός ορθογωνίου με διαστάσεις 22 cm και 16 cm;

Λύση: Για να υπολογίσουμε το ύψος υ του τραπεζίου εφόσον γνωρίζουμε τις βάσεις και ότι το εμβαδόν του Ε είναι το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΕΖΓΔ, έχουμε:

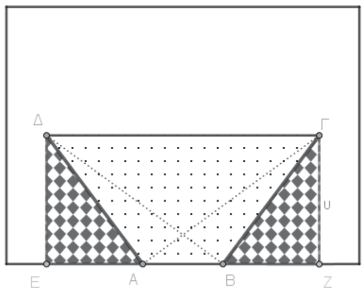
$$Ε = \frac{(ΑΒ + ΓΔ)\cdot υ}{2} = \frac{1}{4} ΕΖ \cdot ΕΔ$$

$$\Rightarrow \frac{(5+17)\cdot υ}{2} = \frac{1}{4} 22 \cdot 16 \Rightarrow ... \Rightarrow υ = 8 (Σε\ cm).$$

Αν από τα Γ και Δ φέρουμε τις κάθετες αποστάσεις στην απέναντι βάση ΑΒ, τα μήκη αυτά των καθέτων πλευρών, είναι ίσα μεταξύ τους, όπως είναι ίσα και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ (γιατί;).
Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων, μπορούμε να θέσουμε $ΑΕ = ΒΖ = z$ και $ΑΔ = ΒΓ = y$.

Εύκολα προκύπτει ότι:

$$2z + 5 = 17 \Rightarrow z = 6 \ (Σε\ cm)$$



Εφαρμόζουμε το Π.Θ. σ' ένα από αυτά κι' έχουμε: $y = \sqrt{8^2 + 6^2} = ... = 10 \ (Σε\ cm)$ είναι τα ίσα μήκη των μη παράλληλων πλευρών.
Για να βρούμε τις διαγώνιες δ, εφαρμόζουμε το Π.Θ. σ' ένα από τα επίσης ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΒ, ΓΖΑ (γιατί;) κι' έχουμε:

$$δ = \sqrt{8^2 + 11^2} = ... \cong 13.6 \ (Σε\ cm).$$

2. Ένα κανονικό πολύγωνο με άγνωστο αριθμό πλευρών ν, έχει εμβαδόν $Ε_ν = 8$. Η γωνία $φ_μ$ του κανονικού πολυγώνου που έχει τετραπλάσιο αριθμό πλευρών μ σε σχέση με αυτό $(μ = 4 \cdot ν)$, είναι: $\hat{φ}_μ = 157^0\ 30'$. Να υπολογισθούν:

2α) Ο αριθμός των πλευρών ν του κανονικού ν-γώνου,

2β) Η πλευρά του $λ_ν$,

2γ) Το απόστημά του α_ν και,

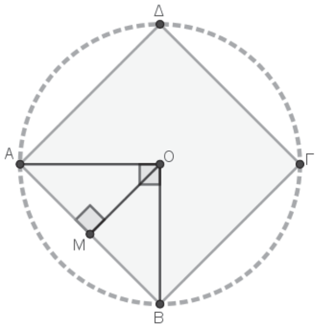
2δ) Η περίμετρός του P_ν

Λύση: 2α) Για την γωνία $\varphi_\mu = 157^0\ 30'$ του κανονικού μ-γώνου, ισχύει:

$$\varphi_\mu = 157^0\ 30' = 180^0 - \frac{360^0}{\mu} \Rightarrow$$

$$157.5^0 = 180^0 - \frac{360^0}{\mu} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \mu = 16.$$

Επειδή $\nu = \frac{1}{4}\mu$, **ν=4**.



2β) Το εμβαδόν E_4 του τετραγώνου δίνεται από τον τύπο: $E_4 = 4 \cdot \frac{1}{2}\lambda_4 \cdot \alpha_4 = 8 \Rightarrow \lambda_4 \cdot \alpha_4 = 4$ (1)

Γνωρίζουμε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου **R** η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Αντικαθιστούμε στην (1) την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4, κι' έχουμε: $R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = 4 \Rightarrow$

$\ldots \Rightarrow R = 2$. Επομένως: $\lambda_4 = 2\sqrt{2}$,

2γ) $\alpha_4 = \sqrt{2}$ και, **2δ)** $P_4 = 8\sqrt{2}$.

3. Η πλευρά και το απόστημα ενός κανονικού πολυγώνου που είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο έχουν μέτρα $6\sqrt{3}$ και 9 αντιστοίχως.

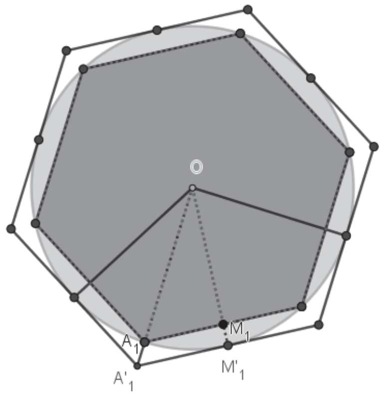
Να βρεθούν:

3α) Η πλευρά, το απόστημα, του κανονικού πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο και έχει τον ίδιο αριθμό πλευρών με αυτό.

3β) Το συνολικό εμβαδό των κυκλικών τμημάτων που είναι μεταξύ του κύκλου και του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου.

Λύση: 3α) Γνωρίζουμε ότι δύο κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια.

Αν π.χ. κατασκευάσουμε σ' έναν κύκλο ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σ' αυτό και στα μέσα των τόξων του φέρουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο και ενώσουμε τα σημεία τομής αυτών των εφαπτομένων, θα δημιουργήσουμε κατ' αυτό τον τρόπο ένα κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Μ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται και το περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο, όταν έχουμε κατασκευάσει το αντίστοιχο ομόλογό του εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Γι' αυτό στη συνέχεια αναφερόμαστε στο τυχαίο κανονικό ν-γωνο όπου ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3.



Παρατηρούμε ότι το απόστημα α'_ν του περιγεγραμμένου κανονικού ν-γώνου, ταυτίζεται με την ακτίνα **R** του περιγεγραμμένου κύκλου στο κανονικό ν-γωνο που είναι εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Ονομάζουμε λ_ν, α_ν την πλευρά και το απόστημα του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου και λ'_ν, α'_ν την πλευρά και το απόστημα του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου, αντίστοιχα. Από την σχέση ομοιότητας των δύο ορθογωνίων τριγώνων A_1M_1O, $A'_1M'_1O$, έχουμε: $\frac{\lambda_\nu}{\lambda'_\nu} = \frac{\alpha_\nu}{R} \Rightarrow \frac{\lambda_\nu}{6\sqrt{3}} = \frac{\alpha_\nu}{9} \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{\lambda_\nu\sqrt{3}}{2}$ **(1)**

Επίσης από την σχέση που συνδέει την πλευρά και το απόστημα, ισχύει:

$$\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = 9^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\lambda_\nu^2}{4} + \left(\frac{\lambda_\nu\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow$$

$\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \left(\frac{\lambda_\nu\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_\nu = 9$ **(2)** και

$\alpha_\nu \overset{(1)}{=} \frac{9\sqrt{3}}{2}$. Επειδή όπως είπαμε: $\alpha'_\nu = R = 9 \overset{(2)}{\Rightarrow}$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_\nu = R = 9$, συμπεραίνουμε ότι **ν=6**. (γιατί;)

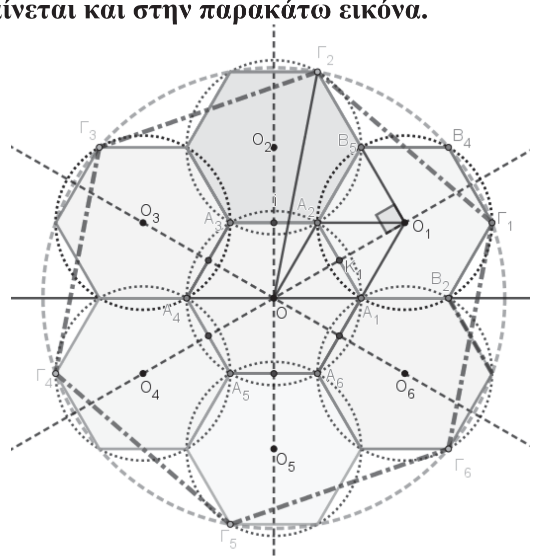
3β) Το εμβαδόν του καθενός από τα ίσα κυκλικά τμήματα έστω **τ**, προκύπτει αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\frac{\pi R^2}{6}$, αφαιρέσουμε το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς **R**.

Άρα: $\tau = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \tau = \frac{R^2}{12} \cdot \left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$.

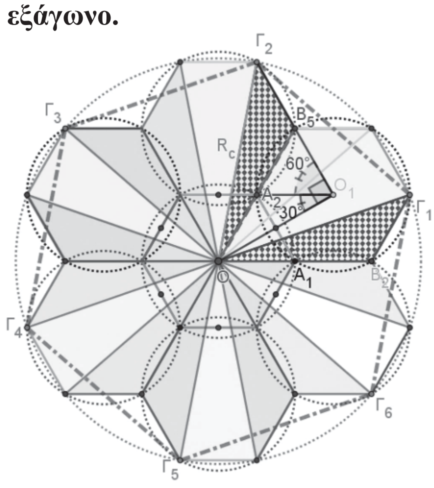
Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$6\tau=\frac{R^2}{2}\cdot\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)\Rightarrow 6\tau=\frac{81}{2}\cdot\left(2\pi-3\sqrt{3}\right)$$

4. Γύρω από τις πλευρές ενός κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το O(0,0) και ακτίνας R=1, «χτίζουμε» άλλα 6 κανονικά εξάγωνα ίσα προς αυτό. Η κατασκευή π.χ. του $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$ γίνεται όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.



Αρχικά φέρουμε την κάθετη στην A_1A_2, βρίσκουμε το συμμετρικό O_1 του O ως προς αυτή και εγγράφουμε στον κύκλο (O_1,O_1A_1) ένα κανονικό εξάγωνο.



Να αποδείξετε ότι:

4α) Τα 6 κανονικά εξάγωνα που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο, είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ίσης ακτίνας R=1, με αυτή του αρχικού κεντρικού εξαγώνου.

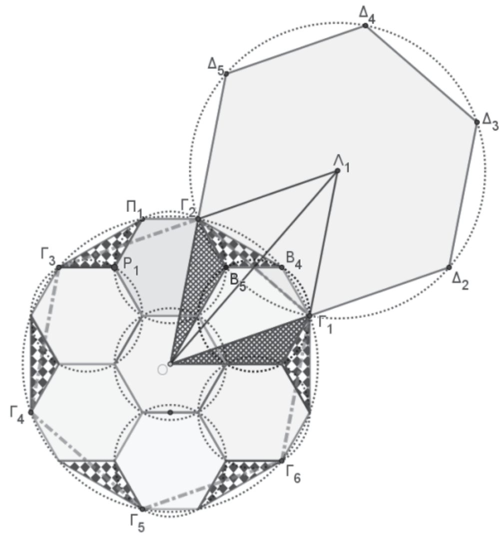
4β) Τα σημεία O, A_2, B_5 είναι συνευθειακά.

4γ) Αν ενώσουμε τα σημεία $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$ που είναι ανά ένα κορυφές των προηγούμενων κανονικών εξαγώνων, δημιουργείται ένα εξάγωνο. Αφού αποδείξετε ότι είναι κανονικό, να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R=1, την ακτίνα του R_C.

4δ) Τέλος, αν φέρουμε την κάθετη στην $\Gamma_1\Gamma_2$ και βρούμε το συμμετρικό Λ_1 του O ως προς αυτή, μπορούμε να αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο όπως στο 4α) ερώτημα ότι το εξάγωνο $\Gamma_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4\Delta_5\Gamma_2$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(\Lambda_1,\Lambda_1\Gamma_1)$, είναι κανονικό.

4δ$_i$) Με τι ισούται η απόσταση $d=O\Lambda_1$ των κέντρων των δύο κανονικών εξαγώνων;

4δ$_{ii}$) Να αποδείξετε ότι $d=\sqrt{3}\cdot R_C$.



Λύση: 4α) Το τετράπλευρο $OA_1O_1A_2$ είναι ρόμβος γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα. Επομένως το σημείο O_1 (το συμμετρικό του O ως προς την A_1A_2), θα ισαπέχει από τα σημεία A_1 και A_2, ίδια απόσταση με την πλευρά $\lambda_6=\mathbf{R}=\mathbf{1}$, του αρχικού (κεντρικού) κανονικού εξαγώνου. Εφόσον εγγράφουμε στον κύκλο (O_1,O_1A_1) το κανονικό εξάγωνο $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$, η τελευταία κορυφή του (η A_2) θα συμπίπτει με το άλλο άκρο του τμήματος A_1A_2 που είναι ταυτόχρονα και πλευρά του αρχικού εξαγώνου με μήκος **R=1**, όσο και η ακτίνα των δύο κύκλων. Καθένα από αυτά τα τόξα των διαδοχικών κορυφών του $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$ είναι 60^0. Όμοια αποδεικνύεται ότι και τα άλλα 5 κανονικά εξάγωνα με τον τρόπο που κατασκευάζονται είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνας $\mathbf{R}=\mathbf{1}$.

4β) Οι γωνίες $B_5\hat{A}_2O_1$, $O_1\hat{A}_2A_1$, $A_1\hat{A}_2O$ είναι γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων (ποιων;) και καθεμιά τους είναι 60^0. Επομένως το άθροισμά τους θα είναι η ευθεία γωνία $B_5\hat{A}_2O_1=180^0$.

4γ) Το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τα τμήματα OA_2 και A_2B_5 ως ευρισκόμενα στην ίδια ευθεία και με άθροισμα **2R=2**, που ταυτίζεται με το μήκος του OB_5. Τα σκιασμένα με μωβ τετραγωνίδια τρίγωνα, έχουν: δύο πλευρές ίσες (με μήκη **2**, **1**) και την περιεχόμενη γωνία ίση με $\varphi_6 = 120^0$. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά το σχήμα υπάρχουν άλλα 10 ίσα τρίγωνα που έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία με αυτά. Στην πραγματικότητα υπάρχουν 6 ζευγάρια (λαμβανομένων διαδοχικά με κοινή πλευρά π.χ. την OB_5) ίσα αμβλυγώνια και ανάμεσα σ' αυτά τα ίσα ζευγάρια, υπάρχουν άλλα 6 ισοσκελή και ίσα μεταξύ τους τρίγωνα (μπορείτε να τα εντοπίσετε στο σχήμα;).

Είναι προφανές ότι από τις παραπάνω ισότητες ότι το O ισαπέχει από τα σημεία $\Gamma_1,\Gamma_2,\Gamma_3,\Gamma_4,\Gamma_5,\Gamma_6$, άρα αυτά τα 6 σημεία βρίσκονται πάνω σε κύκλο.

Μένει να αποδείξουμε ότι αυτά τα σημεία, χωρίζουν τον κύκλο σε **6** ίσα τόξα. Αν παρατηρήσουμε τα γραμμοσκιασμένα με την σκίαση της σκακέρας αμβλυγώνια και ισοσκελή τρίγωνα στο τελευταίο σχημα της άσκησης, αυτά έχουν από 2 πλευρές ίσες με την ακτίνα **R=1** και τις περιεχόμενες γωνίες από $\mathbf{120^0}$ (γιατί;). Άρα κάθε τόξο κάθε πλευράς του εξαγώνου $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$ είναι το άθροισμα δύο ίσων τόξων, αφού στο καθένα από αυτά αντιστοιχούν δύο ίσες χορδές. Π.χ. στην πλευρά-χορδή του κύκλου $\Gamma_1\Gamma_2$, αντιστοιχεί το τόξο της χορδής Γ_1B_4 συν το τόξο της χορδής $B_4\Gamma_2$. Και για τις άλλες 5 πλευρές το ίδιο ισχύει. Τα τόξα είναι μεταξύ τους ίσα, το ίδιο και οι πλευρές του εξαγώνου γιατί σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα και αντιστρόφως. Κάθε τώρα εγγεγραμμένη γωνία αυτού του εξαγώνου, βαίνει σε **6-2** τόξα των $\mathbf{60^0}$. Επομένως όλες οι γωνίες είναι ίσες με $\varphi_6 = 120^0$.

Το εξάγωνο $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$ είναι κανονικό γιατί έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες.

Όσον αφορά τον υπολογισμό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του εξαγώνου (ή της ακτίνας της συστάδας όπως λέγεται στην τεχνολογία των κυψελωτών δικτύων) μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

1ος τρόπος: Εφαρμόζουμε το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο (γιατί;) $OO_1\Gamma_2$ κι' έχουμε:

$$R_c^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 7 \Rightarrow R_c = \sqrt{7}.$$

2ος τρόπος: Σύμφωνα με το Θεώρημα των συνημιτόνων σ' ένα από τα 12 ίσα αμβλυγώνια τρίγωνα π.χ. το $OB_5\Gamma_2$ ισχύει:

$$R_c^2 = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot \text{συν}(120^0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_c = \sqrt{7}$$

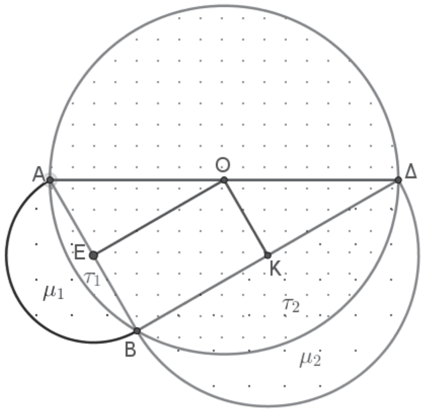
4δi)& 4δii) Η απόσταση **d** είναι ίση με το διπλάσιο του ύψους ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς R_c.

Επομένως $d = 2\cdot\dfrac{R_c\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cdot R_c \overset{4\gamma)}{\Rightarrow} d = \sqrt{21}$

5. Σε κύκλο με διάμετρο την ΑΔ γράφουμε δύο ημικύκλια εκτός του κύκλου. Το ένα έχει διάμετρο τη χορδή ΒΔ τόξου 120^0 και το άλλο διάμετρο την ΑΒ, όπως δείχνει η παρακάτω εικόνα.

5α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ή το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΕΒΚΟ όπου Κ και Ε τα μέσα των χορδών ΑΒ, ΒΔ αντίστοιχα.

5β) Αν ΒΔ = $5\sqrt{3}$ m να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων και των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων, είναι: $E = \mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = 12.5\pi$.



Λύση: 5α) Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο **ΑΒΔ** είναι ορθογώνιο στο **Β**. Επίσης η γωνία του **Δ** είναι $\mathbf{30^0}$. Άρα $AB = R$, όπου **R** η ακτίνα του κύκλου. (γιατί;) Όπως γνωρίζουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου **ΑΒΔ** συναρτήσει της ακτίνας **R**, αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς του **ΒΔ**, αφού αυτό ισούται με το ημιγινόμενο των καθέτων πλευρών του. Η **ΒΔ** μπορεί να υπολογιστεί είτε από το $\text{συν}(30^0)$, είτε από το **Π.Θ.** είτε ακόμη από το ότι είναι κατευθείαν $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ αφού αντιστοιχεί σ' αυτήν επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}_3 = 120^0$.

Επομένως: $E = (AB\Delta) = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών κάθε μηνίσκου μαζί με το αντίστοιχο κυκλικό τμήμα, δίνει το εμβαδόν του ημικυκλίου στο οποίο περιέχονται. Αυτό εκφράζεται από τις δύο σχέσεις:

$$\mu_1+\tau_1=\pi\cdot\frac{R^2}{8}\ \ (1)$$

$$\mu_2+\tau_2=3\pi\cdot\frac{R^2}{8}\ \ (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1), (2), έχουμε:

$\mu_1+\tau_1+\mu_2+\tau_2=\frac{1}{2}\pi R^2\ (3)$, το οποίο ταυτίζεται με το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων και το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΒΔ** δίνει επίσης το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΔ. Οπότε έχουμε:

$$\tau_1+\tau_2+(AB\Delta)=\frac{1}{2}\pi R^2\ \ (4)$$

$$\mu_1+\cancel{\tau_1}+\mu_2+\cancel{\tau_2}=\cancel{\tau_1}+\cancel{\tau_2}+(AB\Delta)\ \ (5)$$

Η σχέση (5) αποδεικνύει το 1ο σκέλος του ερωτήματος. Για το 2ο σκέλος αρκεί να αναλύσουμε το εμβαδόν του **ΑΒΔ** που βρήκαμε προηγουμένως, όπως παρακάτω:

$$E=(AB\Delta)=\frac{R^2\sqrt{3}}{2}=2\cdot\frac{R\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{R}{2}=2\cdot(EBKO)$$

5β) Σύμφωνα με την εκφώνηση **ΒΔ** = $5\sqrt{3}$ **m.** Από το προηγούμενο ερώτημα είναι ακόμη και, **ΒΔ** = $R\sqrt{3}$ **m**. Από αυτές τις δύο ισότητες συμπεραίνουμε ότι **R** = **5m**.

Όπως φαίνεται και από την ισότητα **(3)** του προηγούμενου ερωτήματος, $\mu_1+\tau_1+\mu_2+\tau_2=\frac{1}{2}\pi R^2\ (3)$

Αντικαθιστούμε στο 2ο μέλος της ισότητας αυτής το R=5 κι' έχουμε: $\mu_1+\tau_1+\mu_2+\tau_2=12.5\pi$

6. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ, τέμνονται έτσι ώστε η διάκεντρος ΟΚ να είναι ίση με την κοινή χορδή ΑΒ.

6α) Να δικαιολογήσετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΒΚ είναι τετράγωνο.

Περιμετρικά αυτού του τετραγώνου κατασκευάζουμε άλλα 4 ίσα τετράγωνα, τα ΑΕΙΟ, ΟΒΣΤ, ΚΒΠΡ και ΚΑΛΜ.

6β) Να αποδείξετε ότι τα 6 μικτόγραμμα τρίγωνα ΑΛΜ, ΙΕΑ, ΒΣΤ, ΒΠΡ, ΑΚΒ, ΑΟΒ έχουν ίσα εμβαδά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του καθενός από αυτά, συναρτήσει της ακτίνας ρ των δύο ίσων κύκλων.

Αν γνωρίζουμε ότι το συνολικό εμβαδόν των 6 μικτόγραμμων τριγώνων είναι: $96-24\pi$, να υπολογισθούν:

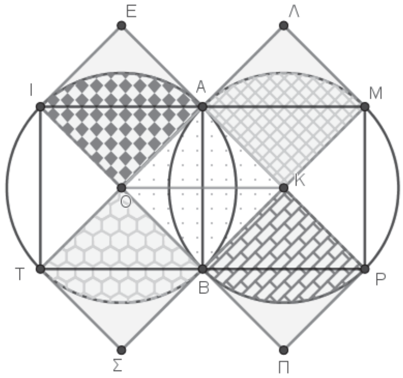
6γ) Η ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων και,

7δ) το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

Λύση: 6α) Το τετράπλευρο **ΑΟΒΚ** είναι τετράγωνο γιατί οι διαγώνιοί του είναι και μεσοκάθετοι η μία της άλλης και επιπλέον είναι και ίσες.

6β) Το εμβαδόν καθενός από τα 6 μικτόγραμμα τρίγωνα, έστω **Ε**, προκύπτει αν από ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με **ρ**, αφαρέσουμε ένα κυκλικό τμήμα εμβαδού έστω **τ**.

Είναι προφανές ότι τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους επειδή έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες με την ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων. Καθένα από τα κυκλικά τμήματα εμβαδού **τ**, προκύπτει αν από ένα τεταρτοκύκλιο (κυκλικός τομέας επίκεντρης γωνίας 90^0) και ακτίνας **ρ**, αφαιρέσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με **ρ**.



Όλα αυτά συνοψίζονται στις δύο ισότητες:

$$E=\frac{1}{2}\rho^2-\tau\ (1),\ \ \tau=\frac{\pi\rho^2}{4}-\frac{1}{2}\rho^2\ (2)$$

Από $(1)\wedge(2)\ \Rightarrow\ E=\frac{\rho^2}{4}\cdot(4-\pi)\ (3)$

6γ) Από την ισότητα (3) και την εκφώνηση έχουμε: $6\cdot\frac{\rho^2}{4}\cdot(4-\pi)=96-24\pi\Rightarrow$

$$\Rightarrow\cancel{6}\cdot\frac{\rho^2}{4}\cdot(4-\pi)=\cancel{6}\cdot(16-4\pi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\rho^2}{4}\cdot(4-\pi)=4\cdot(4-\pi)\Rightarrow\rho=4$$

6δ) Η τομή των δύο ίσων κύκλων εμβαδού έστω **κ**, αποτελείται από δύο ίσα κυκλικά τμήματα εμβαδού **τ**. Όπως προκύπτει και από την **(2)** αν αντικαταστήσουμε όπου **ρ=4**, έχουμε:

$$\kappa=2\cdot\left(\frac{\pi\cdot4^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot4^2\right)\ \Rightarrow\kappa=2\cdot\left(\frac{\pi\cdot4^2}{4}-\frac{1}{2}\cdot4^2\right)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\kappa=2\cdot(4\pi-8)\ \Rightarrow\kappa=8\cdot(\pi-2)$$

Βιβλιογραφία:

Για την άσκηση 4, χρησιμοποιήθηκαν οι Σημειώσεις του κ. Νικολάου Τσελίκα του μαθήματος Ευρυζωνικά Δίκτυα, στο ΜΠΣ «Εφαρμοσμένα Πληροφοριακά Συστήματα» του ΑΕΙ Πειραιά Τ.Τ.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επαναληπτικές ασκήσεις Κατεύθυνσης

Σπύρος Γιαννακόπουλος

Θέμα 1ο: Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$. Αν $|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{2}$, $|\vec{\beta}|=\frac{2}{3}$ και το μέτρο $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ είναι άρτιος αριθμός, τότε:

α. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=\left(\vec{\alpha}.\vec{\beta},\sqrt{22}\right)$, $\vec{v}=\left(9,\frac{5}{3|\vec{\alpha}|}\right)$ είναι κάθετα.

β. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy θέτουμε $\overrightarrow{OA}=\vec{u}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{v}$, όπου $\vec{u},\vec{v}$ τα διανύσματα του ερωτήματος α. Να βρείτε το διαφορετικό του O σημείο τομής του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου OAB με τον άξονα x'x.

Λύση: α. Έχουμε $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\left|(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})-3\vec{\beta}\right|$ με $3|\vec{\beta}|=2>\sqrt{2}=|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|$, οπότε

$$3|\vec{\beta}|-|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\le 3|\vec{\beta}|+|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|\Rightarrow$$

$$2-\sqrt{2}\le|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\le 2+\sqrt{2}\Rightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\in\{1,2,3\}\Rightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2,$$

αφού το $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$ είναι άρτιος. Εξάλλου

$$|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|=\sqrt{2}\Rightarrow|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}|^2=2\Rightarrow(\vec{\alpha}+2\vec{\beta})^2=2\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^{\,2}+4(\vec{\alpha}.\vec{\beta})+4\vec{\beta}^{\,2}=2\Rightarrow\vec{\alpha}^{\,2}+4(\vec{\alpha}.\vec{\beta})+\frac{16}{9}=2\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^{\,2}+4(\vec{\alpha}.\vec{\beta})=\frac{2}{9}\ (1)\ \text{και}$$

$$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=2\Rightarrow|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=4\Rightarrow(\vec{\alpha}-\vec{\beta})^2=4\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^{\,2}-2(\vec{\alpha}.\vec{\beta})+\vec{\beta}^{\,2}=4\Rightarrow\vec{\alpha}^{\,2}-2(\vec{\alpha}.\vec{\beta})+\frac{4}{9}=4\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^{\,2}-2(\vec{\alpha}.\vec{\beta})=\frac{32}{9}\ (2).$$

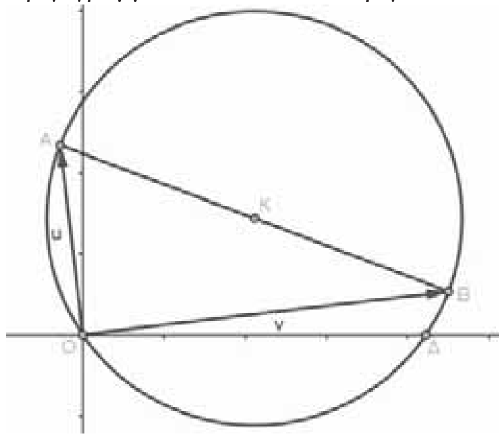
Λύνουμε το σύστημα (1),(2) και βρίσκουμε:

$$|\vec{\alpha}|=\frac{\sqrt{22}}{3}\ \text{και}\ \vec{\alpha}.\vec{\beta}=-\frac{5}{9}.$$

Άρα $\vec{u}=\left(-\frac{5}{9},\sqrt{22}\right)$, $\vec{v}=\left(9,\frac{5}{\sqrt{22}}\right)$ και

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(-\frac{5}{9}\right)9+\sqrt{22}\,\frac{5}{\sqrt{22}}=-5+5=0\Rightarrow\vec{u}\perp\vec{v}.$$

β. Αφού $\vec{u}\perp\vec{v}$ το τρίγωνο OAB είναι ορθογώνιο με $\hat{AOB}=90^0$. Άρα η πλευρά AB είναι διάμετρος του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.



Σχ.1

Έστω K το κέντρο του κύκλου και Δ το δεύτερο σημείο τομής του κύκλου με τον άξονα x'x.

Είναι $A\left(-\frac{5}{9},\sqrt{22}\right)$ και $B\left(9,\frac{5}{\sqrt{22}}\right)$.

Αν M το μέσο του OΔ, τότε $KM\perp x'x\Rightarrow$

$$x_M=x_K=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{-\frac{5}{9}+9}{2}=\frac{38}{9},\quad \text{οπότε}$$

$$x_\Delta=2x_M=\frac{76}{9}.\ \text{Άρα}\ \Delta\left(\frac{76}{9},0\right).$$

Θέμα 2ο: Θεωρούμε τις ευθείες με εξίσωση:

$$\mathbf{(m^2+m+1)x-(2\lambda m^2-1)y+(\kappa^2-\rho^2)m^2-1=0,}$$

$m\in R$, $\kappa,\lambda,\rho\in Z$ και $\lambda>0$.

Αν οι παραπάνω ευθείες διέρχονται για κάθε $m\in R$ από το ίδιο σημείο M, δείξτε ότι:

α. $\kappa^2>\lambda$ και M(0,1).

β. Στον κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $r=\sqrt{\kappa^2-\lambda}$ υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο με ακέραιες συντεταγμένες.

Λύση: Αφού οι ευθείες διέρχονται από το σημείο $M(x_0,y_0)$ θα έχουμε:

$$(m^2+m+1)x_0-(2\lambda m^2-1)y_0+(\kappa^2-\rho^2)m^2-1=0,$$

για κάθε $m\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow(x_0-2\lambda y_0+\kappa^2-\rho^2)m^2+x_0m+x_0+y_0-1=0$$

για κάθε $m\in\mathbb{R}\Rightarrow$

$$\begin{cases}x_0-2\lambda y_0+\kappa^2-\rho^2=0\\ x_0=0\\ x_0+y_0-1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\kappa^2-\rho^2=2\lambda\\ x_0=0\\ y_0=1\end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \kappa^2 = \rho^2 + 2\lambda \geq 2\lambda > \lambda$ και $M(0,1)$.

Έχουμε: $\kappa^2 - \lambda = \kappa^2 - \frac{\kappa^2-\rho^2}{2} = \frac{\kappa^2+\rho^2}{2} =$

$= \frac{(\kappa-\rho)^2 + (\kappa+\rho)^2}{4} = \left(\frac{\kappa-\rho}{2}\right)^2 + \left(\frac{\kappa+\rho}{2}\right)^2 = t_1^2 + t_2^2$

όπου $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, αφού οι αριθμοί κ-ρ, κ+ρ είναι άρτιοι καθ' όσον έχουν και άθροισμα άρτιο και γινόμενο άρτιο. Πράγματι $(\kappa-\rho)+(\kappa+\rho)=2\kappa$, $(\kappa-\rho)(\kappa+\rho) = \kappa^2 - \rho^2 = 2\lambda$. Η εξίσωση του κύκλου λοιπόν $x^2+y^2 = \kappa^2 - \lambda$ επαληθεύεται για $x = t_1$, $y = t_2$

Θέμα 3ο : Δίνονται οι ευθείες ε_1: $x = -\frac{3}{2}$ και ε_2: $x = -1$.

α. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της μεσοπαραλλήλου ευθείας ε των ε_1 και ε_2.

ii. Την εξίσωση της παραβολής C που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων και διευθετούσα την ευθεία ε του προηγούμενου ερωτήματος.

β. Θεωρούμε την εξίσωση

$$2x^2 + 2y^2 + (\lambda-1)x - \frac{1}{2} = 0 \quad (1),\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Δείξετε ότι η (1) είναι εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Επιπλέον να βρείτε την εξίσωση εκείνου του κύκλου που εκφράζεται από την (1) και το κέντρο του είναι η εστία της παραβολής C του ερωτήματος α,ii.

Λύση: α. i. Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες στον άξονα $y'y$ και τα κοινά τους σημεία με τον άξονα $x'x$ είναι $A(-\frac{3}{2},0)$ και $B(-1,0)$ αντίστοιχα. Άρα η μεσοπαράλληλος ευθεία ε των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ θα είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$, από το μέσο M του AB έχουμε:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-\frac{3}{2}-1}{2} = -\frac{5}{4}.\ \text{Άρα}\ \varepsilon: x = -\frac{5}{4}.$$

ii. Η εξίσωση της παραβολής C είναι $y^2 = 2px$. Η διευθετούσα δ της C έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ και λόγω της υπόθεσης $-\frac{p}{2} = -\frac{5}{4} \Rightarrow p = \frac{5}{2}$. Άρα $C: y^2 = 5x$.

β. $(1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + \frac{\lambda-1}{2}x - \frac{1}{4} = 0$ (2).

$A = \frac{\lambda-1}{2}, B = 0, \Gamma = -\frac{1}{4}$.

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = \frac{(\lambda-1)^2}{4} + 1 > 0$ για κάθε $\lambda \in R$.

Άρα η (2) οπότε και η (1) είναι εξίσωση κύκλου για κάθε $\lambda \in R$.

Τα κέντρα των κύκλων με εξίσωση την (1) είναι $K_\lambda\left(-\frac{\lambda-1}{4}, 0\right)$.

Η παραβολή C του ερωτήματος α.(ii) έχει εξίσωση $y^2 = 5x$ με $p = \frac{5}{2}$ και εστία $E\left(\frac{p}{2},0\right)$ ή $E(\frac{5}{4},0)$. Σύμφωνα με την υπόθεση $-\frac{\lambda-1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \lambda = -4$.

Άρα για $\lambda = -4$ από την (2) παίρνουμε $x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - \frac{1}{4} = 0$, που είναι η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου.

Θέμα 4ο: Θεωρούμε την παραβολή $C: y^2 = 2px$, $p > 0$ και την ευθεία $\varepsilon: y = \lambda x + \kappa, \lambda \neq 0$.

α. Να βρείτε τη θέση της ευθείας ε ως προς την παραβολή.

β. Στην περίπτωση που η ε τέμνει την παραβολή στα σημεία Α,Β

Να βρείτε: i. Την απόσταση των Α,Β.

ii. Την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την AB.

Λύση: α. Το πλήθος των κοινών σημείων τους εξαρτάται από το πλήθος των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ y^2 = 2px \end{cases}$, δηλαδή του $\begin{cases} y = \lambda x + \kappa \\ x = \frac{y^2}{2p} \end{cases}$, ή

τελικά της εξίσωσης $y = \lambda \frac{y^2}{2p} + \kappa$, δηλαδή της

$\lambda y^2 - 2py + 2p\kappa = 0$ (1). Αφού $\lambda \neq 0$, η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού με άγνωστο το y και η διακρίνουσά της είναι:

$$\Delta = 4p^2 - 8p\kappa\lambda = 4p(p - 2\kappa\lambda)$$

- Η ε έχει με την C δύο διαφορετικά κοινά σημεία αν και μόνο αν η (1) έχει δύο ρίζες άνισες,δηλαδή $\Delta > 0$, ή $p > 2\kappa\lambda$, αφού $p>0$.
- Η ε έχει με την C ένα μόνο κοινό σημείο (εφαπτομένη της C) αν και μόνο αν η (1) έχει διπλή ρίζα,δηλαδή $\Delta = 0$, ή $p = 2\kappa\lambda$ αφού $p \neq 0$.
- Η ε δεν έχει κοινά σημεία με την C αν και μόνο αν η (1) είναι αδύνατη στο R ,δηλαδή

$\Delta<0$, ή $p<2\kappa\lambda$, αφού $p>0$.

β. i. Αφού η ε τέμνει την παραβολή έχουμε $p>2\kappa\lambda$.

Έστω ότι $A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$. Τα y_1, y_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1), οπότε από τους τύπους Vieta έχουμε $y_1+y_2=\dfrac{2p}{\lambda}$ και $y_1y_2=\dfrac{2p\kappa}{\lambda}$.

$y_2-y_1=\lambda(x_2-x_1)$.

$(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$

$\sqrt{(x_2-x_1)^2+\lambda^2(x_2-x_1)^2}=|x_2-x_1|\sqrt{1+\lambda^2}$.

Έχουμε: $x_1+x_2=\dfrac{y_1^2+y_2^2}{2p}=\dfrac{(y_1+y_2)^2-2y_1y_2}{2p}=\dfrac{\frac{4p^2}{\lambda^2}-\frac{4p\kappa}{\lambda}}{2p}=$

$\dfrac{2(p-\kappa\lambda)}{\lambda^2}$ και $x_1x_2=\dfrac{(y_1y_2)^2}{4p^2}=\dfrac{4p^2\kappa^2}{4p^2\lambda^2}=\dfrac{\kappa^2}{\lambda^2}$, οπότε: $(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=$

$\dfrac{4(p-\kappa\lambda)^2}{\lambda^4}-4\dfrac{\kappa^2}{\lambda^2}=\dfrac{4p(p-2\kappa\lambda)}{\lambda^4}\Rightarrow$

$|x_2-x_1|=\dfrac{2}{\lambda^2}\sqrt{p(p-2\kappa\lambda)}$.

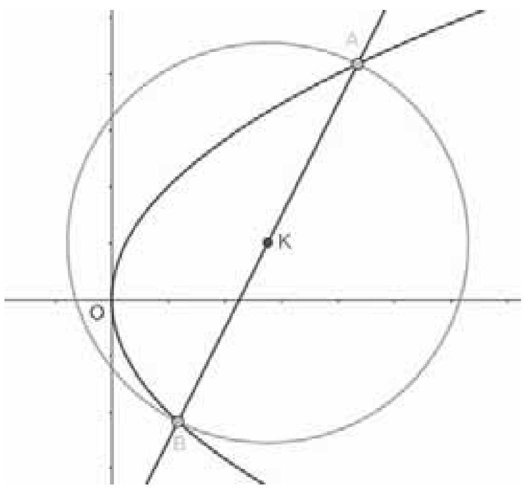
Άρα $(AB)=\dfrac{2}{\lambda^2}\sqrt{p(p-2\kappa\lambda)(1+\lambda^2)}$.

Συντομότερα: $|x_1-x_2|=\left|\dfrac{y_1^2-y_2^2}{2p}\right|=\dfrac{1}{2}|y_1+y_2|\cdot|y_1-y_2|=$

$=\dfrac{1}{2p}\cdot\left|\dfrac{2p}{\lambda}\right|\cdot\left|\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\lambda}\right|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{\lambda^2}=\dfrac{2}{\lambda^2}\sqrt{p(p-2\kappa\lambda)}$

ii. Αν K είναι το κέντρο του κύκλου τότε:

$x_K=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{p-\kappa\lambda}{\lambda^2}$ και $y_K=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{p}{\lambda}$.



Σχ.6

Άρα $K\left(\dfrac{p-\kappa\lambda}{\lambda^2},\dfrac{p}{\lambda}\right)$. Η ακτίνα του κύκλου είναι

$\rho=\dfrac{(AB)}{2}=\dfrac{1}{\lambda^2}\sqrt{p(p-2\kappa\lambda)(1+\lambda^2)}$.

Η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι

$\left(x-\dfrac{p-\kappa\lambda}{\lambda^2}\right)^2+\left(y-\dfrac{p}{\lambda}\right)^2=\dfrac{p(p-2\kappa\lambda)(1+\lambda^2)}{\lambda^4}$.

Θέμα 5°: Θεωρούμε τα σημεία $M(2\sigma\upsilon\nu\theta, 4\eta\mu\theta)$ με $\theta\in[0,2\pi)$.

α. Δείξτε ότι τα σημεία M βρίσκονται πάνω σε μια έλλειψη C.

β. Έστω (ε) η εφαπτομένη της C στο M όταν $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Η (ε) σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο εμβαδού $E(\theta)$. Να βρείτε το σημείο M ώστε το εμβαδόν να είναι ελάχιστο καθώς και το ελάχιστο εμβαδόν.

Λύση: α. Έχουμε $\begin{cases}x_M=2\sigma\upsilon\nu\theta\\ y_M=4\eta\mu\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x_M}{2}=\sigma\upsilon\nu\theta\\ \dfrac{y_M}{4}=\eta\mu\theta\end{cases}\Rightarrow$

$\dfrac{x_M^2}{4}+\dfrac{y_M^2}{16}=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1\Rightarrow M\in(C)$, όπου

$(C):\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$ (έλλειψη με τις εστίες στον άξονα $y'y$)

β. Η (ε) έχει εξίσωση: $\dfrac{(\sigma\upsilon\nu\theta)x}{2}+\dfrac{(\eta\mu\theta)y}{4}=1$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία $K\left(\dfrac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta},0\right),\Lambda\left(0,\dfrac{4}{\eta\mu\theta}\right)$, οπότε

$E(\theta)=\dfrac{1}{2}(OK)(O\Lambda)=\dfrac{1}{2}\dfrac{2}{|\sigma\upsilon\nu\theta|}\dfrac{4}{|\eta\mu\theta|}=$

$\dfrac{8}{|2\eta\mu\theta.\sigma\upsilon\nu\theta|}=\dfrac{8}{|\eta\mu2\theta|}=\dfrac{8}{\eta\mu2\theta}$, αφού

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow0<2\theta<\pi\Rightarrow\eta\mu2\theta>0$.

Άρα: $E(\theta)$ ελάχιστο $\Leftrightarrow$ $\eta\mu2\theta$ μέγιστο $\Leftrightarrow$

$\eta\mu2\theta=1\Leftrightarrow2\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{4}$, αφού $0<2\theta<\pi$. Άρα $M(\sqrt{2},2\sqrt{2})$ και $\min E(\theta)=8$.

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Υπεύθυνοι τάξης: Δ. Αργυράκης, Ν. Αντωνόπουλος, Κ. Βακαλόπουλος, Ι. Λουριδάς

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Επαναληπτικά Θέματα

Λαζαρίδης Χρήστος

Οι λύσεις δίνονται περιληπτικά, ώστε να αφήνουν περιθώρια αυτενέργειας των μαθητών ενόψει των εξετάσεων

1) Έστω μία πολυωνυμική συνάρτηση f με $f(0)=1$ και τέτοια ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3+1}=1$ και $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=6$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3-3x+1$.

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

γ) Αν ρ είναι η αρνητική ρίζα του β ερωτήματος να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τους άξονες και την ευθεία $x=\rho$ ισούται με $\frac{3\rho(\rho-1)}{4}$.

δ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{|\ln x|}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)+1}{\eta\mu^2(x-1)}$.

Λύση: α) Έστω ότι ο βαθμός της f είναι μεγαλύτερος του 3, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^3+1}=\pm\infty$, άτοπο, άρα ο βαθμός της f είναι μικρότερος ή ίσος του 3. Θεωρούμε $f(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$. Λαμβάνοντας υπ όψιν τις υποθέσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο.

β) Βρίσκουμε τα επί μέρους σύνολα τιμών. Έχουμε, $f((-\infty,-1))=(-\infty,3), f([-1,1])=[-1,3], f((1,+\infty))=(-1,+\infty)$.

γ) Το εμβαδόν είναι, $E=\int_\rho^0|f(x)|dx=\int_\rho^0(x^3-3x+1)dx=...$ Λαμβάνουμε υπ όψιν $f(\rho)=0$.

δ) Το πρώτο όριο ισούται με $-\infty$ ενώ το δεύτερο με χρήση De L'Hospital δίνει 3.

2) Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, η οποία είναι τέτοια ώστε: $f(1)=1$ και $f(x)+xf'(x)>0$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-1}{x}>-1$.

β) $f(x)<\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in(0,1)$ και $f(x)>\frac{1}{x}$, για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

γ) Υπάρχει $\xi\in(\frac{1}{3},2)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi)>-1$.

δ) $E(\lambda)>\ln\lambda$, όπου $E(\lambda)$ είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=\lambda$ όπου $\lambda>1$.

Λύση: α) Το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x+1)-1}{x}$ αν θέσουμε $u=x+1$ γίνεται $\lim\limits_{u\to 1}\frac{f(u)-f(1)}{u-1}$ το οποίο ισούται με $f'(1)$.* Στη συνέχεια αν στην σχέση της υπόθεσης $f(x)+xf'(x)>0$ θέσουμε $x=1$, τότε προκύπτει το ζητούμενο.

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x)=xf(x), x\in(0,+\infty)$ η οποία αποδεικνύουμε $\lim\limits_{u\to 1}\lambda(u)=f'(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\lambda(x+1)=f'(1)$, ότι είναι γνησίως αύξουσα. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις: $0<x<1$ οπότε $\alpha(x)<\alpha(1)\Rightarrow f(x)<\frac{1}{x}$ και $x>1$ όπου εργαζόμαστε ανάλογα.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[\frac{1}{3},2]$ και διαπιστώνουμε ότι υπάρχει $\xi\in(\frac{1}{3},2)$ ώστε $f'(\xi)=\frac{f(2)-f(\frac{1}{3})}{\frac{5}{3}}$.

Αλλά από το β ερώτημα $f(2)>\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{3})<3$.

δ) $E(\lambda)=\int_1^\lambda|f(x)|dx$. Επειδή, $1<x<\lambda$ παίρνουμε $f(x)>\frac{1}{x}$ οπότε ολοκληρώνοντας έχουμε το ζητούμενο.

3) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία κυρτή συνάρτηση με $f(1)=1$ και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(100h+1)-1}{h}=200$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της

* Ουσιαστικά υπονοούμε ότι: $\frac{f(x+1)-1}{x}=\frac{f(x+1)-f(1)}{(x+1)-1}=\lambda(x+1)$, όπου $\lambda(u)=\frac{f(u)-f(1)}{u-1}$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)=1$, $\lim\limits_{u\to 1}\lambda(u)=f'(1)\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\lambda(x+1)=f'(1)$ (θεώρημα ορίου σύνθεσης συναρτήσεων)

C_f στο σημείο της $(1,f(1))$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\int_2^{10}(\int_1^2 f(x)dx)dt \geq 16$.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $2f(\xi)f'(\xi) = f^2(2) - 1$.

δ) Αν επιπλέον μία παράγουσα F της f είναι περιττή, να αποδείξετε ότι: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\eta\mu t dt = 0$.

Λύση: α) Το όριο της υπόθεσης αν θέσουμε $x = 100h + 1$ δίνει $f'(1) = 2$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y = 2x - 1$.

β) Επειδή η f είναι κυρτή έχουμε $f(x) \geq 2x - 1$. Ολοκληρώνοντας παίρνουμε, $\int_1^2 f(x)dx \geq 2$. Ολοκληρώνοντας εκ νέου, προκύπτει το ζητούμενο.

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = f^2(x)$ και εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στο $[1,2]$.

δ) Η F είναι περιττή και επομένως η $F' = f$ θα είναι άρτια. Η συνάρτηση $f(t)\eta\mu t$ θα είναι περιττή συνεπώς το ζητούμενο ολοκλήρωμα θα ισούται με 0.

4) Έστω $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο η οποία είναι τέτοια ώστε $f(1) = 1, f'(1) = 0, f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κοίλη.

γ) Να μελετήσετε τη f ως προς τη μονοτονία και να λύσετε την ανίσωση $f'(2f(x) - 1) \leq 0$.

δ) Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και $g(x) = x$.

Λύση: α) $0 = \lim\limits_{x\to 0}(f(x)\dfrac{\eta\mu x}{x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}) = f(0)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = f(x) - x$ για την οποία εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle στο $[0,1]$.

β) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ για την f' στο $[x_0,1]$ και αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x_0,1)$ $f''(\xi) = -\dfrac{1}{1 - x_0} < 0$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η f'' διατηρεί πρόσημο.

γ) Η f' είναι γνησίως αύξουσα και $f'(1) = 0$. Η ανίσωση ορίζεται στο $\mathbb{R}$ και είναι ισοδύναμη με την $2f(x) - 1 \geq 1$. Η τελευταία ισοδυναμεί με τη . $f(x) \geq f(1)$ η οποία έχει τη λύση $x = 1$ αφού $f(1)$ μέγιστο της f.

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\beta(x) = f(x) - x$. Ισχύει, $\beta(0) = \beta(1) = 0$. Οι δύο προφανείς ρίζες της β είναι μοναδικές διότι αν υποθέσουμε ότι η β έχει και τρίτη ρίζα με την βοήθεια Rolle καταλήγουμε σε άτοπο.

5) Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(1) = -1$ και τέτοια ώστε $x^2 f'(x) = 2 - xf(x)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι, $f(x) = \dfrac{2\ln x - 1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε τη f ως προς τη κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3f(x+1) < 2f(x) + f(x+3)$, για κάθε $x > e^2$.

δ) Αν επιπλέον F είναι μία αρχική της f, στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(\frac{e}{x}) = F(x) + c, x \in (0,+\infty)$, όπου $f(x) \geq f(1)$

ii) $e\int_1^e \dfrac{F(x)}{x^2}dx = \int_1^e F(x)dx + ce(e-1)$.

Λύση: α) Η σχέση της υπόθεσης γράφεται, $(xf(x))' = (2\ln x)'$.

β) Κοίλη στο $(0,e^2]$ και κυρτή στο $[e^2,+\infty)$.

γ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα $[x,x+1],[x+1,x+3]$ και χρησιμοποιούμε το ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα.

δ) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\alpha(x) = F(\frac{e}{x}) - F(x)$ και αποδεικνύουμε ότι είναι σταθερή.

ii) Θεωρούμε $I = \int_1^e \dfrac{F(x)}{x^2}dx$. Θέτουμε $u = \dfrac{e}{x}$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 2$. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Οι $C_f, C_{f^{-1}}$ έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο το $(-1,-1)$.

γ) $2|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)| \leq |x - y| \leq \dfrac{|f(x) - f(y)|}{2}$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και ότι η f^{-1} είναι συνεχής.

δ) $5F(x^2 + 3) < 2F(x^2 + 6) + 3F(x^2 + 1)$, όπου F είναι μία αρχική της f.

Λύση: α) Αποδεικνύουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. Στη συνέχεια, $f(A) = \mathbb{R}$.

β) Αποδεικνύουμε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = f(x)$ η οποία είναι ισοδύναμη με $f(f(x)) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα το -1. (Με παραγώγιση και αντικατάσταση). Άλλος τρόπος είναι να λύσουμε την $f(x)=x$ δεδομένου ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

γ) Διακρίνουμε τις περιπτώσεις, $x=y, x<y, x>y$ και αποδεικνύουμε τη σχέση $|x-y|\le\frac{|f(x)-f(y)|}{2}$, στη συνέχεια θέτουμε $x=f^{-1}(x), y=f^{-1}(y)$ οπότε προκύπτει το ζητούμενο.

δ) Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ στα $[x^2+1,x^2+3],[x^2+3,x^2+6]$ και λαμβάνουμε υπόψη ότι F' είναι γνησίως αύξουσα.

7. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση με f'' γνησίως αύξουσα για την οποία ισχύουν $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-x^3+9x-1}{x-3}=-18$ και $f'(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,3)\cup(3,+\infty)$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(3)=1, f'(3)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f''(3)=0$ και ότι το $K(3,f(3))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα έστω ρ η οποία ανήκει στο $(1,3)$ και $\int_\rho^3 f'(x)f'(f(x)+2)dx=1-f(2)$.

Λύση: α) Θέτουμε $\alpha(x)=\frac{f(x)-x^3+9x-1}{x-3}$, λύνουμε ως προς $f(x)$ και χρησιμοποιούμε ότι $f(3)=\lim\limits_{x\to 3}f(x)$. Στη συνέχεια, $f'(3)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-1}{x-3}$ και αντικαθιστούμε $f(x)$.

β) $f'(x)>0\Rightarrow f'(x)-f'(3)>0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}>0, & x\in(3,+\infty)\\ \frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}, & x\in(-\infty,3)\end{cases}.$$

$\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}\ge 0$, $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{f'(x)-f'(3)}{x-3}\le 0$ επομένως $f''(3)=0$.

γ) Εφαρμόζουμε Θεώρημα Bolzano στο $[1,3]$. Η μοναδικότητα αποδεικνύεται από τη μονοτονία της f. Το ολοκλήρωμα ισούται

$$[f(f(x)+2)]_\rho^3=\ldots=1-f(2).$$

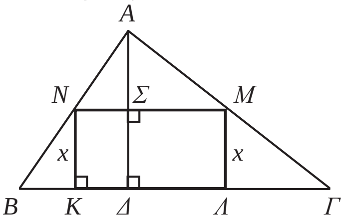
Τάξη: Γ΄

Προτεινόμενα θέματα για τα Μαθηματικά προσανατολισμού θετικών σπουδών

Από τον Σωτήρη Σκοτίδα- 2ο ΓΕΛ Καρδίτσα

Η κατασκευή εύστοχων θεμάτων για τις πανελλαδικές εξετάσεις στα Μαθηματικά είναι δύσκολο εγχείρημα. Προφανώς τέτοιου είδους θέματα πρέπει να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες: α) προσήλωση στο πνεύμα του σχολικού βιβλίου για λόγους ισονομίας αλλά και ενίσχυσης του ρόλου του σχολείου β) ισχυρή διακριτότητα στο επίπεδο δυσκολίας των ερωτημάτων γ) εξέταση του βαθμού εμπέδωσης της θεωρίας δ) εξέταση της βαθύτερης κατανόησης των εννοιών ε) έλεγχος της ταχύτητας διεκπεραίωσης δραστηριοτήτων που σχετίζονται με βασικές προτάσεις της ύλης. ζ) καλή γνώση των βασικών δεξιοτήτων σε άλγεβρα και γεωμετρία από προηγούμενες τάξεις. η) απαίτηση συνθετικής ικανότητας του μαθητή. Στηριζόμενοι σε αυτό το μοντέλο, προτείνουμε τα παρακάτω θέματα. Ο αναγνώστης καλό θα ήταν να θεωρεί δεδομένη την ΜΗ ύπαρξη τέλειων θεμάτων. Οποιαδήποτε σχόλια είναι ευπρόσδεκτα. Να σημειώσουμε ότι σε μια χώρα που η Μαθηματική Εκπαίδευση αφήνει πολλά περιθώρια βελτίωσης, δεν είναι δίκαιο να κρίνεται η μαθηματική πορεία ενός μαθητή μέσα σε 3 ώρες. Τέλος, να τονιστεί ότι η κατασκευή των εξεταστικών δοκιμίων θα πρέπει να έχει ως βάση τις οδηγίες διδασκαλίας του ΙΕΠ που πρέπει να ακολουθεί ο εκπαιδευτικός στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς.

ΘΕΜΑ 1ο: Ένα ορθογώνιο ΚΛΜΝ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ βάσης $ΒΓ=10cm$ και ύψους $ΑΔ=5cm$.

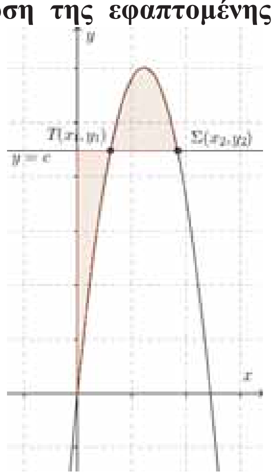


Α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό Ε και η περίμετρο Ρ του ορθογωνίου δίνονται από τις συναρτήσεις: $E(x)=-2x^2+10x$, $P(x)=2(10-x)$, $x\in(0,5)$

Β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε) της γραφικής παράστασης της Ε(x) η οποία είναι παράλληλη προς την γραφική παράσταση της P(x)

Γ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 5^-}\left[\frac{e^{\frac{1}{(x-5)^2}}}{\ln(E(x))}\right]$

Δ) Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης Ε(x) και μια



ευθεία παράλληλη προς τον άξονα x΄x η οποία τέμνει την καμπύλη σε δύο διαφορετικά σημεία. Να βρείτε την εξίσωση αυτής της ευθείας $y=c$ ώστε τα γραμμοσκιασμένα εμβαδά να είναι ίσα.

Ε) Ένα υλικό σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από το σημείο $A\left(x_0,E\left(x_0\right)\right)$ με $x_0=0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=E(x)$, $x\geq x_0$ με $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\geq 0$ και $x'(t)\neq 0$ για κάθε $t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου Μ είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης $y(t)$;

Προτεινόμενη Λύση

Α) Έχουμε x<ΑΔ=5, οπότε ΑΣ=5–x, με $x\in(0,5)$. Έστω y η άλλη διάσταση του ορθογωνίου. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΑΝΜ, ΑΒΓ έχουμε:

$$\frac{MN}{B\Gamma}=\frac{A\Sigma}{A\Delta}\Rightarrow\frac{y}{10}=\frac{5-x}{5}\Rightarrow y=10-2x\Rightarrow$$

$E(x)=x(10-2x)=-2x^2+10x$, και

$P(x)=2x+2y=2x+2(10-2x)=-2x+20$.

Β) Η γραφική παράσταση της P(x) είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα χωρίς τα άκρα του, ενώ κείται επί ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης –2. Αλλά $E'(x)=-4x+10$. Αν $(\alpha,f(\alpha))$ το σημείο επαφής θα ισχύει: $E'(\alpha)=-2\Rightarrow -4\alpha+10=-2\Rightarrow\alpha=3$ $\Rightarrow E(\alpha)=E(3)=-2\cdot3^2+10\cdot3=12$.

Ώστε (ε): $y-12=-2(x-3)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-2x+18$.

Γ) Παρατηρούμε ότι $\lim\limits_{x\to5^-}E(x)=0$ με E(x)>0 και $\lim\limits_{y\to0^+}\ln y=-\infty$ Έτσι $\lim\limits_{x\to5^-}\ln(E(x))=-\infty$. Επίσης $\lim\limits_{x\to5^-}(x-5)^2=0$ με $(x-5)^2>0$, οπότε

$$\lim_{x\to5^-}\frac{1}{(x-5)^2}=+\infty \text{ και } \lim_{w\to+\infty}e^w=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to5^-}e^{\frac{1}{(x-5)^2}}=+\infty.$$

Έτσι παρατηρούμε ότι έχουμε απροσδιοριστία $\frac{+\infty}{-\infty}$. Εξετάζουμε αν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα de L' Hospital. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις του αριθμητή και του παρονομαστή είναι παραγωγίσιμες κοντά στο 5, ως σύνθεση γνωστών παραγωγίσιμων συναρτήσεων (εκθετικής, λογαριθμικής και πολυωνυμικής), ενώ η παράγωγος του παρονομαστή δεν μηδενίζεται κοντά στο 5.

Εξετάζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{\left[e^{\frac{1}{(x-5)^2}}\right]'}{\left[\ln(E(x))\right]'}$. Έχουμε:

$$\frac{\left[e^{\frac{1}{(x-5)^2}}\right]'}{\left[\ln(E(x))\right]'}=\ldots=\frac{2x}{5-2x}\cdot\frac{1}{(x-5)^2}e^{\frac{1}{(x-5)^2}}=$$

$$=\frac{2x}{5-2x}\cdot\varphi\left(\frac{1}{(x-5)^2}\right),\text{ όπου } \varphi(y)=ye^y$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{2x}{5-2x}=-2$ και $\lim\limits_{x\to5^-}\frac{1}{(x-5)^2}=+\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(y)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to5^-}\varphi\left(\frac{1}{(x-5)^2}\right)=+\infty$$

Ώστε το ζητούμενο όριο είναι $-\infty$.

Δ) Ας είναι $T(x_1,c)$ και $\Sigma(x_2,c)$ με $x_1<x_2$ τα κοινά σημεία της ευθείας και της C_E. Έχουμε:

$$\int_0^{x_1}(c-E(x))dx=\int_{x_1}^{x_2}(E(x)-c)dx\Rightarrow$$

$$\int_0^{x_1}(c-E(x))dx+\int_{x_1}^{x_2}(c-E(x))dx=0\Rightarrow$$

$$cx_2=-\frac{2}{3}x_2^{\,3}+5x_2^{\,2}\Rightarrow c=-\frac{2}{3}x_2^{\,2}+5x_2\Rightarrow$$

$$-2x_2^{\,2}+10x=-\frac{2}{3}x_2^{\,2}+5x_2\Rightarrow x_2=\frac{15}{4}$$

Άρα: $c=E\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{75}{8}$ οπότε η ζητούμενη ευθεία είναι η: $y=\frac{75}{8}$

Ε) Πρέπει και αρκεί $x'(t_0)=y'(t_0)$ (1). Αλλά

$y(t)=E(x(t))$

$y'(t)=E'(x(t))\cdot x'(t)=(-4x(t)+10)\cdot x'(t)$

Άρα $(1)\Leftrightarrow x'(t_0)=x'(t_0)\left[-4x(t_0)+10\right]\Leftrightarrow x(t_0)=\frac{9}{4}$

οπότε $y(t_0)=-2\cdot\frac{81}{16}+10\cdot\frac{9}{4}=\frac{99}{8}$.

ΘΕΜΑ 2ο: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\ln x}$, $x\geq1$.

Α) Να αποδειχθεί ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και βρεθεί το σύνολο τιμών της f(x)

Β) Να αποδειχθεί ότι η f(x) έχει αντίστροφη, η οποία και να βρεθεί.

Γ) Να μελετηθεί η f(x) ως προς την κυρτότητα και να αποδειχθεί ότι $f(x)\geq2x-e$ για κάθε $x\geq1$.

Δ) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to e^+}\frac{f(x)-e}{(x-e)^2\cdot\ln(x-e)}$

Ε) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_1^e\frac{2\cdot\ln x-x\cdot\ln f(x)}{x\cdot\ln f(x)+x\cdot e^x}dx.$$

Προτεινόμενη Λύση

Α) $f'(x)=\left(e^{\ln^2(x)}\right)'=2\ln x(\ln x)'f(x)=\frac{2\ln x}{x}f(x)>0$ για κάθε $x>1$ και καθώς f συνεχής στο $[1,+\infty)$ θα είναι f γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$.

Άρα $f([1,+\infty))=\left[f(1),\ \lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=[1,+\infty)$.

Β) Η f ως γνησίως μονότονη θα είναι «1–1». Άρα θα έχει αντίστροφη. Ψάχνουμε τα y για τα οποία έχει λύση ως προς $x\in[1,+\infty)$ η εξίσωση y = f(x). Από Α) ερώτημα, έχουμε $y\geq1$, οπότε $f(x)=y\Leftrightarrow e^{\ln^2(x)}=y\Leftrightarrow \ln^2(x)=\ln y\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln x=\sqrt{\ln y}\Leftrightarrow x=e^{\sqrt{\ln y}}$ αφού

$y\geq1\Rightarrow \ln y\geq \ln1=0\Rightarrow\sqrt{\ln y}\geq0\Rightarrow e^{\sqrt{\ln y}}\geq e^0=1$.

Ώστε $f^{-1}(x)=e^{\sqrt{\ln x}}$, $x\in[1,+\infty)$.

Γ) $f''(x)=2\left[\left(\frac{\ln x}{x}\right)'f(x)+\frac{\ln x}{x}f'(x)\right]=$

$2\left[\frac{1-\ln x}{x^2}f(x)+2\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2f(x)\right]=$

$2f(x)\frac{2\ln^2x-\ln x+1}{x^2}>0$, διότι $2t^2-t+1>0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$, άρα f κυρτή στο $[1,+\infty)$.

Αλλά η εφαπτομένη ευθεία τη C_f στο (e, f(e)) έχει εξίσωση: $y-f(e)=f'(e)(x-e)$, δηλαδή $y=2x-e$. Άρα: $f(x)\geq2x-e$ για κάθε $x\geq1$.

Δ) Έχουμε: $h(x)=\frac{f(x)-e}{x-e}\cdot\frac{1}{(x-e)\ln(x-e)}=$

$=\frac{f(x)-e}{x-e}\cdot\frac{\frac{1}{x-e}}{\ln(x-e)}=\frac{f(x)-e}{x-e}\cdot\varphi\left(\frac{1}{x-e}\right)$, όπου

$\varphi(y)=\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}$ Αλλά $\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-e}{x-e}=\lim_{x\to e^+}\frac{f(x)-f(e)}{x-e}=f'(e)=2$

Εξάλλου $\lim_{x\to e^+}\left(\frac{1}{x-e}\right)=+\infty$ και $\lim_{x\to0^+}\varphi(y)=-\infty$

(Κανόνας L' Hospital, μορφή $\frac{+\infty}{-\infty}$)$\Rightarrow$

$\lim_{x\to e^+}\varphi\left(\frac{1}{x-e}\right)=-\infty$. Άρα $\lim_{x\to e^+}h(x)=-\infty$

Ε) Παρατηρούμε ότι

$$I=\int_1^e\frac{2\ln x+xe^x-(x\ln^2x+xe^x)}{x\ln^2x+xe^x}dx=$$

$$\int_1^e\frac{2\cdot\frac{1}{x}\ln x+e^x}{\ln^2x+e^x}dx-\int_1^e1dx=\int_1^e\frac{\left(\ln^2x+e^x\right)'}{\ln^2x+e^x}dx-(e-1)=$$

$\int_1^eF'(x)dx-e+1$, όπου $F(x)=\ln\left(\ln^2x+e^x\right)$

Άρα $I=F(e)-F(1)-e+1=\ln\left(1+e^e\right)-e$

ΘΕΜΑ 3^o: Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\mathbf{g(x)=x-\varepsilon\varphi x,\ x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).}$$

Α) Βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g(x) τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες και τα διαστήματα κυρτότητας, της γραφικής της παράστασης C_g.

Β) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο με τετμημένη $\frac{\pi}{4}$ και να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in[0,\frac{\pi}{2})$ ισχύει $\varepsilon\varphi x\geq2x+1-\frac{\pi}{2}$.

Γ) Αποδείξτε ότι η εξίσωση $g(x)=-x$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ εκ των οποίων οι δύο είναι αντίθετες.

Δ) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των g και g^{-1}.

Ε) Αν ρ είναι η θετική ρίζα της εξίσωσης $g(x)=-x$, να υπολογίσετε συναρτήσει του ρ, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις C_g και την ευθεία: $x+y=0$.

Προτεινόμενη Λύση

Α) Έχουμε: $g'(x)=1-\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}=-\frac{\eta\mu^2x}{\sigma\upsilon\nu^2x}=-\varepsilon\varphi^2x<0$, για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και καθώς η g(x) είναι συνεχής στο 0, θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)=A$, οπότε:

$$g(A)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}g(x),\ \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)=R.$$

Ακόμα $g''(x)=-2\varepsilon\varphi x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$, για κάθε $x\in A$, οπότε

- $g''(x)>0\Leftrightarrow\varepsilon\varphi x<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$

- $g''(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$
- $g''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

Άρα η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right]$ και κοίλη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$, έχει δε η C_g μοναδικό σημείο καμπής το $(0,g(0))$.

Πιθανές ασύμπτωτες είναι μόνο οι $\varepsilon_1: x=-\dfrac{\pi}{2}$, $\varepsilon_2: x=\dfrac{\pi}{2}$. Πράγματι οι ε_1, ε_2 είναι ασύμπτωτες της C_g αφού $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} g(x)=-\infty$.

Β) Έχουμε: $g\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{4}-1$ και $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$ οπότε

$$(\varepsilon): y-\left(\frac{\pi}{4}-1\right)=-1\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow(\varepsilon): y=-x-1+\frac{\pi}{2}$$

Από **Α)** ερώτημα η g(x) είναι κοίλη στο $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε $g(x)\le -x-1+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow x-\varepsilon\varphi x\le -x-1+\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \varepsilon\varphi x\ge 2x+1-\frac{\pi}{2}$$

Γ) Αρκεί λοιπόν το ζητούμενο να ισχύει για τη συνάρτηση $h(x)=2x-\varepsilon\varphi x$, $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$. Έχουμε: $h'(x)=2-\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=2-\left(1+\varepsilon\varphi^2 x\right)$ $=1-\varepsilon\varphi^2 x$. Οπότε:

- $h'(x)>0\Leftrightarrow 1-\varepsilon\varphi^2 x>0\Leftrightarrow -1<\varepsilon\varphi x<1\Leftrightarrow$ $x\in\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$ και $h'(x)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{4}\right)$

Άρα η συνάρτηση h ως συνεχής στο Α θα είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $\Delta_1=\left(-\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{4}\right]$ και $\Delta_3=\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$. Έχουμε λοιπόν:

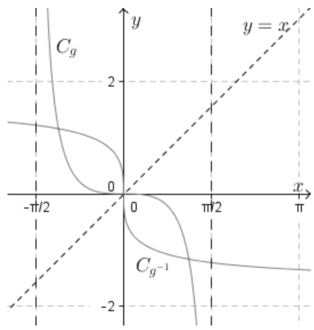
$$h(\Delta_1)=\left[h\left(-\frac{\pi}{4}\right),\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+}h(x)\right)=\left[\frac{2-\pi}{2},+\infty\right)$$

$$h(\Delta_2)=\left[h\left(-\frac{\pi}{4}\right),h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left[\frac{2-\pi}{2},\frac{\pi-2}{2}\right]$$

$$h(\Delta_3)=\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}h(x),h\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]=\left(-\infty,\frac{\pi-2}{2}\right]$$

Επειδή σε καθένα από τα διαστήματα $h(\Delta_1)$, $h(\Delta_2)$, $h(\Delta_3)$ ανήκει το μηδέν η h(x) θα έχει ρίζα σε κάθε ένα από αυτά τα διαστήματα και λόγω της γνήσιας μονοτονίας της οι ρίζες αυτές θα είναι μοναδικές. Παρατηρούμε ότι h(0) = 0 ενώ η h είναι περιττή, οπότε h(–ρ) = – h(ρ) = 0, όπου ρ η μοναδική ρίζα της h(x) στο $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Δ) Η συνάρτηση g ως γνησίως φθίνουσα στο Α θα είναι και «1–1». Άρα υπάρχει η g^{-1}. Βρήκαμε στο Γ) ότι τα κοινά σημεία των $y=g(x)$ και $y=-x$ είναι τα (–ρ,ρ), (0,0), (ρ,–ρ), και λόγω της συμμετρίας των $C_{g^{-1}}$, C_g ως προς την y=x τα (ρ, –ρ), (0, 0), (–ρ, ρ) θα ανήκουν στην $C_{g^{-1}}$



Κάνοντας χρήση και των ευρημάτων του Α) ερωτήματος, μπορούμε να δώσουμε το σχήμα

Ε) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_{-\rho}^{\rho}|g(x)+x|dx$ Η συνάρτηση g είναι προφανώς περιττή στο Α, οπότε το χωρίο που ορίζουν οι $y=g(x)$, $y=-x$, x=0, x=ρ είναι προφανώς συμμετρικό ως προς το (0,0) του χωρίου που ορίζουν οι $y=g(x)$, $y=-x$, x=0, x=–ρ οπότε έχουν ίσα εμβαδά. Άρα $E=2\int_0^{\rho}|g(x)+x|dx=2\int_0^{\rho}|h(x)|dx$.

Από το **Γ)** ερώτημα προκύπτει h(x) ≥0, για κάθε x ∈ [0, ρ], αφού $0\le x\le\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0=h(0)\le h(x)$ και $\dfrac{\pi}{4}\le x\le\rho\Rightarrow h(x)\ge h(\rho)=0$.

Άρα $E=2\int_0^{\rho}h(x)dx=$

$$=2\int_0^{\rho}(2x-\varepsilon\varphi x)dx=2\rho^2+2\int_0^{\rho}\frac{(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu x}dx=$$

$$=2\rho^2+2\int_0^{\rho}\left[\ln(\sigma\upsilon\nu x)\right]'dx=2\rho^2+2\ln(\sigma\upsilon\nu\rho).$$

(σ.σ. $\ln(\sigma\upsilon\nu\rho)<0$, αφού $\dfrac{\pi}{4}<\rho<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow 1>\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{4}>\sigma\upsilon\nu\rho>\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}=0$)

Θέματα παλαιοτέρων ετών

Επιμέλεια: Γιώργος Α. Τασσόπουλος

Ανώτατη Σχολή Μηχανικών Αεροπορίας (Σ.Μ.Α.)
Γεωμετρία Ζήτημα 3ον

Οι άνισοι κύκλοι (Κ,R) και (Λ, ρ) εφάπτονται ευθείας στα σημεία Α, Β και είναι προς το αυτό μέρος της ευθείας αυτής. Να βρεθεί ο γ.τ. της τομής των ευθειών από τα Α, Β προς τις δύο άκρες τομές των δύο κύκλων από μεταβλητή ευθεία παράλληλη της ΑΒ.

Λύση: (Από το Δελτίο Θεμάτων του Αριστείδη Πάλλα. Η λύση αυτή όπως αναφέρει ο ίδιος στον πρόλογό του Δελτίου, δόθηκε από τον Διακεκριμένο Μαθηματικό Ποθηττό Σταυρόπουλο του οποίου ευτύχησα να είμαι μαθητής.)

Έστω ΓΔ η παράλληλη προς την ΑΒ και Μ το σημείο τομής των ευθειών ΓΑ, ΔΒ. Αν Α΄, Β΄ είναι τα αντιδιαμετρικά των Α, Β και ΜΗ⊥ΑΒ, τότε εκ των ομοιοτήτων :

ΑΜΗ~ΑΓΑ΄ και ΒΜΗ~ΒΔΒ΄ έχω:

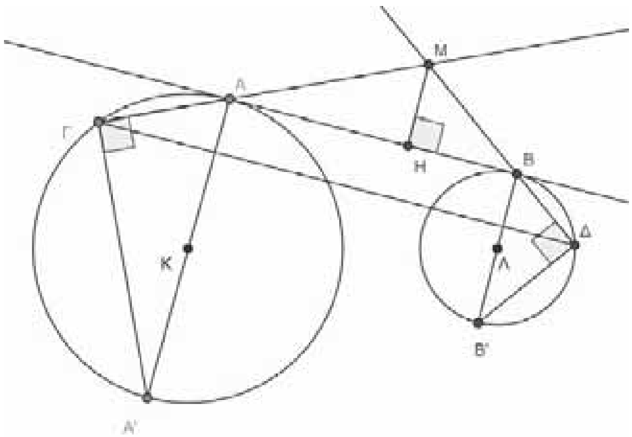
$\dfrac{MA}{2R}=\dfrac{MH}{A\Gamma}$, $\dfrac{MB}{2\rho}=\dfrac{MH}{B\Delta}$, εκ των οποίων δια

διαιρέσεως κατά μέλη λαμβάνω: $\dfrac{MA}{MB}\cdot\dfrac{\rho}{R}=\dfrac{B\Delta}{A\Gamma}$ (1).

Επειδή ΑΒ // ΓΔ $\Rightarrow \dfrac{MB}{MA}=\dfrac{B\Delta}{A\Gamma}$ (2),

εκ των (1), (2) λαμβάνω: $\left(\dfrac{MA}{MB}\right)^2=\dfrac{R}{\rho}\Rightarrow\dfrac{MA}{MB}=\sqrt{\dfrac{R}{\rho}}$.

Άρα ο ζητούμενος γ.τ. είναι απολλώνια περιφέρεια με βάση το τμήμα ΑΒ και λόγο $\sqrt{\dfrac{R}{\rho}}$.



Παρατήρηση: Δεκτό φυσικά είναι μόνο το τμήμα της που βρίσκεται άνωθεν της ΑΒ και έχει, για R>ρ, οριακό σημείο, όταν Δ≡Β΄, το σημείο τομής τότε, των Β΄Β, ΓΑ. Ειδικά για R=ρ εκφυλίζεται στη μεσοκάθετο του ΑΒ άνωθεν αυτού.

- Παραθέτω μια λύση με Αναλυτική Γεωμετρία, ενδιαφέρουσα μεν, αλλά μόνο και μόνο για να τονίσω την γοητεία και την απλότητα της Ευκλείδειας Λύσης.

Έστω R≥ρ. Θεωρούμε ορθοκανονικό σύστημα xAy με το Β στον ημιάξονα Αx και το Κ στον ημιάξονα Αy. Τότε έχουμε:

C_1: $x^2+(y-\rho)^2=R^2$,

C_1: $(x-\beta)^2+(y-\rho)^2=\rho^2$

και ΓΔ: $y=\lambda$ με $0<\lambda\le 2\rho$.

$\Gamma\in(C_1)\Rightarrow x_\Gamma^2+(\lambda-\rho)^2=R^2\Rightarrow$

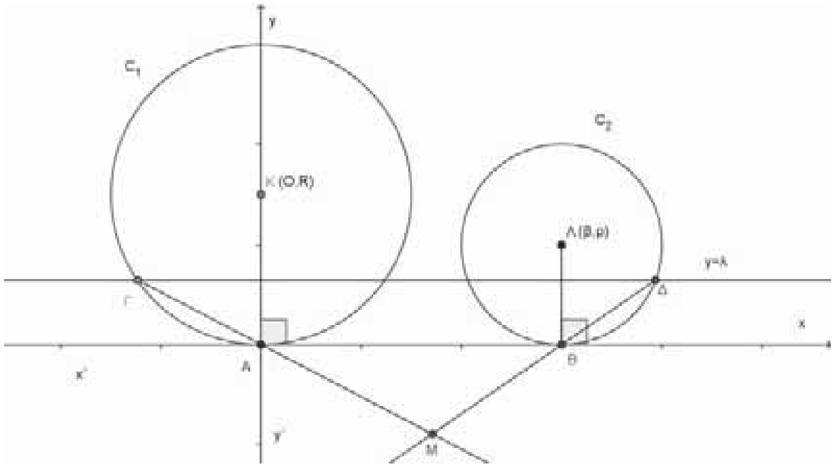
$x_\Gamma=-\sqrt{R^2-(\lambda-\rho)^2}$,

αφού $x_\Gamma<0$.Ομοίως $\Delta\in(C_2)$

$\Rightarrow(x_\Delta-\beta)^2+(\lambda-\rho)^2=\rho^2\Rightarrow$

$\Rightarrow x_\Delta=\beta+\sqrt{\lambda(2\rho\text{-}\lambda)}$, αφού

$\lambda\le 2\rho\le 2R$ και $x_\Delta>\beta$.



Άρα: $\vec{A\Gamma}=(-\sqrt{\lambda(2R\text{-}\lambda)},\lambda)$ και

$\vec{AM}=(x_M,y_M)$ οπότε

$\vec{A\Gamma}\,//\,\vec{AM}\Rightarrow\begin{vmatrix}x_M & y_M\\ -\sqrt{\lambda(2R\text{-}\lambda)} & \lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}\cdot x_M+\sqrt{2R-\lambda}\cdot y_M=0$ (1).

Επίσης : $\vec{B\Delta}=(\beta+\sqrt{\lambda(2\rho\text{-}\lambda)}-\beta,\lambda)=(\sqrt{\lambda(2\rho\text{-}\lambda)},\lambda)$ και $\vec{BM}=(x_M-\beta,y_M)$ οπότε $\vec{B\Delta}\,//\,\vec{BM}$

$\Rightarrow\begin{vmatrix} x_M-\beta & y_M \\ -\sqrt{\lambda(2\rho-\lambda)} & \lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\cdot x_M+\sqrt{2\rho-\lambda}\cdot y_M=\beta.\sqrt{\lambda}$. (2).

Από (1), (2) προκύπτει: $x_M=\dfrac{\beta\sqrt{2R-\lambda}}{\sqrt{2R-\lambda}+\sqrt{2\rho-\lambda}}$ (i), $y_M=\dfrac{\beta\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2R-\lambda}+\sqrt{2\rho-\lambda}}$ (ii).

Με βάση τις D, D_x, D_y. Για να βρούμε τη σχέση μεταξύ των x_M,y_M προκειμένου να έχει λύση ως προς λ το σύστημα των (i), (ii) παρατηρούμε ότι: $(\Sigma)\Leftrightarrow \dfrac{y_M}{x_M}=-\sqrt{\dfrac{\lambda}{2R-\lambda}}$ και (ii) $\Leftrightarrow \lambda=\dfrac{2Ry_M^2}{x_M^2+y_M^2}$ και (ii).

Για να έχει το (Σ) λύση πρέπει και αρκεί $y_M=-\dfrac{\beta\sqrt{\dfrac{2R\cdot y_M^2}{x_M^2+y_M^2}}}{\sqrt{2R-\dfrac{2R\cdot y_M^2}{x_M^2}}+\sqrt{2\rho-\dfrac{2R\cdot y_M^2}{x_M^2+y_M}}}$ (I).

Αλλά $y_M<0$, οπότε: (I) $\Leftrightarrow y_M=\dfrac{\beta\cdot y_M\sqrt{2R}}{\sqrt{2R\cdot x_M2}+\sqrt{2\rho\cdot x_M^2+2\rho\cdot y_M^2-2R\cdot y_M2}}\Leftrightarrow$

$\sqrt{2R\cdot x_M^2}+\sqrt{2\rho\cdot x_M^2+2\rho\cdot y_M^2-2R\cdot y_M^2}=\beta\sqrt{2R}\Leftrightarrow\sqrt{2\rho\cdot x_M^2+2\rho\cdot y_M^2-2R\cdot y_M^2}=\sqrt{2R}-\sqrt{2R\cdot x_M^2}$ (II).

Όμως $0<x_M\le\beta$, οπότε: (II) $\Leftrightarrow\sqrt{2\rho\cdot x_M^2+2\rho\cdot y_M^2-2R\cdot y_M^2}=\sqrt{2R}(\beta-x_M)$

$\Leftrightarrow 2\rho\cdot x_M^2+2\rho\cdot y_M^2-2R\cdot y_M^2=2R(\beta^2+x_M^2-2\beta\cdot x_M)\Leftrightarrow(R-\rho)\cdot x_M^2+(R-\rho)\cdot y_M^2-2\beta\cdot R\cdot y_M+R\cdot\beta^2=0$.

Αν R=ρ τότε: (C): $x=\dfrac{\beta}{2}$ (μεσοκάθετος του ΑΒ).

Αν R>ρ τότε: (C): $x^2+y^2-\dfrac{2\beta\cdot R}{R-\rho}x+\dfrac{\beta^2\cdot R}{R-\rho}=0\Leftrightarrow$ (C): $x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$ με $A=\dfrac{2\beta\cdot R}{R-\rho}$, $B=0$, $\Gamma=\dfrac{\beta^2\cdot R}{R-\rho}$ και $A^2+B^2-4\Gamma=\dfrac{4\beta^2\cdot R^2}{(R-\rho)^2}-\dfrac{4\beta^2\cdot R}{R-\rho}=\dfrac{4\beta^2\cdot R}{R-\rho}(\dfrac{R}{R-\rho}-1)=\dfrac{4\rho\cdot R\cdot\beta^2}{(R-\rho)^2}>0$.

Άρα πρόκειται για κύκλο με τις προϋποθέσεις βέβαια: $y<0$ και $0<x\le\beta$.

- Με αφορμή το άρθρο του εκλεκτού συναδέλφου **Γιώργου Κουσινιώρη**, που επανέφερε στο τεύχος αυτό, στη Γεωμετρία της Β Λυκείου, το θέμα της Στερεομετρίας, το οποίο τείνει να ξεχαστεί, θεώρησα ενδιαφέρον να θυμηθούμε το παρακάτω θέμα, από το όχι και τόσο μακρυνό παρελθόν.

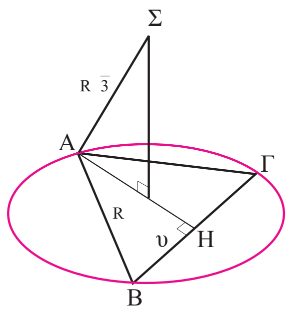
Ανωτάτη Σχολή Ναυτικών Δοκίμων 1980
Γεωμετρία Θέμα 4ον

Δίδονται δύο κανονικά τετράεδρα .ΣΑΒΓ. και $\Sigma A_1B_1\Gamma_1$ κοινής κορυφής Σ και ακμής $R\sqrt{3}$. Αι βάσεις αυτών ΑΒΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ αι οποίαι είναι ισόπλευρα τρίγωνα είναι εγγεγραμμέναι είς κύκλον (O,R) και έχουν τας πλευράς τους αντιστοίχως καθέτους, ήτοι είναι: $B_1\Gamma_1\perp B\Gamma$, .$\Gamma_1A_1\perp\Gamma A$., $A_1B_1\perp AB$. Να ευρεθεί ο όγκος του κοινού τμήματος των δύο τετραέδρων.

Λύση

Επειδή το ύψος ΣΟ του τετραέδρου με βάση ΑΒΓ και ακμή $\Sigma A=R\sqrt{3}$ υπολογίζεται εύκολα $\left(\Sigma O^2=\Sigma A^2-OA^2=\left(R\sqrt{3}\right)^2-R^2=2R^2\Rightarrow\Sigma O=R\sqrt{2}\right)$, ουσιαστικά ενδιαφερόμαστε για το εμβαδόν της κοινής βάσης των δύο τετραέδρων. Στην υπόθεση βέβαια θεωρείται δεδομένο ότι υπάρχουν δύο τρίγωνα ΑΒΓ και $A_1B_1\Gamma_1$ με τις παραπάνω ιδιότητες και οι υποψήφιοι δεν ήσαν υποχρεωμένοι να ελέγξουν αν πράγματι υπάρχουν δύο τέτοια τρίγωνα.

Επειδή, όπως θα διαπιστώσετε, ο έλεγχος αυτός, αποτελεί ένα ενδιαφέρον αυτοτελές θέμα, θα δείξουμε αρχικά (χωρίς να είναι απαραίτητο, όπως προείπαμε) ότι δοθέντος ενός ισοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R), υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο $A_1B_1\Gamma_1$ εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο με $B_1\Gamma_1\perp B\Gamma$, $\Gamma_1A_1\perp\Gamma A$, $A_1B_1\perp AB$. Για να είναι $B_1\Gamma_1=\lambda_3$ αρκεί η χορδή $B_1\Gamma_1$ να έχει απόστημα ίσο



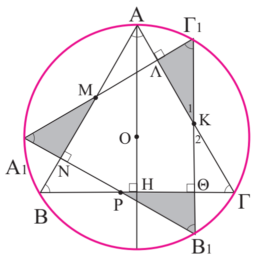
με $\alpha_3 = \frac{R}{2}$, δηλαδή να είναι κάθετη στην ΒΓ σε σημείο Θ που απέχει από το μέσο της Η απόσταση $H\Theta = \frac{R}{2}$.

Για να είναι και η χορδή $\Gamma_1 A_1 \perp \Gamma A$ στο Λ ίση με λ_3, αρκεί να έχει απόστημα ίσο με ΗΘ, δηλαδή $\Lambda\Gamma_1 = \Theta\Gamma$. Αλλά $\Theta\Gamma = H\Gamma - H\Theta = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$ και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 30^o \Rightarrow \Lambda\Gamma_1 = \frac{K\Gamma_1}{2}$, ενώ $K\Gamma_1 = \Theta\Gamma_1 - \Theta K$ (1). Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε τα $\Theta\Gamma_1, \Theta K$.

Προφανώς $\hat{\Gamma} = 60^o \Rightarrow \Theta K = \Theta\Gamma \cdot \varepsilon\varphi 60^o = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\cdot\sqrt{3} = \frac{R}{2}\left(3-\sqrt{3}\right)$ (2).

Εξάλλου $\Theta B_1 + \Theta\Gamma_1 = R\sqrt{3}$ και $\Theta B_1 \cdot \Theta\Gamma_1 = R^2 - O\Theta^2 = R^2 - 2OH^2 = R^2 - 2\frac{R^2}{4} = \frac{R^2}{2}$ οπότε τα $\Theta B_1, \Theta\Gamma_1$ είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - R\sqrt{3}x + \frac{R^2}{2} = 0$, δηλαδή $\Theta\Gamma_1 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$ (3), $B\Theta_1 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Αλλά: (1),(2),(3) $\Rightarrow K\Gamma_1 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3}+1\right) - \frac{R}{2}\left(3-\sqrt{3}\right) = R\left(\sqrt{3}-1\right)$ και $\Lambda\Gamma_1 = \frac{R}{2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \Theta\Gamma$.



Πράγματι λοιπόν $\Gamma_1 A_1 = \lambda_3$ οπότε $\hat{A}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = 60^o$ και $A_1\hat{M}N = A\hat{M}\Lambda = 90^o - \hat{A} = 30^o \Rightarrow \hat{N} = 90^o \Rightarrow A_1B_1 \perp AB$.

Έχουμε πλέον $(K\Lambda MNP\Theta) = (A_1B_1\Gamma_1) - 3(K\Lambda\Gamma_1)$ με

$(A_1B_1\Gamma_1) = \frac{\lambda_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ και.

$$(K\Lambda\Gamma_1) = \frac{1}{2}K\Gamma_1 \cdot K\Lambda \cdot \eta\mu 30^o = \frac{1}{2}K\Gamma_1 \cdot K\Gamma_1 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o \cdot \eta\mu 30^o =$$

$$= \frac{1}{2}K\Gamma_1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8}R^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2\cdot\sqrt{3} = \frac{R^2}{4}\left(2\sqrt{3}-3\right)$$

Επομένως $(K\Lambda MNP\Theta) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{3R^2}{4}\left(2\sqrt{3}-3\right) = \frac{3R^2}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)$

Και ο ζητούμενος όγκος είναι: $V = \frac{1}{3}\cdot(K\Lambda MNP\Theta)\cdot\Sigma O = \frac{1}{3}\cdot\frac{3R^2}{4}\left(3-\sqrt{3}\right)\cdot R\sqrt{2} = \frac{R^3}{4}\left(3\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$

1^o Θέμα των Εισαγωγικών Εξετάσεων Γεωμετρίας Χημικών Μηχανικών και Αρχιτεκτόνων Ε.Μ.Π. το 1939. **(Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς, Κεφαλονιάς)**

Το θέμα ήταν το εξής: *Με τις διαμέσους δοθέντος τριγώνου σχηματίζουμε δεύτερο τρίγωνο που έχει τις διαμέσους του πρώτου ως πλευρές, μετά τρίτο τρίγωνο με πλευρές τις διαμέσους του δεύτερου κ.ο.κ. επ' άπειρον. Ζητείται το άθροισμα των εμβαδών όλων αυτών των τριγώνων.*

Πρόκειται για εξαιρετικό θέμα…

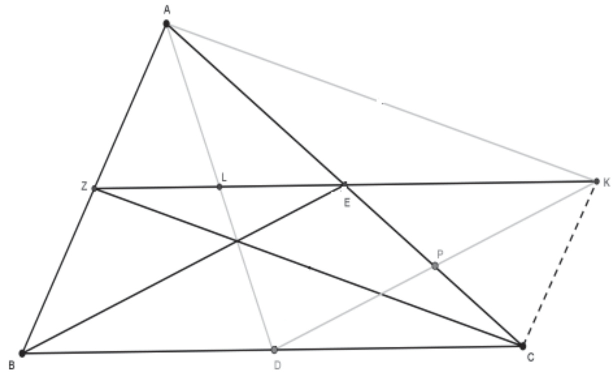
Στην ουσία ζητάει να αποδειχθεί ότι οι διάμεσοι τυχόντος τριγώνου σχηματίζουν **πάντα** τρίγωνο. Αυτό είναι πολύ όμορφο συμπέρασμα και διόλου προφανές…

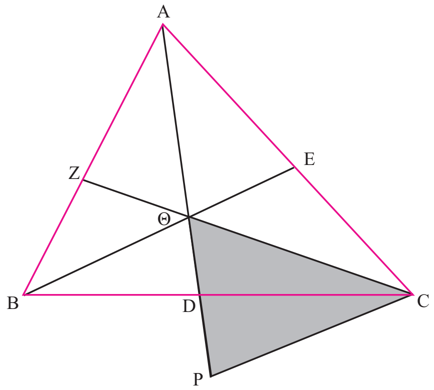
Θα αποδειχθεί μάλιστα ότι το τρίγωνο αυτό έχει εμβαδόν τα $\frac{3}{4}$ του εμβαδού του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη

Η απόδειξη που ακολουθεί είναι κατασκευαστική, δηλαδή θα κατασκευάσουμε τρίγωνο με πλευρές τις διαμέσους ενός τριγώνου ABC.

Έστω AD, BE, CZ οι διάμεσοι του τριγώνου ABC, και K το συμμετρικό του Z ως προς E. Το τετράπλευρο AZCK είναι φυσικά παραλληλόγραμμο (οι διαγώνιοί του αλληλοδιχοτομούνται) καθώς και το BDKE (αφού $EK \overset{//}{=} BD$). Άρα AK=ZC=m_c, DK=BE= m_b, και AD=m_a. Όμως EL//DC από το μέσο E της $AC \Rightarrow L$ μέσο του AD και $EL = \frac{DC}{2} = \frac{DB}{2} = \frac{EK}{2} \Rightarrow E$ βαρύκεντρο του $ADK \Rightarrow (ADK) = 3(AEK) = 3(AEZ) = 3 \cdot \frac{1}{4}(ABC) = \frac{3}{4}(ABC)$.





Ας τεθεί E=(ABC). Αν συμβολίσουμε με E_n το εμβαδόν του τριγώνου που προκύπτει έπειτα από n εφαρμογές της διαδικασίας έχουμε $E_1 = \frac{3}{4}E$, $E_2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot E$, $E_3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot E$ και γενικά $E_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot E$.

Έτσι το ζητούμενο άθροισμα είναι ίσο με

$$E_1 + E_2 + E_3 + \ldots + E_n + \ldots = \frac{3}{4}E + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot E + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot E + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot E + \ldots = \frac{\frac{3}{4}E}{1 - \frac{3}{4}} = 3E.$$

Β΄ Τρόπος

Αν P το συμμετρικό του βαρυκέντρου Θ του ABC ως προς D, τότε το τρίγωνο ΘPC έχει προφανώς πλευρές ίσες με τα $\frac{2}{3}$ των διαμέσων του αρχικού. Εξάλλου: $(\Theta PC) = 2(\Theta DC) = (\Theta BC) = \frac{1}{3}(ABC)$. Αν θεωρήσουμε το τρίγωνο $\Theta'P'C'$ όμοιο του ΘPC με λόγο ομοιότητας $\frac{\Theta'P'}{\Theta P} = \frac{P'C'}{PC} = \frac{C'\Theta'}{C\Theta} = \frac{3}{2}$, τότε $\Theta'P' = \frac{3}{2}\Theta P = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} m_a = m_a$ και ομοίως $P'C' = m_b$, $\Theta'C' = m_c$. Αλλά

$$\frac{(\Theta'P'C')}{(\Theta PC)} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow (\Theta'P'C') = \frac{9}{4}(\Theta PC) = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3}(ABC) = \frac{3}{4}(ABC) \text{ κ.λ.π.}$$

Σημείωση: *Στη 10η Μαθηματική Εβδομάδα (Θεσσαλονίκη 25 με 29 Απριλίου 2018, οι συνάδελφοι Τηλέμαχος Μπαλτσαβιάς και Γιώργος Μπολοτάκης παρουσίασαν ενδιαφέρουσες επεκτάσεις αυτού του θέματος (με τίτλο – Ο μετασχηματισμός της διαμέσου) μεταξύ των οποίων και τη διαπίστωση ότι η ακολουθία (T_v) των τριγώνων T_1, T_2, T_3, … όπου το T_1 έχει πλευρές τις διαμέσους του ABC, και καθ' ένα από τα T_i, $i \geq 2$ έχει πλευρές τις διαμέσους του προηγούμενου, αποτελείται από δύο υπακολουθίες T_1, T_3, T_5, … και T_2, T_4, T_6, … ομοίων τριγώνων. Η συνθήκη δε ($2a^2 = b^2 + c^2$ ή $2b^2 = c^2 + a^2$ ή $2c^2 = a^2 + b^2$) είναι ικανή και αναγκαία, ώστε ολόκληρη η ακολουθία (T_v) να είναι, ακολουθία ομοίων τριγώνων.*

- Προτείνουμε ως ανοιχτό πρόβλημα την Αλγεβρική απόδειξη της ύπαρξης τριγώνου με πλευρές τις διαμέσους δοθέντος τριγώνου ABC, δηλαδή αν $a \leq b \leq c$, οπότε ως γνωστόν $m_c \leq m_b \leq m_a$, τότε αρκεί να δειχτεί ότι $m_a < m_b + m_c$, ή $\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2} < \sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2} + \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$.

ΠΑΡΟΡΑΜΑΤΑ

- Στο τεύχος 107 (Θέμα Χημικής Σχολής) αντί του $O\hat{A}\Delta = 180^o - \hat{B}$ να γραφεί $O\hat{A}\Delta = 90^o - \hat{B}$ κ.λ.π. ή καλύτερα $A\hat{O}\Delta = 2\hat{B} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu 2B = \frac{O\Delta}{OA} = \ldots$
- Στη σελίδα 77 άσκηση 4 αντί του (ασκήσεις 8, 9) να γραφεί (ασκήσεις 2, 3)

ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΣΠΑΣΜΕΝΗΣ ΧΟΡΔΗΣ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ[1]

ΔΙΟΝΥΣΗΣ ΓΙΑΝΝΑΡΟΣ – ΠΥΡΓΟΣ

"Εάν εις τμήμα κύκλου αχθη τεθλασμένη γραμμή υποτείνουσα διάφορα τόξα και εκ του σημείου διχοτομίας του τμήματος αχθή κάθετος επι την μεγαλυτέραν των δύο ευθειών, η αχθείσα κάθετος διαιρεί την τεθλασμένην γραμμήν εις δύο ίσα μέρη."

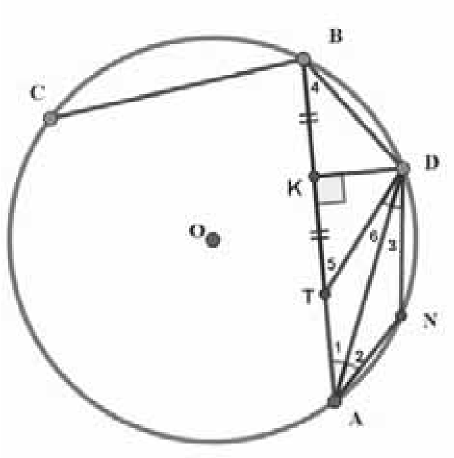
Αρχιμήδους Άπαντα Τόμος Γ΄
Μετάφρασις ΕΥΑΓΓΕΛΟΥ Σ. ΣΤΑΜΑΤΗ

Δίνουμε μια ελεύθερη διατύπωση της παραπάνω πρότασης προσαρμοσμένη στις ασκήσεις που ακολουθούν.

Δίνεται τεθλασμένη γραμμή ABC, $(AB > BC)$ εγγεγραμμένη σε κύκλο (O,R). Αν D το μέσον του τόξου $\overset{\frown}{ABC}$ και $DK \perp AB$ να αποδειχθεί ότι: AK=KB+BC.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα έχει λυθεί με πολλούς τρόπους. Θεωρούμε παιδαγωγικά σωστό να παρουσιάζουμε διάφορους τρόπους αντιμετώπισης ενός θέματος.
Για αυτό δίνουμε δύο τρόπους λύσης του, από τον Αρχιμήδη και τρείς τρόπους λύσης του από τον Thabit Ibn Qurra, μεταφραστή των έργων του Αρχιμήδη στα Αραβικά.

1ΟΣ ΤΡΟΠΟΣ (ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ)



Σημειώνουμε στον κύκλο σημείο N, έτσι ώστε $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{DN}$ και στην BA σημείο T έτσι ώστε BK=KT. Φέρουμε τις DA, DN, DT και AN.

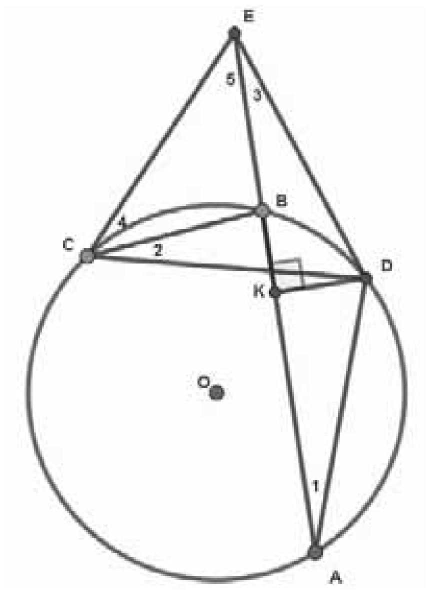
Παρατηρούμε ότι: $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (εγγεγραμμένες που βαίνουν σε ίσα τόξα), $\widehat{A_1} + \widehat{D_3} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DNA}$, $\widehat{B_4} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DNA}$ επομένως $\widehat{B_4} = \widehat{A_1} + \widehat{D_3}$, $\widehat{T_5} = \widehat{A_1} + \widehat{D_6} = \widehat{A_2} + \widehat{D_6}$ ως εξωτερική η $\widehat{T_5}$ του τριγώνου ADT.

Είναι $\widehat{T_5} = \widehat{B_4}$ (προσκείμενες γωνίες στη βάση του ισοσκελούς τριγώνου BDT), οπότε $\widehat{B_4} = \widehat{A_2} + \widehat{D_6} = \widehat{A_1} + \widehat{D_3}$.

Επειδή $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$, τότε $\widehat{D_3} = \widehat{D_6}$.

Τα τρίγωνα ADN και ADT έχουν την AD κοινή την DN=BD=DT και $\widehat{D_3} = \widehat{D_6}$ άρα είναι ίσα, οπότε AN=AT. Είναι $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$, $\overset{\frown}{DN} = \overset{\frown}{BD}$ οπότε και AN=BC. Τελικά έχουμε AT+TK=KB+BC ή AK=KB+BC.

[1] Για μερικές ακόμη αποδείξεις και εφαρμογές του εν λόγω θεωρήματος βλέπε: Σημειώσεις Γιώργου Σ. Τασσόπουλου για το Σεμινάριο Γεωμετρίας που οργάνωσε η Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (11-10-2014).



$2^{ΟΣ}$ ΤΡΟΠΟΣ (ΑΡΧΙΜΗΔΗΣ)

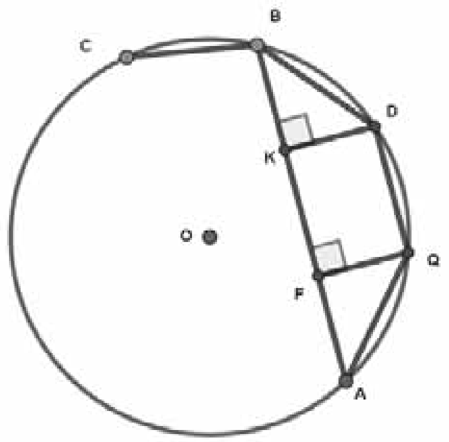
Προεκτείνουμε την KB προς το μέρος του B έτσι ώστε KE=KA. Τότε DE=DA (DK ύψος και διάμεσος του τριγώνου ADE).

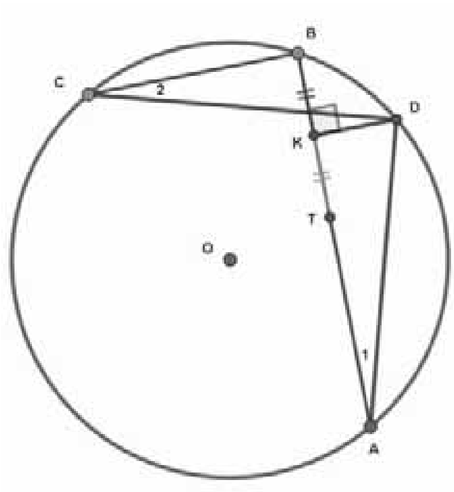
Επίσης είναι: $\widehat{DC}=\widehat{DA}\Leftrightarrow DC=DA$ (D μέσο του $\widehat{ABC}$), $\widehat{A_1}=\widehat{C_2}$ ως εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο και $\widehat{A_1}=\widehat{E_3}$ (ADE ισοσκελές τρίγωνο), οπότε $\widehat{C_2}=\widehat{E_3}$ και επειδή DC=DA=DE το τρίγωνο CDE είναι ισοσκελές και έτσι και $\widehat{C_4}=\widehat{E_5}$. Άρα και το τρίγωνο BCE είναι ισοσκελές με BC=BE. Από κατασκευή AK=KB+BE. Επειδή BE=BC έχουμε το ζητούμενο AK=KB+BC

$3^{ΟΣ}$ ΤΡΟΠΟΣ (THABIT IBN QURRA)

Φέρουμε την $DQ \parallel AB$.

Είναι φανερό ότι το AQDB είναι ισοσκελές τραπέζιο οπότε AQ=BD και AF=KB ($QF\perp AB$). Επειδή $\widehat{AQ}=\widehat{DB}$ και D μέσο του $\widehat{ABC}$ θα είναι και $\widehat{BC}=\widehat{DQ}$ άρα και BC=DQ=KF. Συνεπώς AF+FK=KB+BC ή AK=KB+BC.



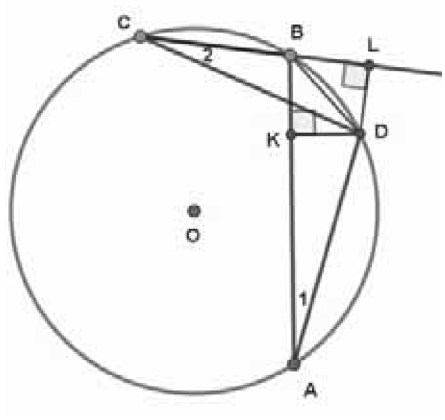


$4^{ΟΣ}$ ΤΡΟΠΟΣ (THABIT IBN QURRA)

Στην BA σημειώνουμε σημείο T, έτσι ώστε BK=KT. Επειδή D μέσο του τόξου $\widehat{ABC}$, θα είναι DA=DC. Έστω $\widehat{DBT}=\widehat{DTB}=a$ (1). Τότε : $\widehat{DA}=\widehat{DBC}=2a$. Η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{DBC}=\frac{1}{2}\left(360^\circ-2a\right)=180^\circ-a$. Επίσης λόγω της (1) και η $\widehat{DTA}=180^\circ-a$. Επομένως τα τρίγωνα ATD και CBD είναι ίσα, απ' όπου AT=BC, συνεπώς και AT+TK=KB+BC ή AK=KB+BC.

$5^{ος}$ *τρόπος (Thabit Ibn Qurra)*

Από το σημείο D φέρουμε κάθετη DL στην ευθεία CB. Επειδή $\widehat{A_1}=\widehat{C_2}$ και $\widehat{DA}=\widehat{DC}\Leftrightarrow DA=DC$, τα τρίγωνα AKD και CLD είναι ίσα, γιατί είναι ορθογώνια και έχουν τις υποτείνουσες ίσες και τις οξείες γωνίες $\widehat{A_1}=\widehat{C_2}$ ως εγγεγραμμένες που βαίνουν στο τόξο $\widehat{BO}$. Άρα LC=AK (1) και LD=DK. Φέρουμε τη DB. Τα τρίγωνα DLB και DKB είναι ίσα με βάση τα προηγούμενα, οπότε BL=BK (2). Από τις (1) και (2) έχουμε AK=LC=BC+BL=BK+BC.

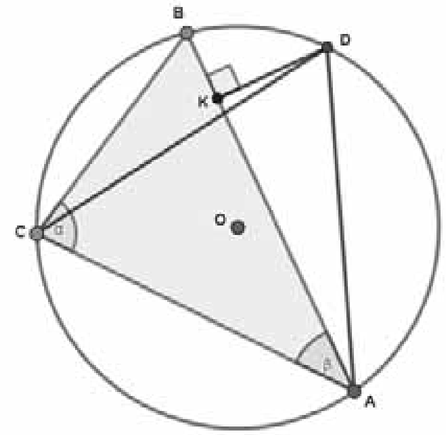


Εφαρμογές

1. **Να αποδειχτεί ότι:**

$$ημα+ημβ=2ημ\frac{α+β}{2}\cdot συν\frac{α-β}{2}$$

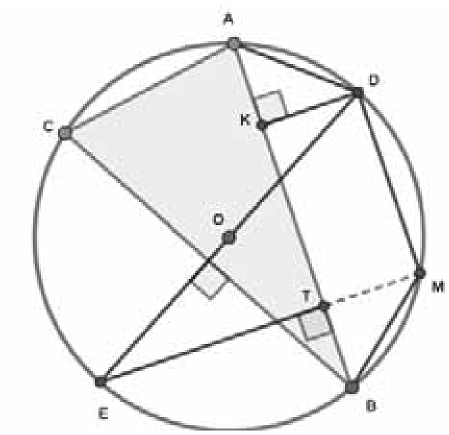
Απόδειξη: Σε κύκλο ακτίνας R εγγράψαμε τρίγωνο ABC με $AB > BC$.



Έστω D το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{ABC}$ και $DK \perp AB$. Ονομάζουμε $\widehat{ACB} = \alpha,\ \widehat{BAC} = \beta$. Τότε είναι $\overset{\frown}{ABC} = 2\alpha + 2\beta$, $\overset{\frown}{DBC} = \alpha + \beta$, $\overset{\frown}{BD} = \alpha + \beta - 2\beta = \alpha - \beta$ και $\widehat{BAD} = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$. Στο ισοσκελές τρίγωνο ADC έχουμε: $\widehat{ACD} = \dfrac{\alpha + \beta}{2} = \widehat{CAD}$. Από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ABC έχουμε $AB = 2R\eta\mu\alpha$ και $BC = 2R\eta\mu\beta$. Επίσης από τον ίδιο νόμο για το τρίγωνο ADC λαμβάνουμε: $DA = DC = 2R\eta\mu\dfrac{\alpha + b}{2}$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο AKD έχουμε $AK = AD\sigma\upsilon\nu\widehat{BAD} = 2R\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. Από την πρόταση του Αρχιμήδη, έχουμε:

$AK = \dfrac{1}{2}\cdot(AB + BC) = \dfrac{1}{2}\cdot(2R\eta\mu\alpha + 2R\eta\mu\beta) = R\cdot(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)$. Επομένως τελικά:

$R(\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta) = 2R\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ ή $\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta = 2\eta\mu\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

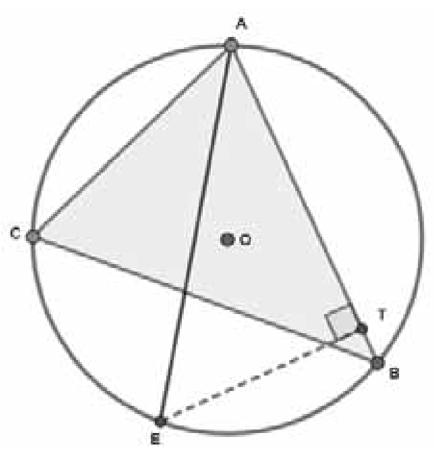


2. Έστω τρίγωνο ABC $(AB > BC)$, εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Αν DE είναι η διάμετρος του κύκλου, η κάθετη στη BC και DK, ET οι αποστάσεις των D και E από την πλευρά AB αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι KT=AC.

Απόδειξη: Η προέκταση της ET τέμνει τον κύκλο στο σημείο M. Είναι $\widehat{DME} = 90^{\circ}$ (εγγεγραμμένη που βαίνει σε ημικύκλιο), και το τετράπλευρο TMDK ορθογώνιο, επομένως DM=KT. Από την πρόταση του Αρχιμήδη, είναι: BK=KA+AC ή BT+TK=KA+AC και επειδή το τετράπλευρο BMDA είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι BT=KA, οπότε τελικά TK=AC ή DM=AC.

Σημείωση: (A) Μπορούμε τώρα εύκολα, να υπολογίσουμε τα μήκη των τμημάτων BT και AT συναρτήσει των πλευρών του τριγώνου ABC. Πράγματι, BT=AK και $BK = AK + AC = \dfrac{b+c}{2}$,

οπότε $AT = BK = \dfrac{b+c}{2}$ και $BT = AB - AT = c - \dfrac{b-c}{2} = \dfrac{c-b}{2}$



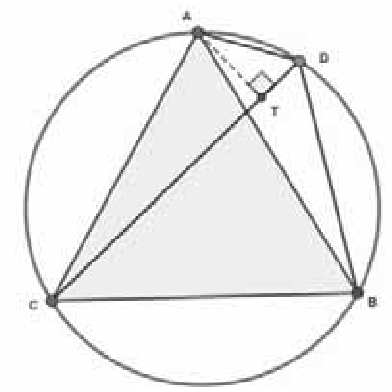
(B) Παρατηρούμε επίσης ότι τα τμήματα AE και AD είναι οι διχοτόμοι, εσωτερική- εξωτερική της γωνίας A του τριγώνου ABC. Ισχύουν επομένως οι συνθήκες της άσκησης «Σύνθετα θέματα, άσκηση 1, Σχολικό βιβλίο Γεωμετρίας έκδ. 2010». Άρα μέσω της εφαρμογής 2 του παρόντος άρθρου η προαναφερθείσα άσκηση του Σχολικού βιβλίου είναι συνέπειά της.

3. Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A}$ τριγώνου ABC τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του στο σημείο E. Να αποδειχθεί ότι: $b + c \le 2\cdot AE$

Απόδειξη: Έστω $ET \perp AB$. Από το προηγούμενο συμπέρασμα είναι: $AT = \dfrac{b+c}{2}$, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΤΕ θα είναι: $.AT \le AE$ δηλαδή $\frac{b+c}{2} \le AE$ ή $b+c \le 2\cdot AE$.

Σημείωση: Από το τρίγωνο ΑΤΕ μπορούμε επίσης να έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\frac{AT}{AE} \text{ ή } AE=\frac{AT}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}} \text{ ή } AE=\frac{1}{2}\cdot\frac{b+c}{\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}}$$

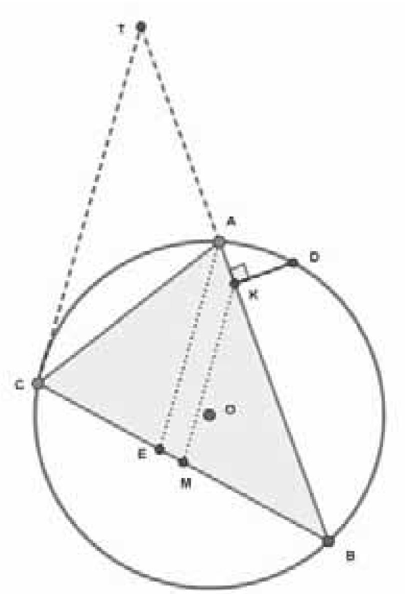


4. Ισόπλευρο τρίγωνο ABC είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Θεωρούμε τυχόν σημείο D του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ που δεν περιέχει το C. Να αποδείξετε ότι: DA+DB=DC.

Απόδειξη: Είναι $\hat{D}=\hat{B}=60^\circ$ και Α μέσο του τόξου $\overset{\frown}{BAC}$. Φέρουμε την $AT \perp CD$ οπότε: Επειδή $\hat{D}=60^\circ$ από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΤ θα έχουμε $DT=\frac{AD}{2}$ (1).

Από την πρόταση του Αρχιμήδη θα είναι BD+DT=TC ή BD+DT+DT=TC+DT ή BD+2DT=DC $\Rightarrow TD=\frac{DC-BD}{2}$ από όπου σε συνδυασμό με την (1) είναι $AD=DC-DB \Rightarrow DA+DB=DC$.

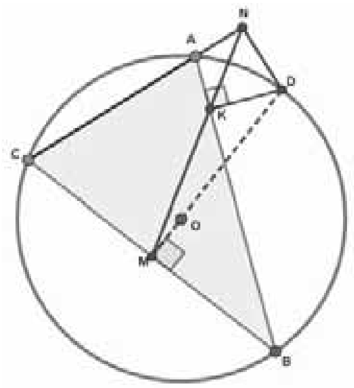
5. Τρίγωνο ABC $(AB>AC)$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο και D είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{BAC}$. Αν $DK \perp AB$ και Μ το μέσο της BC να αποδείξετε ότι $KM \parallel AE$ όπου ΑΕ=δ_α



Απόδειξη: Φέρουμε ευθεία από το C παράλληλη προς την ΑΕ που τέμνει την προέκταση της ΒΑ στο σημείο Τ. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι AT=AC=b. Τότε BT=b+c. Αλλά από την πρόταση του Αρχιμήδη είναι $BK=\frac{b+c}{2}$. Στο τρίγωνο BCT τα Κ και Μ συνδέουν τα μέσα των πλευρών του BT, BC αντίστοιχα, επομένως $KM \parallel CT$ και επειδή $CT \parallel AE$ θα είναι και $KM \parallel AE$.

Σημείωση: Παρατηρούμε ότι η ΚΕ διχοτομεί το εμβαδόν του τριγώνου ABC. Πράγματι, η διάμεσος ΑΜ διχοτομεί το εμβαδόν του τριγώνου ABC. Στο τραπέζιο ΑΚΜΕ είναι: (AEM)=(AEK) και (AMK)=(KEM), οπότε έχουμε:

(ACE)+(AEM)=(AMK)+(KMB) ή (ACE)+(AEK)=(KEM)+(KMB) ή (ACEK)=(KEB)=$\frac{1}{2}(ABC)$.



6. Τρίγωνο ABC $(AB>AC)$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο, D είναι το μέσο του τόξου $\overset{\frown}{BAC}$ και Μ είναι το μέσο της πλευράς BC. Φέρουμε την $DK \perp AB$. Η ευθεία ΜΚ τέμνει την προέκταση της CA στο σημείο Ν. Να βρεθεί το μέτρο της γωνίας $\widehat{DNA}$.

Λύση: Είναι φανερό ότι $DM \perp BC$. Εφόσον $DK \perp AB$, συμπεραίνουμε ότι η ευθεία ΚΜ είναι η ευθεία Simson για το σημείο D του τριγώνου ABC. Επομένως η γωνία $\widehat{DNA}=90^\circ$.

Ο Γιος της Νικαρέτης

Από το βιβλίο
του μαθηματικού **Ευαγγέλου Σπανδάγου**
με τίτλο "Ματωμένα Θεωρήματα"

Ο **Επίχαρμος,** ο πλούσιος καραβοκύρης από την Κόρινθο, έριξε μια τελευταία ματιά στον κήπο του σπιτιού του. Όλα ήταν στην εντέλεια κι έτοιμα να δεχθούν επιφανείς Κορίνθιους και Αθηναίους για τη μεγάλη εορτή. Ο κήπος είχε διακοσμηθεί κατάλληλα και είχε χωρισθεί σε δύο τμήματα. Το ένα προοριζόταν για τους άνδρες και το άλλο για τα γυναικόπαιδα. Την ώρα της προσέλευσης στήθηκε στην είσοδο στολισμένος και χαμογελαστός περιστοιχιζόμενος από υπηρέτες για να υποδεχτεί τους προσκεκλημένους του. Η προσέλευση κράτησε αρκετή ώρα. Ο **Επίχαρμος** έσφιξε εκατοντάδες χέρια καλεσμένων που φορούσαν τα πιο φανταχτερά τους ρούχα για να τραβήξουν τα βλέμματα.

Ένας από τους τελευταίους επισκέπτες ήταν ο **Θεάγης,** ένας Κορίνθιος λόγιος, που συνοδευόταν από έναν νεαρής ηλικίας άνδρα, ο οποίος τα είχε λίγο χαμένα διότι είχε βρεθεί έξω από τα νερά του.

«Φίλτατε **Επίχαρμε**», είπε εγκάρδια, «να σου γνωρίσω τον Αθηναίο **Θεαίτητο,** έναν από τους μεγάλους μαθηματικούς της Ακαδημίας».

Τα μάτια του Κορίνθιου άστραψαν. Και ποιος δεν είχε ακουστά για την Ακαδημία του **Πλάτωνος**.

«Μεγάλη μου τιμή που σε γνωρίζω **Θεαίτητε.** Να σας οδηγήσω σε μια διακεκριμένη θέση. . .»

Ο **Θεάγης** τον διέκοψε:

«Δεν χρειάζεται. Ο **Θεαίτητος** θα μείνει για λίγο μαζί μας διότι πρέπει να επιστρέψει στην Αθήνα».

«Τότε να του γνωρίσω την ανιψιά μου τη **Νικαρέτη**. Ασχολείται κι αυτή με τα μαθηματικά. Οι δάσκαλοί της εδώ δεν την αντέχουν από τις πολλές ερωτήσεις που τους υποβάλλει».

Ο **Θεαίτητος** έσφιξε τα χείλη διότι είχε βαρεθεί κατά τις ελάχιστες κοινωνικές εκδηλώσεις που πήγαινε να συναντά "ιδιοφυΐες στα μαθηματικά" και ιδίως, γυναικείες "ιδιοφυΐες".

Η δεκαοκτάχρονη **Νικαρέτη** με ύφος κάθε άλλο παρά ντροπαλό πλησίασε τον **Θεαίτητο**.

«Δάσκαλε», του είπε χωρίς περιστροφές, «έχω ακούσει για τη δουλειά σου. Κατασκεύασες το κανονικό οκτάεδρο[1] και ασχολείσαι με το κανονικό εικοσάεδρο[2] και τους άρρητους[3] αριθμούς».

Ο **Θεαίτητος** την κοίταξε με έκπληξη. Στα εικοσιοκτώ του χρόνια δεν είχε συναντήσει γυναίκα, πόσο μάλλον νεαρή κοπέλα, που να γνωρίζει κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων.

Θέλοντας όμως να δοκιμάσει τις γνώσεις της, τη ρώτησε:

«Γνωρίζεις τα άλλα κανονικά στερεά;»

Με έκπληξη άκουσε τη **Νικαρέτη** να του λέει:

«Γνωρίζω το τετράεδρο[4], τον κύβο και το δωδεκάεδρο[5]. Πολύ μ' αρέσει η κατασκευή του δωδεκάεδρου διότι απαιτεί τη γνώση της χρυσής τομής[6].»

Ο **Θεαίτητος** έμεινε άναυδος! Μια νεαρή και όμορφη γυναίκα γνώριζε τη χρυσή τομή, της οποίας τις εφαρμογές, χρόνια τώρα, προσπαθούσαν να προσδιορίσουν εκατοντάδες σοφά κεφάλια.

---

[1] Πολύεδρο με έδρες 8 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα.

[2] Πολύεδρο με έδρες 20 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα.

[3] Είναι οι αριθμοί που δεν παίρνουν τη μορφή $\frac{\alpha}{\beta}$, όπου α, β ακέραιοι, $\beta \neq 0$.

[4] Πολύεδρο με έδρες 4 ίσα ισόπλευρα τρίγωνα.

[5] Πολύεδρο με έδρες 12 ίσα κανονικά πεντάγωνα.

[6] Χρυσή τομή ονομάζεται η διαίρεση ενός ευθυγράμμου τμήματος σε άκρο και μέσο λόγο. Δηλαδή, αν δίνεται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, να βρεθεί ένα σημείο Γ ώστε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma B}$.

Η αυγή βρήκε τον **Θεαίτητο** και τη **Νικαρέτη** καθισμένους γύρω από ένα τραπέζι να ζωγραφίζουν σχήματα σε μια περγαμηνή. Όταν ο **Αθηναίος** φιλόσοφος συνειδητοποίησε ότι πέρασε ο χρόνος, σηκώθηκε με βαριά καρδιά.

«Πρέπει να φύγω. Θα σε κρατώ ενήμερη για την πορεία της δουλειάς μου. Θα σε περιμένω το συντομότερο στην Αθήνα».

Της είπε τόσα πολλά που στο τέλος αναρωτήθηκε κι ο ίδιος αν η αιτία ήταν άλλη και όχι τα μαθηματικά, για την πολύωρη συναναστροφή τους.

Την ώρα που την αποχαιρετούσε έβγαλε από τον λαιμό του ένα κόσμημα. Ήταν μια πεντάλφα από ασήμι που ήταν δεμένη σ' ένα δερμάτινο κορδόνι.

«Πάρε αυτό. Είναι το έμβλημα των Πυθαγόρειων».

«Ξέρω, ξέρω. . .», απάντησε με καμάρι η μικρή. «Είναι το αστεροειδές κανονικό πεντάγωνο».

Ο **Θεαίτητος** γούρλωσε τα μάτια από θαυμασμό!

«Η μαθηματική επιστήμη δεν έχει μυστικά για τη **Νικαρέτη**», σκέφτηκε.

«Θα το φορώ για να μου θυμίζει τη γνωριμία μας και όταν έρθει η ώρα, θα το περάσω στο λαιμό του πρώτου μου παιδιού», ήταν τα τελευταία της λόγια.

***

Η κοπέλα συναντήθηκε πολλές φορές με τον **Θεαίτητο**. Η λατρεία της για τα μαθηματικά την οδήγησε να γίνει ένα είδος "εξωτερικής" μαθήτριας στην Ακαδημία. Μετά όμως από ένα περίπου χρόνο χάθηκε. Μάταια προσπαθούσε ο **Θεαίτητος** να τη βρει. Κανείς δεν γνώριζε που είχε πάει. Οι Κορίνθιοι φίλοι του τηρούσαν μια περίεργη σιωπή . . .

***

Έτος 369 π.Χ. Οι πολίτες των Αθηνών ειδοποιήθηκαν ότι κηρύχθηκε πόλεμος μεταξύ Αθηναίων και Κορινθίων.

«Έχουμε συμμαχήσει με τους Σπαρτιάτες και θα νικήσουμε τους παράσπονδους Κορίνθιους», έλεγε η ανακοίνωση των αρχόντων.

***

Η μάχη στην πεδιάδα των Μεγάρων κόντευε να τελειώσει. Άλλωστε, ο Ήλιος πλησίαζε στη δύση του. Ο Αθηναίος εθελοντής στρατιώτης **Θεαίτητος** ο μαθηματικός, ο εταίρος του **Πλάτωνος**, κουρασμένος και κάθιδρος, ετοιμάστηκε να αποθέσει το δόρυ και την ασπίδα του, όταν είδε ένα νεαρό Κορίνθιο να κατευθύνεται τρέχοντας εναντίον του με την λόγχη προτεταμένη. Προσπάθησε να τον αποφύγει, αλλά η αιχμή της χώθηκε στα πλευρά του. Πίδακας σωστός, πετάχτηκε το αίμα. Ο στρατιώτης τον πλησίασε πλάγια στην προσπάθειά του να απομακρυνθεί. Ασυναίσθητα, άπλωσε ο φιλόσοφος το χέρι του στο λαιμό του στρατιώτη σε μια προσπάθεια ύστερης άμυνας. Στο χέρι του έμεινε ένα κόσμημα που το έσφιξε με μανία, λες και θα έφερνε τη λύτρωση. Οι δυνάμεις του όμως, γρήγορα τον εγκατέλειψαν. Έπεσε κάτω σφαδάζοντας από τον πόνο.

Αργά το βράδυ τον μετέφεραν στην Αθήνα, όπου και πέθανε μετά από λίγες ημέρες. Προτού πεθάνει, ψιθύρισε:

«Ο γιος της **Νικαρέτης** . . . ω Πάνσοφο Ον! Γιατί το έταξες έτσι;»

Ο **Θεαίτητος** δεν θα μάθαινε ποτέ ότι ο Κορίνθιος στρατιώτης που τον λάβωσε ήταν και δικός του γιος. Η **Νικαρέτη** η Κορίνθια, η μαθηματικός, είχε κρατήσει το μυστικό για τον εαυτό της. Η μοίρα όμως τα έφερε έτσι, ώστε ο μεγάλος **Θεαίτητος** να φύγει στα 48 του χρόνια από το χέρι του γιου του που ποτέ δεν γνώρισε.

Παρατήρηση: Εκτός από τους μαθηματικούς **Θεαίτητο** και **Νικαρέτη**, τα άλλα πρόσωπα είναι φανταστικά. Σύμφωνα με τον **Διογένη** τον Λαέρτιο, ο **Θεαίτητος** τραυματίστηκε στον Κορινθιακό Πόλεμο το 369 π.Χ. και πέθανε από τα τραύματά του. Η υπόλοιπη διήγηση είναι φανταστική.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΕΣ ... ΣΥΖΗΤΗΣΕΙΣ (ΙΙΙ)

Νίκου Θ. Αντωνόπουλου

Περί συνόλων και αριθμών

Καθηγητής: Ας ξεκινήσουμε πρώτα με την έννοια του συνόλου. Τι αντιλαμβανόμαστε όταν ακούμε τη λέξη σύνολο;

Μαθητής Α: Απ' ότι θυμάμαι, νομίζω ότι η έννοια του συνόλου, είναι ταυτόσημη με την έννοια της συλλογής.

Καθηγητής: Αν θελήσουμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό που έδωσε ο Cantor για το σύνολο, θα πρέπει να δεχθούμε ως σύνολο, κάθε συλλογή αντικειμένων ή διανοημάτων σαφώς καθορισμένων, τα οποία θεωρούμε ως μια ολότητα. Τα σύνολα τα συμβολίζουμε με τα κεφαλαία γράμματα Α, Β, Γ κτλ. και για να δηλώσουμε ότι κάποιο αντικείμενο α ανήκει στο σύνολο Α ή είναι, όπως λέμε, στοιχείο του συνόλου Α γράφουμε $\alpha \in A$, ενώ για να δηλώσουμε ότι το α δεν ανήκει στο Α γράφουμε $\alpha \notin A$ Τα σύνολα τα παρουσιάζουμε είτε αναγράφοντας ένα - ένα τα στοιχεία τους είτε περιγράφοντας την ιδιότητα που ορίζει τα στοιχεία τους, για παράδειγμα

$A = \{3, 4, 5\}$ ή Α={x| xφυσικός μεταξύ 2 και 6}

Βέβαια, όπως αποδείχθηκε αργότερα, ο ορισμός αυτός έχει κάποια προβλήματα.

Μαθητής Β: Γιατί είπατε ότι ο ορισμός έχει κάποια προβλήματα.

Καθηγητής: Ο ορισμός αυτός, αν συνδυαστεί με τη δυνατότητα σχηματισμού συνόλων, όπως σύνολα που έχουν ως στοιχεία τον εαυτό τους και το σύνολο όλων των συνόλων οδηγεί σε αντιφάσεις τις οποίες στα Μαθηματικά τις λέμε παράδοξα.

Για το λόγο αυτό στη σύγχρονη μαθηματική θεμελίωση της θεωρίας συνόλων δεχόμαστε ότι ένα μαθηματικό αντικείμενο δεν μπορεί να είναι συγχρόνως ένα σύνολο και ένα στοιχείο αυτού του συνόλου. Επίσης, δεχόμαστε ότι, οι έννοιες «σύνολο» και «στοιχείο» συνόλου, θεωρούνται ως αρχικές.

Μαθητής Β: Τι σημαίνει αυτό;

Καθηγητής: Σύμφωνα με τη σύγχρονη αξιωματική θεμελίωση, μια μαθηματική θεωρία αποτελείται από:

- Κάποιους μη οριζόμενους ή αρχικούς όρους,
- Πιθανώς από κάποιους προσδιορισμένους όρους (βασισμένους στους απροσδιόριστους όρους),
- Από ορισμένες διατυπώσεις που τις λέμε αξιώματα και
- Από άλλες διατυπώσεις που λέγονται θεωρήματα και τα οποία συνάγονται λογικά από τα αξιώματα.

Τα αξιώματα, ουσιαστικά μας παρέχουν, την απαραίτητη γνώση για τους μη οριζόμενους όρους.

Μαθητής Α: Αξιώματα έχουμε συναντήσει στη Γεωμετρία.

Καθηγητής: Έχεις δίκιο. Η πρώτη αξιωματική παρουσίαση μαθηματικής θεωρίας είναι η θεμελίωση της Γεωμετρίας που παρουσίασε περίπου 400 χρόνια π. Χ. ο Ευκλείδης στα «Στοιχεία» του. Βέβαια αυτός δεν χρησιμοποίησε αρχικούς όρους και προσπάθησε να ορίσει τα πάντα καταφεύγοντας στην περίπτωση του σημείου και της ευθείας σε ιδιότητες που δεν έχουν ή ασαφείς ορισμούς. Στη σύγχρονη θεμελίωση της Γεωμετρίας που έγινε από τον Hilbert οι όροι «σημείο» και «ευθεία» θεωρούνται ως αρχικοί.

Αλλά ας επανέλθουμε στα σύνολα. Πότε ένα σύνολο λέμε ότι είναι το κενό;

Μαθητής Α: Όταν δεν έχει στοιχεία.

Καθηγητής: Ωραία! Το κενό σύνολο το συμβολίζουμε με $\varnothing$.

Μαθητής Β: Κανένα στοιχείο; Μπορείτε να μας δώσετε ένα παράδειγμα;

Καθηγητής: Βεβαίως! Ας θεωρήσουμε την εξίσωση $x^2 - 1 = 0$ στο σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών. Αν πούμε σύνολο λύσεων Λ της εξίσωσης, το σύνολο που σχηματίζουν οι αριθμοί που είναι λύσεις της, ποιο νομίζεται ότι είναι το σύνολο λύσης της;

Μαθητής Β: Εύκολο. Είναι το Λ={-1, 1}.

Καθηγητής: Θεωρήστε τώρα, πάλι στο $\mathbb{R}$, την εξίσωση $x^2+1=0$. Ποιο νομίζετε ότι είναι το σύνολο λύσεών της;

Μαθητής Α: Α..., κατάλαβα. Δεν έχει πραγματικές λύσεις, οπότε $\Lambda = \varnothing$.

Καθηγητής: Ωραία. Μήπως θυμάστε τώρα, πότε δυο σύνολα λέγονται ίσα;

Μαθητής Α : Μήπως, όταν έχουν τα ίδια στοιχεία.

Καθηγητής: Μάλιστα. Δυο σύνολα Α και Β λέγονται ίσα και συμβολίζουμε $\mathbf{A}=\mathbf{B}$, όταν για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$, ισχύει $\mathbf{x}\in\mathbf{B}$ και αντίστροφα. Και τώρα, πότε δυο σύνολα είναι διαφορετικά;

Μαθητής Α: Όταν έχουν διαφορετικά στοιχεία;

Καθηγητής: Τι εννοείς; Ότι διαφέρουν σε όλα τα στοιχεία τους ή υπάρχει τουλάχιστον ένα διαφορετικό στοιχείο σε κάποιο σύνολο.

Μαθητής Γ: Τα σύνολα διαφέρουν σε ένα τουλάχιστον στοιχείο.

Καθηγητής: Πολύ σωστά. Προσέξτε ιδιαιτέρα το σχηματισμό των αρνήσεων. Για παράδειγμα αν έχουμε την έκφραση «για κάθε $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$, (ισχύει) $\mathbf{P(x)=0}$» τότε η άρνηση της είναι «υπάρχει (ένα τουλάχιστον) $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$, ώστε (να ισχύει) $\mathbf{P(x)\neq 0}$».

Ας θυμηθούμε τώρα πότε ένα σύνολο Α λέγεται υποσύνολο ενός συνόλου Β.

Μαθητής Α: Όταν για κάθε στοιχείο $x\in A$, ισχύει επίσης $\mathbf{x}\in\mathbf{B}$.

Καθηγητής: Ωραία. Στην περίπτωση αυτή συμβολίζουμε $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ και μπορούμε να πούμε επίσης ότι το Β είναι υπερσύνολο του Α. Τι σχέση λέτε να έχει το κενό με τα άλλα σύνολα;

Μαθητής Γ: Είναι υποσύνολο κάθε συνόλου.

Μαθητής Β: Μια στιγμή. Σύμφωνα με αυτά που είπαμε παραπάνω, θα πρέπει, αν πάρουμε τυχαίο σύνολο Α, να ισχύει «Αν $\mathbf{x}\in\varnothing$, τότε $\mathbf{x}\in\mathbf{A}$». Μα αυτό δεν στέκει! Τι θα πει $\mathbf{x}\in\varnothing$;

Καθηγητής: Έχεις δίκιο να θέτεις το ερώτημα. Στα Μαθηματικά, εκφράσεις της μορφής «αν p τότε q» τις λέμε συνεπαγωγές με υπόθεση p και συμπέρασμα q. Μια συνεπαγωγή είναι ψευδής μόνο αν η υπόθεσή της είναι αληθής και το συμπέρασμά της ψευδές. Σε όλες τις άλλες περιπτώσεις είναι αληθής.

Στην περίπτωσή μας έχουμε συνεπαγωγή με ψευδή την υπόθεση ($\mathbf{x}\in\varnothing$) και σαν τέτοια είναι πάντοτε αληθής, ανεξάρτητα από το συμπέρασμα.

Ας επανέλθουμε όμως. Φαντάζομαι πως όλοι συμφωνούμε ότι αν $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ και $\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}$, τότε $\mathbf{A}=\mathbf{B}$. Ας περάσουμε τώρα να μιλήσουμε για την έννοια της ισοδυναμίας δυο συνόλων. Πότε θεωρείτε ότι δυο σύνολα λέμε ότι είναι ισοδύναμα;

Μαθητής Α: Όταν είναι ίσα;

Μαθητής Β: Αφού την ισότητα την ορίσαμε. Γιατί τώρα να μιλήσουμε για ισοδύναμα, αν είναι το ίδιο πράμα; Μήπως αυτά που έχουν το ίδιο πλήθος στοιχείων;

Καθηγητής: Όταν μιλάμε για σύνολα που δεν έχουν άπειρο πλήθος στοιχείων, είναι όπως λέμε πεπερασμένα, συμβαίνει ακριβώς αυτό που λες. Προκειμένου όμως να καλύψουμε όλες τις περιπτώσεις, γενικά λέμε ότι, **δύο σύνολα Α και Β είναι ισοδύναμα**, και συμβολίζουμε $\mathbf{A}\sim\mathbf{B}$, όταν υπάρχει μια «1-1» αντιστοίχηση των στοιχείων τους, δηλαδή όταν μπορούμε σε κάθε στοιχείο του Α να αντιστοιχήσουμε ένα στοιχείο του Β και αντιστρόφως.

Αλλά, αφού αναφερθήκαμε σε σύνολα με άπειρο πλήθος στοιχείων ας περάσουμε να μιλήσουμε για πεπερασμένα και άπειρα (απέραντα) σύνολα ξεκινώντας με το σύνολο $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\ldots\}$ των θετικών ακεραίων. Το σύνολο

$$\mathbb{N}^*_\kappa=\{\nu\in\mathbb{N}^*\mid\nu\leq\kappa\}$$

το λέμε αρχικό απόκομμα των θετικών ακεραίων μήκους κ. Τώρα, ένα σύνολο Σ θα λέμε ότι είναι:

- **Πεπερασμένο,** όταν είτε ., είτε $\Sigma\sim\mathbb{N}^*_\kappa$ για κάποιο θετικό ακέραιο κ.
- **Άπειρο,** όταν $\Sigma\neq\varnothing$ και το Σ δεν είναι ισοδύναμο με κάποιο αρχικό απόκομμα του $\mathbb{N}^*$.

Ειδικά, αν για ένα απειροσύνολο Σ ισχύει $\Sigma\sim\mathbb{N}$, τότε λέμε ότι το Σ είναι **αριθμήσιμο.**

Μαθητής Γ: Προηγουμένως μας περιορίσατε τον ορισμό για τα ισοδύναμα σύνολα στην περίπτωση που δεν έχουμε άπειρα στοιχεία. Δηλαδή αν έχουμε άπειρα στοιχεία τι συμβαίνει;

Καθηγητής: Θα ξεκινήσω με κάτι που μπορεί να σας φανεί περίεργο σε πρώτη προσέγγιση.

Ενώ τα πεπερασμένα σύνολα δεν μπορεί να είναι ισοδύναμα με κάποιο υποσύνολό τους, κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί στα απειροσύνολα.

Μαθητής Α: Πως είναι δυνατόν να είναι ισοδύναμα με υποσύνολό τους;

Καθηγητής: Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών και το σύνολο $\mathbb{N}_\alpha$ των φυσικών άρτιων. Τότε για τη συνάρτηση f: $\mathbb{N}\to\mathbb{N}_\alpha$ με f(ν)=2ν,

εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι «1-1» και επιπλέον $f(\mathbb{N})=\mathbb{N}_\alpha$, που σημαίνει ότι $\mathbb{N}\sim\mathbb{N}_\alpha$

Μαθητής Β: Το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων που είναι υπερσύνολο του $\mathbb{N}$, είναι αριθμήσιμο;

Καθηγητής: Αρκεί να βρούμε μια συνάρτηση που να αποκαθιστά αυτή την ισοδυναμία. Τι λέτε για τη συνάρτηση $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ με $f(\kappa)=\begin{cases}2\kappa, & \kappa\geq 0\\ -2\kappa-1, & \kappa<0\end{cases}$

Μαθητής Γ: Ο πρώτος κλάδος απεικονίζει τους φυσικούς στους άρτιους, όπως πριν, ο δεύτερος τους αρνητικούς ακέραιους στους περιττούς,… ναι είναι μια κατάλληλη συνάρτηση. Αντιστρόφως, εύκολα βρίσκουμε ότι κάθε μη αρνητικός ακέραιος είναι εικόνα κάποιου ακεραίου, μέσω της f.

Καθηγητής: Είναι «1-1». Τι λέτε;

Μαθητής Α: Ναι… Αφού κάθε κλάδος της είναι «1-1».

Καθηγητής: Θα έλεγες το ίδιο και για τη συνάρτηση με τύπο $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\geq 2\\ 4-x, & x<2\end{cases}$.

Μαθητής Α: Ναι… Και σ' αυτή κάθε κλάδος της είναι «1-1».

Καθηγητής: Ωραία! Μου βρίσκεις σε παρακαλώ το f(1) και το f(2);

Μαθητής Α: Ναι! f(1)=3, f(2)=3. Ωχ…! Είναι το ίδιο!

Καθηγητής: Για να είναι «1-1» μια συνάρτηση της μορφής $f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\in A\\ f_2(x), & x\in B\end{cases}$

δεν αρκεί να είναι «1-1» η f_1 στο Α και η f_2 στο Β. Εκτός από αυτό, απαιτείται επιπλέον να ισχύει $f_1(A)\cap f_2(B)=\varnothing$ κάτι που συμβαίνει στη συνάρτηση που ορίσαμε προηγουμένως στους ακέραιους και δεν συμβαίνει στην τελευταία.

Για να προλάβω την επόμενη ερώτηση, στη συνέχεια θα σας δώσω κάποιες πληροφορίες και θέλω να μου απαντήσετε σε μια ερώτηση.

Το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών είναι αριθμήσιμο και το σύνολο $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών δεν είναι αριθμήσιμο, είναι όπως λέμε **υπεραριθμήσιμο** και η ένωση δυο αριθμήσιμων συνόλων είναι σύνολο αριθμήσιμο. Μπορείτε να μου πείτε τι συμβαίνει με το σύνολο των άρρητων αριθμών;

Μαθητής Α: «Ένωση»; Τι εννοούμε όταν λέμε «ένωση»;

Καθηγητής: Έχεις δίκιο. Αν και έχουμε αναφέρει ήδη την τομή και οι έννοιες ορίζονται στο σχολικό βιβλίο Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, ας κάνουμε μια μικρή παρένθεση.

Αν έχουμε δυο σύνολα Α, Β τότε το σύνολο που περιέχει όλα τα στοιχεία τους (φυσικά τα κοινά στοιχεία τα γράφουμε μια φορά) λέγεται ένωση των συνόλων Α, Β και συμβολίζεται με $A\cup B$.

Επίσης, το σύνολο που σχηματίζουν τα κοινά στοιχεία των Α, Β το λέμε τομή των συνόλων Α, Β και το συμβολίζουμε με $A\cap B$.

Ας επανέλθουμε όμως στο σημείο που σταματήσαμε.

Μαθητής Β: Πως ορίζουμε το σύνολο των άρρητων αριθμών;

Καθηγητής: Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί, όπως ο $\sqrt{2}$, που δεν είναι ρητοί. Το σύνολο των άρρητων αποτελείται από όλους αυτούς, δηλαδή αν το συμβολίσουμε με $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, τότε

$$\mathbb{R}-\mathbb{Q}=\{x\in\mathbb{R}\mid x\notin\mathbb{Q}\}.$$

Μαθητής Γ: Μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\mathbb{R};$$

Καθηγητής: Βεβαίως, προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της διαφοράς $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$.

Μαθητής Γ: Ωραία. Τότε, αν υποθέσουμε ότι το σύνολο των άρρητων είναι αριθμήσιμο, το ίδιο θα συμβαίνει και με την ένωση $\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\mathbb{R}$, που είναι άτοπο, διότι όπως είπαμε το σύνολο των πραγματικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο. Άρα το σύνολο των άρρητων είναι υπεραριθμήσιμο.

Μαθητής Β: Γιατί όταν μας μιλάνε για άρρητους αριθμούς μας αναφέρουν πάντα το $\sqrt{2}$; Δεν μπορούμε να γράψουμε κάποιο άρρητο χωρίς να χρησιμοποιήσουμε το σύμβολο της ρίζας;

Καθηγητής: Ο λόγος για τον οποίο σχεδόν πάντα όταν μιλάμε για άρρητους αναφέρουμε τον αριθμό $\sqrt{2}$ είναι περισσότερο ιστορικός. Έχει να κάνει με την ανακάλυψη, από τους Πυθαγόρειους, της ύπαρξης άρρητων αριθμών και συγκεκριμένα η αδυναμία τους να εκφράσουν το μήκος της διαγωνίου τετραγώνου με πλευρά 1 (που είναι ίση με $\sqrt{2}$) με ρητό κλάσμα (λόγο μεγεθών). Η ανακάλυψη αυτή, που κατά πολλούς οφείλεται στον Ίππασο, επέφερε καταλυτικό πλήγμα στην κοσμοθεωρία τους, που πρέσβευε ότι ο κόσμος δομείται κατά ρητό τρόπο, δηλαδή όλες οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος είναι σχέσεις λόγων θετικών ακέραιων αριθμών.

Αλλά ας προσπαθήσουμε να γράψουμε άρρητο αριθμό χωρίς τη χρήση του συμβόλου της ρίζας. Αποδεικνύεται, ότι κάθε ρητός αριθμός, μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή περιοδικού δεκαδικού και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι αν κατασκευάσουμε έναν αριθμό με άπειρα δεκαδικά ψηφία, χωρίς να παρουσιάζει περιοδική επανάληψη κάποιου τμήματος του, τότε ο αριθμός αυτός είναι άρρητος. Τι λέτε, ο αριθμός

$$0{,}101001000100001\ldots$$

είναι περιοδικός;

Μαθητής Α: Τι χαρακτηριστικό έχει αυτός;

Καθηγητής: Μετά την υποδιαστολή αποτελείται από μονάδες και μηδενικά, το πρώτο ψηφίο είναι η μονάδα, και ανάμεσα στην πρώτη και τη δεύτερη μονάδα έχουμε ένα μηδενικό, ανάμεσα στη δεύτερη και την τρίτη, δύο μηδενικά, ανάμεσα στην τρίτη και την τέταρτη τρία μηδενικά κοκ.

Μαθητής Γ: Ο τρόπος που τον κατασκευάσαμε εγγυάται ότι δεν έχουμε κάπου επανάληψη του ίδιου τμήματος, οπότε ο αριθμός είναι άρρητος.

Καθηγητής: Ακριβώς!

Μαθητής Α: Το σύνολο των άρρητων είναι «μεγαλύτερο» από εκείνο των ρητών; Και αν ναι, πόσο «μεγαλύτερο» είναι το σύνολο $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ από το από το σύνολο $\mathbb{Q}$;

Καθηγητής: Ας μιλήσουμε λίγο γενικότερα. Αυτό που διαφοροποιεί το σύνολο $\mathbb{R}$ από τα άλλα σύνολα είναι το λεγόμενο αξίωμα της πληρότητας που έχει ως συνέπεια την πυκνότητα των στοιχείων του. Χάρη σ' αυτή κωδικοποιήθηκαν και κατασκευάστηκαν, από τον Dedekind, οι πραγματικοί αριθμοί, με μια μέθοδο (τομές Dedekind) τις ρίζες της οποίας συναντάμε σε εργασία του Εύδοξου που παρουσιάστηκε στο $5^{ο}$ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Στο σύνολο $\mathbb{R}$, θα μπορούσαμε να πούμε ότι δεν υπάρχουν «τρύπες». Τόσο οι ρητοί, όσο και οι άρρητοι είναι πυκνοί στο $\mathbb{R}$.

Μαθητής Α: Τι σημαίνει αυτό;

Καθηγητής: Ότι ανάμεσα σε δυο πραγματικούς αριθμούς, υπάρχει πάντα ένας τουλάχιστον ρητός αριθμός. Βέβαια, αυτό σημαίνει στην πράξη, ότι υπάρχουν άπειροι.

Μαθητής Β: Μπορείτε να μας το αποδείξετε;

Καθηγητής: Η απόδειξη που έχω υπόψη μου δεν είναι τόσο απλή. Χρησιμοποιεί την Αρχιμήδεια ιδιότητα (που σχετίζεται με την πληρότητα) των πραγματικών αριθμών και , καλό είναι να την αποφύγουμε.

Μαθητής Γ: Τι λέει η Αρχιμήδεια ιδιότητα;

Καθηγητής: Για να το πούμε με απλά λόγια, λέει ότι, αν πάρουμε δυο θετικούς πραγματικούς αριθμούς α (οσοδήποτε μικρό) και β (οσοδήποτε μεγάλο) μπορούμε πάντα να βρούμε ένα θετικό ακέραιο ν ώστε $\nu\cdot\alpha>\beta$.

Για να επανέλθουμε όμως στο θέμα μας, μπορούμε να πούμε κάποια προκαταρτικά και κατόπιν να αποδείξουμε την πυκνότητα των άρρητων στο $\mathbb{R}$. Φαντάζομαι να συμφωνείτε ότι οι πράξεις μεταξύ ρητών δίνουν ως αποτέλεσμα ρητό αριθμό. Όπως λέμε το σύνολο των ρητών είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού (και τις «παράγωγες» τους αφαίρεση και διαίρεση). Τι λέτε, συμβαίνει το ίδιο και με τους άρρητους;

Μαθητής Β: Γιατί όχι;

Καθηγητής: Μη βιάζεστε! Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το άθροισμα (διαφορά) ενός ρητού και ενός άρρητου, όπως επίσης και το γινόμενο (πηλίκο) τους είναι άρρητος, που αποδεικνύεται εύκολα με απαγωγή σε άτοπο, τότε τι λέτε για τους αριθμούς $2-\sqrt{3}$ και $2+\sqrt{3}$;

Μαθητής Γ: Είναι άρρητοι.

Καθηγητής: Τι έχετε να πείτε για το άθροισμα και το γινόμενο τους;

Μαθητής Β: Το άθροισμα είναι 4 και το γινόμενο είναι 1. Είναι και οι δυο ρητοί. Τι συμβαίνει όμως με τις δυνάμεις άρρητων αριθμών;

Καθηγητής: Δεν θα ήθελα να επεκταθούμε σε περιπτωσιολογία. Μιας όμως και το έθεσες, τι λέτε υπάρχει δύναμη με άρρητη βάση και άρρητο εκθέτη που να δίνει ρητό αποτέλεσμα;

Μαθητής Β: Αν είναι δυνατόν!

Καθηγητής: Τι λέτε για τον αριθμό $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$;

Μαθητής Α: Μπορούμε να αποδείξουμε ότι είναι ρητός ή άρρητος;

Καθηγητής: Ας δούμε μια έμμεση απόδειξη. Τι μπορεί να είναι αυτός ο αριθμός;

Μαθητής Γ: Είτε ρητός, είτε άρρητος.

Καθηγητής: Αν υποθέσουμε ότι είναι ρητός, τότε βρήκαμε αυτό που θέλαμε δηλαδή άρρητη βάση σε άρρητο εκθέτη να δίνει ρητό αποτέλεσμα.

Μαθητής Β: Και αν είναι άρρητος;

Καθηγητής: Ας υποθέσουμε ότι $\sqrt{2}^{\sqrt{2}} = \alpha$, άρρητος. Τότε τι συμβαίνει με τον αριθμό $\alpha^{\sqrt{2}}$;

Μαθητής Γ: Είναι ρητός, αφού

$$\alpha^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

Μαθητής Β: Αυτό τώρα είναι απόδειξη;

Καθηγητής: Βεβαίως! Μήπως ξέρετε ποια αρχή εφαρμόσαμε εδώ;

Μαθητής Α: Ναι. Την αρχή της απόκλισης τρίτου. Δηλαδή εδώ ο αριθμός ή έχει μια ιδιότητα ή δεν την έχει.

Καθηγητής: Πραγματικά. Μπορεί να σας ξενίζει, αλλά υπάρχει ρεύμα στη φιλοσοφία των Μαθηματικών που δεν αποδέχεται αυτή την αρχή και συνεπώς δεν δέχεται τέτοιες αποδείξεις. Είναι οι λεγόμενοι ιντουϊσιονιστές (intuition) με κύριο εκφραστή τους τον Ολλανδό Μαθηματικό Brower που στηρίζονται στην εποπτεία, την κατασκευή και μια εναλλακτική σύλληψη της λογικής.

Ας κλείσουμε όμως εδώ την παρένθεση, αναφέροντάς σας ότι, πράγματι όπως έχει αποδειχθεί ο αριθμός $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ είναι άρρητος (είναι η τετραγωνική ρίζα του αριθμού $2^{\sqrt{2}}$ που αναφέρεται ως αριθμός των Gelfand – Schneider και είναι υπερβατικός).

Μαθητής Β: Και πως θα αποδείξουμε τώρα ότι, ανάμεσα σε δυο πραγματικούς υπάρχει πάντα κάποιος άλλος άρρητος;

Καθηγητής: Ας θεωρήσουμε δυο διαφορετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β. Τότε, σύμφωνα με αυτά που είπαμε προηγουμένως, ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ και $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$ υπάρχει ένας τουλάχιστον ρητός ρ. Τότε

$$\frac{\alpha}{\sqrt{2}} < \rho < \frac{\beta}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha < \rho\sqrt{2} < \beta$$

με τον αριθμό $\rho\sqrt{2}$, που βρίσκεται ανάμεσα στους α, β να είναι άρρητος.

Μαθητής Β: Δεν απαντήσαμε όμως στην ερώτηση πόσο πιο μεγάλο είναι το σύνολο των άρρητων από το σύνολο των ρητών.

Καθηγητής: Ας περιοριστούμε στο διάστημα [0, 1]. Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των άρρητων που περιέχονται σ' αυτό είναι ισοδύναμο με το σύνολο το [0, 1].

Μαθητής Α: Μα πως είναι δυνατόν; Δεν υπάρχουν ρητοί εκεί μέσα; Δεν είναι το 0, 5;

Καθηγητής: Βεβαίως. Υπάρχουν και μάλιστα άπειροι! Στα Ανώτερα Μαθηματικά και συγκεκριμένα στη Θεωρία Μέτρου, αποδεικνύεται ότι τόσο το σύνολο των πραγματικών, όσο και το σύνολο των άρρητων αριθμών του [0, 1] έχουν «μέτρο» ίσο με τη μονάδα, ενώ το σύνολο των ρητών του ίδιου διαστήματος έχει μέτρο μηδέν.

Μαθητής Α: Και τι σημαίνει αυτό; Δηλαδή οι «καλοί αριθμοί», οι ρητοί που ξέρουμε είναι ένα τίποτα μπροστά στους άλλους;

Καθηγητής: Υπάρχουν και άλλα που θα σας φανούν λίγο περίεργα. Αποδεικνύεται ότι τα σύνολο [0, 1] είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{R}$, και κάθε τέτοιο σύνολο λέμε ότι έχει την ισχύ του συνεχούς.

Μαθητής Β: Τι είναι πάλι αυτό;

Καθηγητής: Χωρίς να ξεφεύγουμε θα σας πω απλά δυο λόγια. Η υπόθεση του συνεχούς διατυπωμένη από τον ιδρυτή της θεωρίας συνόλων, το Γερμανό μαθηματικό Cantor, προβλέπει ότι ανάμεσα στην απειρία των φυσικών αριθμών (αριθμήσιμη απειρία), που απεικονίζεται με σημεία και την απειρία των πραγματικών αριθμών («δευτεροβάθμια» απειρία), που απεικονίζονται ως μια (συνεχής) γραμμή, δεν υπάρχει ενδιάμεσο επίπεδο (απειρίας). Αυτό, απλά σημαίνει ότι οποιοδήποτε απειροσύνολο του $\mathbb{R}$ που δεν είναι αριθμήσιμο, έχει περάσει στην επόμενη βαθμίδα απειρίας που είναι εκείνη του $\mathbb{R}$, δηλαδή είναι ισοδύναμο με την ευθεία των πραγματικών αριθμών.

Την υπόθεση του συνεχούς συμπεριέλαβε ως πρώτο μέσα στα 23 ξακουστά προβλήματά του ο Hilbert ως πρόκληση για τη μαθηματική κοινότητα στην ανατολή του $20^{ου}$ αιώνα.

Μαθητής Α: Είπατε ότι το (0, 1) είναι ισοδύναμο με το $\mathbb{R}$; Η απόδειξη είναι μέσα στα Μαθηματικά που γνωρίζουμε;

Καθηγητής: Βεβαίως! Αρκεί να αποκαταστήσουμε μια ένα προς ένα αντιστοίχιση των στοιχείων τους. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{x}{1-x}$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της;

Μαθητής Γ: Πρέπει και αρκεί:

$$\{\ x \neq 1 \text{ και } \frac{x}{1-x} > 0,\ (1)\ \} \text{ και}$$

$$(1) \Leftrightarrow\ x(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Άρα, $\mathbb{D}_f = (0, 1)$.

Μαθητής Β: Δεν πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι η f είναι ένα προς ένα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$;

Καθηγητής: Δεν είναι απαραίτητο. Αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση f(x)=y, έχει για κάθε y∈$\mathbb{R}$ μοναδική λύση, ως προς x, στο (0, 1). Τι λέτε;

Μαθητής Α: Δεν θα κάνουμε δηλαδή, ότι κάνουμε και όταν προσπαθούμε να βρούμε την αντίστροφη μιας συνάρτησης που πρώτα αποδεικνύουμε ότι είναι ένα προς ένα και μετά σχηματίζουμε την εξίσωση f(x)=y;

Καθηγητής: Αυτό είναι περιττό. Για να αποδείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι ένα προς ένα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση f(x)=y, έχει για οποιοδήποτε y∈$\mathbb{R}$, το πολύ μια λύση στο πεδίο ορισμού της f, κάτι που έτσι και αλλιώς κάνουμε στην περίπτωση της αντίστροφης, όπου οι πιθανοί περιορισμοί για το y οριοθετούν το πεδίο ορισμού της αντίστροφης. Εδώ που θέλουμε να έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, αρκεί η εξίσωση αυτή να έχει ακριβώς μια λύση, για κάθε y∈$\mathbb{R}$. Τι λέτε θα βοηθήσει κάποιος;

Μαθητής Γ: Να λέω εγώ;

Καθηγητής: Ναι. Πάμε!

Μαθητής Γ: Με $x \in (0,\ 1)$ έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \ln\frac{x}{1-x} = y \Leftrightarrow \frac{x}{1-x} = e^y$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = -e^{-y} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{x} = -e^{-y}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 + e^{-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1+e^{-y}}$$

και προφανώς $x \in (0,\ 1)$. Άρα η f είναι ένα προς ένα και το σύνολο τιμών της είναι το $\mathbb{R}$.

Καθηγητής: Μια και συζητάμε για την εσωτερική δομή του $\mathbb{R}$, ας δούμε και μια ακόμα κατηγοριοποίηση που μπορούμε να κάνουμε στο σύνολο αυτό. Ένας πραγματικός αριθμός μπορεί να είναι είτε **αλγεβρικός** είτε **υπερβατικός**.

Αλγεβρικός λέγεται ένας πραγματικός αριθμός ρ, όταν υπάρχει πολυωνυμική εξίσωση P(x)=0, με ακέραιους συντελεστές που έχει ρίζα το ρ. Κάθε πραγματικός αριθμός που δεν είναι Αλγεβρικός λέγεται υπερβατικός.

Μαθητής: Οι ρητοί είναι Αλγεβρικοί και οι άρρητοι Υπερβατικοί;

Καθηγητής: Ας μη βιαζόμαστε. Φυσικά κάθε ρητός αριθμός είναι Αλγεβρικός. Δεν είναι όμως σωστό ότι κάθε άρρητος είναι υπερβατικός. Για παράδειγμα ο $\sqrt{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - 2 = 0$.

Μαθητής: Ναι. Μήπως είναι οι αριθμοί, ας πούμε όπως ο $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

Καθηγητής: Είπαμε να μη βιαζόμαστε. Αλλά αφού το έθεσες, ας ονομάσουμε α τον αριθμό αυτό. Τότε έχουμε:

$$\alpha^2 = 2+3+2\sqrt{6} \Rightarrow \alpha^2 = 5+2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = (5+2\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \alpha^3 = 5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2} \Rightarrow \alpha^3 = 11\sqrt{2}+9\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \alpha^4 = (11\sqrt{2}+9\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow \alpha^4 = 22+27+11\sqrt{6}+9\sqrt{6} \Rightarrow \alpha^4 = 49+20\sqrt{6}$$

οπότε

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 = (49+20\sqrt{6}) - 10\cdot(5+2\sqrt{6}) = -1$$

$$\Rightarrow \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0$$

που σημαίνει ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

Παρεμπιπτόντως, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε ότι η εξίσωση αυτή δεν έχει ρητή ρίζα, οπότε ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ είναι άρρητος.

Μαθητής Γ: Πως μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν έχει ρητή ρίζα;

Καθηγητής: Για να μην επεκταθούμε στο θεώρημα ρητών ριζών σε πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές, σας αναφέρω απλά, ότι: Αν μια πολυωνυμική εξίσωση με ακέραιους συντελεστές έχει μεγιστοβάθμιο συντελεστή ίσο με τη μονάδα, τότε οι ρητές ρίζες της είναι ακέραιες και τις αναζητούμε μέσα από τους διαιρέτες του σταθερού όρου.

Μαθητής Γ: Κατάλαβα. Εδώ ούτε το 1 ούτε το -1 είναι ρίζα της εξίσωσης.

Μαθητής Β: Δεν θα μπορούσαμε εδώ να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ με άτοπο; Να υποθέσουμε ότι είναι ρητός και μετά από ένα ή δυο τετραγωνισμούς να καταλήξουμε στο άτοπο «ρητός = άρρητος».

Καθηγητής: Βεβαίως. Αν δε πάρουμε τον αριθμό

$\sqrt[3]{2}-\sqrt{3}$ τότε είναι προτιμότερο αυτό που είπες, αφού η πλήρη ανάπτυξη της διαδικασίας που είδαμε προηγουμένως, οδηγεί στην εξίσωση

$$x^6-9x^4-4x^3+27x^2-36x-23=0$$

Σε άλλες όμως περιπτώσεις, όπως για να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $συν20^o$ είναι άρρητος, καταφεύγουμε στην διαδικασία σχηματισμού εξίσωσης. Συγκεκριμένα, μέσω του τύπου $συν3α=4συν^3α-3συνα$

οδηγούμαστε στην εξίσωση $8x^3-6x-1=0$

που δεν έχει ρητή ρίζα

Για να επανέλθουμε όμως στη συζήτησή μας, γενικά η νιοστή ρίζα οποιουδήποτε θετικού ακέραιου είναι αριθμός αλγεβρικός. Επίσης το άθροισμα δυο τέτοιων αριθμών είναι επίσης αλγεβρικός.

Και για να σας προλάβω, σας λέω ότι έχει αποδειχτεί ότι οι γνωστοί μας αριθμοί π και e είναι υπερβατικοί αριθμοί. Και τελειώνω με κάτι ακόμα πιο εντυπωσιακό. Η οριστική απάντηση στο πρόβλημα του τετραγωνισμού του κύκλου με κανόνα και διαβήτη, που απασχόλησε τη μαθηματική κοινότητα για είκοσι περίπου αιώνες, δόθηκε μέσα από την υπερβατικότητα του π.

Μαθητής Β: Πόσοι είναι αυτοί οι αριθμοί;

Καθηγητής: Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των αλγεβρικών πραγματικών αριθμών είναι αριθμήσιμο.

Μαθητής Α: Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των υπερβατικών αριθμών είναι υπεραριθμήσιμο;

Καθηγητής: Ακριβώς. Αφού όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο.

Μαθητής Β: Δηλαδή, αν κατάλαβα καλά, και μέσα στο σύνολο των άρρητων οι «καλοί αριθμοί», δηλαδή οι αλγεβρικοί είναι ένα τίποτα μπροστά στους άλλους!

Καθηγητής: Ας κάνουμε τώρα μια πρώτη προσπάθεια να εξοικειωθούμε σε άπειρες διαδικασίες. Ας θεωρήσουμε τους αριθμούς $α=0,999999...$ όπου μετά την υποδιαστολή θεωρούμε ότι υπάρχει μια ατέρμονη διαδοχή από τα ψηφίο 9 και τον αριθμό β=1. Ποιος από τους δυο θεωρείται ότι είναι ο μεγαλύτερος;

Μαθητής Β: Φυσικά ο αριθμός β.

Καθηγητής: Μάλιστα. Μήπως μπορείς να μου βρεις κάποιο αριθμό που να είναι μεγαλύτερος από το α και μικρότερος από το β;

Μαθητής Α: Είναι ένας αριθμός γ που, μετά την υποδιαστολή, αφού γράψουμε όσες φορές θέλουμε τον αριθμό 9, στο τέλος γράφουμε ως τελευταίο ψηφίο το 1.

Καθηγητής: Μάλιστα. Τελειώνει κάπου ο αριθμός $α=0,\overline{9}$ ώστε να έχεις τη δυνατότητα να επισυνάψεις ένα επιπλέον ψηφίο που θα είναι το 1; Αν αντί για τη μονάδα εγώ βάλω το 9, τότε ο αριθμός που παίρνω δεν είναι «τμήμα του α» και μεγαλύτερος του γ;

Μαθητής Β: Μήπως είναι ίσοι; Μήπως αυτό σχετίζεται με την πυκνότητα που λέγαμε προηγουμένως;

Καθηγητής: Ας δούμε λοιπόν τι συμβαίνει. Μπορείτε να μου πείτε ποιος είναι ο αριθμός 10α;

Μαθητής Γ: Φυσικά. Ισχύει: $10α=9,99999...$

Καθηγητής: Φαντάζομαι να συμφωνείτε ότι $10α=9,\overline{9}$.

Μαθητής Α: Βεβαίως.

Καθηγητής: Επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι

$$10α-α=9,\overline{9}-0,\overline{9}\Rightarrow 9α=9\Rightarrow α=1.$$

Μαθητής Α: Κι όμως, εμένα εξακολουθεί να μου φαίνεται περίεργο! Μπορούμε να το διαπιστώσουμε και με άλλο τρόπο;

Καθηγητής: Βεβαίως. Ας δούμε και ένα άλλο τρόπο, ίσως πιο προσιτό. Μπορείς να μου γράψεις σε παρακαλώ, με μορφή περιοδικού ρητού τα κλάσματα $\frac{1}{3}$ και $\frac{2}{3}$;

Μαθητής Α: Ναι. Δεν είναι δύσκολο. Είναι $\frac{1}{3}=0,\overline{3}$ και $\frac{2}{3}=0,\overline{6}$.

Καθηγητής: Δεν νομίζω να διαφωνεί κανένας με τις επόμενες ισότητες.

$$0,99999....=0,\overline{9}=0,\overline{3}+0,\overline{6}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$$

Μαθητής Α: Και όμως είναι έτσι!

Μαθητής Γ: Δηλαδή η γραφή ενός αριθμού στο δεκαδικό σύστημα δεν είναι μοναδική;

Καθηγητής: Όχι για όλους τους αριθμούς. Αν πάρουμε για παράδειγμα τον αριθμό $0,003$ τότε μπορούμε να τον γράψουμε $0,02999...$

Αυτό συμβαίνει με όλους τους αριθμούς x της μορφής $x=\frac{κ}{10^ν}$, $κ\in\mathbb{N}^*$, $ν\in\mathbb{N}$. Για όλους τους άλλους αριθμούς, η γραφή είναι όντως μοναδική.

Αλλά, ας δούμε και κάτι άλλο που σχετίζεται με τη δυνατότητα ατέρμονης ελάττωσης ενός θετικού αριθμού. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει |α-β|<ε για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε, τότε ποια σχέση νομίζεται ότι συνδέει τους αριθμούς α, β;

Μαθητής Α: Ισχύει $-\varepsilon<\alpha-\beta<\varepsilon$ για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε.

Καθηγητής: Ο αριθμός ε μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός.

Μαθητής Γ: Μήπως οι αριθμοί α, β είναι ίσοι μεταξύ τους; Διαισθητικά κάτι τέτοιο υποψιάζομαι.

Καθηγητής: Σ΄ αυτές τις περιπτώσεις η διαίσθηση είναι ένας καλός οδηγός. Το μειονέκτημα της είναι ότι δεν παρέχει βεβαιότητα. Η βεβαιότητα στα Μαθηματικά είναι συνδεδεμένη με την απόδειξη. Μήπως εδώ μπορούμε να έχουμε μια απόδειξη;

Μαθητής Β: Πώς μπορούμε να ξεκινήσουμε;

Καθηγητής: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι οι αριθμοί α, β ταυτίζονται. Μήπως μπορείτε να προτείνεται κάποια μέθοδο απόδειξης.

Μαθητής Γ: Να δουλέψουμε με άτοπο;

Καθηγητής: Πολύ ωραία!

Μαθητής Α: Έστω ότι οι αριθμοί δεν είναι ίσοι. Μετά τι κάνουμε;

Καθηγητής: Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι οι α, β δεν είναι ίσοι μεταξύ τους. Τότε προφανώς έχουμε |α-β|>0. Τι λέτε για τον αριθμό $\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$;

Μαθητής Α: Ότι είναι ένας θετικός αριθμός. Τι άλλο;

Καθηγητής: Στη θέση του ε δεν μπορούμε να βάλουμε οποιοδήποτε θετικό αριθμό;

Μαθητής Β: Α… κατάλαβα. Αν θέσουμε αντί για ε τον αριθμό $\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$, τότε η δοσμένη σχέση γράφεται

$$|\alpha-\beta|<\frac{1}{2}|\alpha-\beta| \quad \text{και} \quad |\alpha-\beta|>0.$$

Άρα $1<\frac{1}{2}$ που είναι άτοπο.

Καθηγητής: Γιατί καταλήξαμε σε άτοπο;

Μαθητής Α: Γιατί υποθέσαμε ότι οι αριθμοί α, β είναι διαφορετικοί μεταξύ τους.

Καθηγητής: Άρα, σε ποιο συμπέρασμα καταλήγουμε;

Μαθητής Γ: Ότι, αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $|\alpha-\beta|<\varepsilon$ για οποιοδήποτε θετικό αριθμό ε, τότε α=β.

Καθηγητής: Ας περάσουμε τώρα στην έννοια του ορίου. Τι αντιλαμβανόμαστε όταν ακούμε ότι το όριο της συνάρτησης f στο x_o είναι ο αριθμός ℓ ή όταν βλέπουμε ότι $\lim_{x\to x_o} f(x)=\ell$.

Μαθητής Α: Ότι καθώς το x παίρνει τιμές ολοένα και πιο κοντά στο x_o, οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν, ολοένα και περισσότερο στον αριθμό ℓ.

Καθηγητής: Δηλαδή, αν κατάλαβα καλά, αν

$$|x_1-x_o|<|x_2-x_o|$$

που σημαίνει ότι αν ο αριθμός x_1 είναι πιο κοντά στο x_o από τον x_2 τότε $|f(x_1)-\ell|<|f(x_2)-\ell|$, δηλαδή ο αριθμός $f(x_1)$ είναι πιο κοντά στον ℓ από τον $f(x_2)$.

Μαθητής Α: Ακριβώς!

Μαθητής Γ: Γιατί, δεν μπορεί να υπάρχει μια «ταλάντωση» κοντά στο x_o;

Καθηγητής: Έχεις δίκιο, αλλά καλό είναι να περιοριστούμε πρώτα σε μια απλή συνάρτηση με δυο κλάδους με τη βοήθεια της οποίας μπορούμε να καταρρίψουμε τον ισχυρισμό της «μονότονης σύγκλισης» στο όριο. Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}3x & ,x\ge 0\\ -2x & ,x<0\end{cases}$.

Φαντάζομαι να συμφωνείτε όλοι ότι το όριο της f στο $x_o=0$ είναι $\ell=0$. Αν λάβουμε τους αριθμούς $x_1=0{,}15$ και $x_2=-0{,}2$, τότε αν και ο αριθμός x_1 είναι πιο κοντά στο μηδέν από τον x_2, ο αριθμός $f(x_1)=0{,}45$, είναι πιο μακριά σε σχέση με τον $f(x_2)=0{,}4$ από το μηδέν.

Μήπως μπορεί κάποιος άλλος να μας διατυπώσει καλύτερα μια διαισθητική προσέγγιση της έννοιας αυτής;

Μαθητής Γ: Νομίζω ότι θα ήταν καλύτερα να πούμε ότι «οι τιμές της συνάρτησης προσεγγίζουν όσο θέλουμε στον αριθμό ℓ, καθώς το x προσεγγίζει με οποιοδήποτε τρόπο».

Καθηγητής: Αυτό είναι μια καλή προσέγγιση. Ας βάλουμε όμως τα πράγματα σε μια σειρά. Απαραίτητη προϋπόθεση για να μπορέσουμε να μιλήσουμε για όριο της f στο x_o είναι να μπορούμε να πλησιάσουμε όσο θέλουμε στον αριθμό x_o. Τι σημαίνει αυτό;

Μαθητής Α: Ότι η f ορίζεται κοντά στο x_o.

Καθηγητής: Μας το διευκρινίζεις λίγο αυτό;

Μαθητής Α: Ναι. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης περιέχει σύνολο είτε της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ είτε της μορφής (α, x_o) είτε της μορφής (x_o, β).

Καθηγητής: Πραγματικά, στο σχολικό βιβλίο τα πράγματα είναι όπως τα λες. Θα μπορούσαμε όμως να απαιτήσουμε κάτι λιγότερο από αυτό.

Μαθητής Β: Δηλαδή;

Καθηγητής: Αντί των $(\alpha, x_o)\subseteq\mathbb{D}_f$ ή $(x_o, \beta)\subseteq\mathbb{D}_f$ να απαιτήσουμε απλώς $(x_o-\varepsilon, x_o)\cap\mathbb{D}_f\neq\varnothing$ ή $(x_o, x_o+\varepsilon)\cap\mathbb{D}_f\neq\varnothing$ για κάθε $\varepsilon>0$, (οσοδήποτε μικρό). Αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να πλησιάζουμε όσο θέλουμε στον αριθμό x_o και κατά συνέπεια να μπορούμε να μιλάμε για όριο της f στο x_o Στην πράξη, εδώ έχουμε τη συσσώρευση απείρων στοιχείων του $\mathbb{D}_f$ κοντά στο x_o, γι' αυτό και το x_o αναφέρεται ως **σημείο συσσώρευσης** του $\mathbb{D}_f$.

Μαθητής Β: Τι κάναμε δηλαδή τώρα; Περιγράψαμε διαφορετικά τα διαστήματα; Είναι δυνατό να μιλάμε για όριο της f στο x_o και το πεδίο ορισμού της να μην περιέχει διάστημα της μορφής $(x_o-\varepsilon, x_o)$ ή $(x_o, x_o+\varepsilon)$;

Καθηγητής: Όσο και αν σας φαίνεται περίεργο, μπορεί πράγματι να συμβαίνει αυτό, αν μιλάμε για συναρτήσεις ορισμένες σε «πυκνό» υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών, τότε από την $(x_o-\varepsilon, x_o)\cap\mathbb{Q}\neq\varnothing$ (αφού ανάμεσα σε δυο πραγματικούς υπάρχει πάντοτε ρητός) γιατί λέτε ότι δεν προκύπτει η σχέση $(x_o-\varepsilon, x_o)\subseteq\mathbb{Q}$;

Μαθητής Α: Πραγματικά, αφού έχουμε πει ότι ανάμεσα σε δυο ρητούς μπορούμε πάντα να βρούμε άρρητο αριθμό, συμπεραίνουμε ότι το διάστημα $(x_o-\varepsilon, x_o)$ δεν περιέχεται στο σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών.

Καθηγητής: Ωραία. Αλλά ας επανέλθουμε τώρα στον ορισμό του βιβλίου μας. Να διευκρινίσουμε ότι δεν μας ενδιαφέρει πόσο κοντά ή πόσο μακριά στο x_o είναι τα α, β. Επίσης, μας είναι αδιάφορο αν η συνάρτηση ορίζεται ή όχι στο x_o.

Ας θεωρήσουμε τώρα την πρώτη από τις περιπτώσεις που ανάφερες, όπου η f ορίζεται σε σύνολο της μορφής $(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$ και να δούμε λίγο τον ορισμό του ορίου. Τον θυμάται κάποιος;

Μαθητής Γ: Ναι. Με την προϋπόθεση ότι η f ορίζεται σε διάστημα της μορφής που είπαμε, λέμε ότι η f έχει στο x_o όριο ℓ, $\ell\in\mathbb{R}$, όταν: για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ τέτοιος, ώστε για κάθε $x\in(\alpha, x_o)\cup(x_o, \beta)$, με $0<|x-x_o|<\delta$ ισχύει: $|f(x)-\ell|<\varepsilon$.

Καθηγητής: Όταν λέμε για κάθε $\varepsilon>0$ εννοούμε ότι στο ε μπορούμε να δώσουμε οποιαδήποτε τιμή, όσο μικρή θέλουμε. Από εκεί και πέρα, ο υπαρξιακός ποσοδείκτης που συνδέεται με το δ (υπάρχει $\delta>0$) μας δείχνει ότι το δ, δεν είναι ανεξάρτητο από το ε, με την έννοια ότι κάθε φορά που αλλάζει το ε, αυξομειώνεται δηλαδή η απόσταση ανάμεσα στο $f(x_o)$ και το ℓ, απαιτείται επαναπροσδιορισμός της απόστασης του x από το x_o. Σε κάθε περίπτωση όμως από τη σχέση $|x-x_o|>0$, αποκλείεται η δυνατότητα ταύτισης του x με το x_o.

Νομίζω όμως ότι εδώ είναι ένα καλό σημείο για να σταματήσουμε. Περισσότερα για τον ορισμό του ορίου, την άρνησή του και γενικά για την έννοια αυτή, θα δούμε σε επόμενη συνάντηση. Σας ευχαριστώ.

Βιβλιογραφία

1. Γιαννόπουλος Α.: Απειροστικός ΙΙ
2. Κυριακόπουλος Α. Μαθηματική Λογική
3. Niven I.: Numbers: Rational and irrational
4. Hammack R.: Book of Proof
5. Nelson R. – Alsina C.: Charming Proofs (A Journey into elegant Mathematics)
6. Bloch E.:Proofs and Fundamentals
7. N. Sirotic – R. Zazkis: Irrational numbers on the number line - Where are they? (International Journal Mathematical education June 2007)
8. Davis D.: Η φύση και η δύναμη των Μαθηματικών
9. Αναπολιτάνος Δ.: Εισαγωγή στην φιλοσοφία των Μαθηματικών
10. Ρουσόπουλος Γ.: Μαθηματικός ρεαλισμός

Ο Ευκλείδης προτείνει …

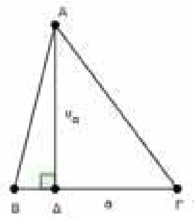
«Η καρδιά των μαθηματικών είναι τα **προβλήματα και οι λύσεις** και ο κύριος λόγος ύπαρξης του μαθηματικού είναι να λύνει προβλήματα». **P. R. HALMOS**

Επιμέλεια: ΓΙΩΡΓΟΣ ΤΡΙΑΝΤΟΣ - ΝΙΚΟΣ ΑΝΤΩΝΟΠΟΥΛΟΣ – ΓΙΑΝΝΗΣ ΛΟΥΡΙΔΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 293 (ΤΕΥΧΟΥΣ 102)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha=\upsilon_\alpha$, τότε να δειχθεί ότι: $\gamma(\Phi-1)\le\beta\le\gamma\Phi$, όπου $\Phi=\frac{1+\sqrt5}{2}$. (Γιώργος Τριάντος – Αθήνα, Δημήτρης Μανωλόπουλος - Κατερίνη) .

ΛΥΣΗ (Ιωάννης Ανδρής – Αθήνα)



Είναι (βλέπε σχετικό σχήμα)

$$\sigma\varphi B+\sigma\varphi\Gamma=\frac{\Delta B}{A\Delta}+\frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}=\frac{B\Gamma}{A\Delta}=\frac{\alpha}{\upsilon_\alpha}=1$$

και άρα $\sigma\varphi B=1-\sigma\varphi\Gamma$ (1). Θέτουμε $\frac{\beta}{\gamma}=x$ οπότε έχουμε

$$x^2=\frac{\eta\mu^2B}{\eta\mu^2\Gamma}=\frac{\frac{1}{1+\sigma\varphi^2B}}{\frac{1}{1+\sigma\varphi^2\Gamma}}=\frac{1+\sigma\varphi^2\Gamma}{1+\sigma\varphi^2B}\overset{(1)}{=}\frac{1+\sigma\varphi^2\Gamma}{1+(1-\sigma\varphi\Gamma)^2}=\frac{1+\sigma\varphi^2\Gamma}{2-2\sigma\varphi\Gamma+\sigma\varphi^2\Gamma}$$

$$\Leftrightarrow(x^2-1)\sigma\varphi^2\Gamma-2x^2\sigma\varphi\Gamma+2x^2-1=0\quad(2)$$

επειδή $\sigma\varphi\Gamma\in R$ η διακρίνουσα του ως προς σφΓ τριωνύμου είναι μή αρνητική. Δηλαδή ισχύει ότι: $4x^4-4(x^2-1)(2x^2-1)\ge0$ ή

$$x^4-(x^2-1)(2x^2-1)\ge0\Leftrightarrow x^4-3x^2+1\le0\quad(3).$$

Από την (3) παίρνουμε: $\frac{3-\sqrt5}{2}\le x^2\le\frac{3+\sqrt5}{2}$ ή $\frac{\sqrt5-1}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}$ ή $\Phi-1\le\frac{\beta}{\gamma}\le\Phi$.

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Γιώργος Τσιώλης – Τρίπολη, Αντώνης Ιωαννίδης – Χολαργός, Ροδόλφος Μπόρης – Δάφνη, Δημήτρης Μανωλόπουλος – Κατερίνη.

ΑΣΚΗΣΗ 294 (ΤΕΥΧΟΥΣ 103)

Να λυθεί στο σύνολο R το σύστημα:

$$(\Sigma)\ \begin{cases}x^3+12y^2+48y+64=0\\ y^3+12z^2+48z+64=0\\ z^3+12x^2+48x+64=0\end{cases}$$

(Ομάδα Προβλημάτων Ιδιωτικού Λυκείου Παναγία Προυσιώτισσα – Αγρίνιο), Δημήτρης Μανωλόπουλος – Κατερίνη

ΛΥΣΗ (Θωμάς Τσάκας – Πάτρα)

Με πρόσθεση κατά μέλη όλων των εξισώσεων του συστήματος παίρνουμε την εξίσωση: $(x+4)^3+(y+4)^3+(z+4)^3=0$ (1) με προφανή λύση $(x,y,z)=(-4,-4,-4)$ που είναι και λύση του (Σ). Θα δείξουμε ότι η λύση αυτή είναι **μοναδική**.

1) Αν ένας από τους x,y,z είναι -4, π.χ $z=-4$, τότε από την δεύτερη εξίσωση του συστήματος έχουμε $y^3+64=0\Leftrightarrow y=-4$ και από την πρώτη $x=-4$.

2) Αν όλοι είναι μικρότεροι ή μεγαλύτεροι του -4 τότε δεν μπορεί να ισχύει η εξίσωση (1).

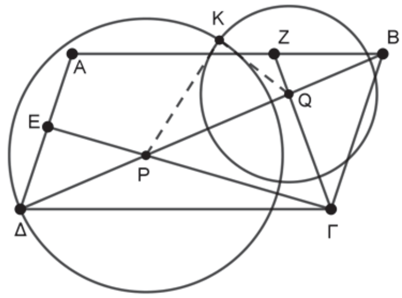
3) Αν ένας από τους x,y,z είναι μεγαλύτερος του -4, έστω $x>-4$, τότε θα είναι $x^3>-64\Leftrightarrow -x^3<64$ και από την πρώτη εξίσωση του συστήματος θα έχουμε $12y^2+48y+64=-x^3<64$ $\Leftrightarrow 12y^2+48y<0\Leftrightarrow -4<y<0$. Από αυτό, εργαζόμενοι ομοίως, παίρνουμε $-4<z<0$, δηλαδή όλοι μεγαλύτεροι του -4. Άτοπο.

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Σωτήρης Σκοτίδας – Καρδίτσα, Θόδωρος Χωματάς – Νίκαια, Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα, Δημήτρης Καρτσακλής – Αγρίνιο, Δημήτρης Μανωλόπουλος - Κατερίνη.

ΑΣΚΗΣΗ 295 (ΤΕΥΧΟΥΣ 103)

Στις πλευρές ΑΔ και ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε τα σημεία Ε και Ζ αντιστοίχως, ώστε $\frac{AE}{E\Delta}\cdot\frac{AZ}{ZB}=2$ (1). Τα τμήματα ΓΕ και ΓΖ τέμνουν τη διαγώνιο ΒΔ του παραλληλογράμμου στα σημεία P και Q αντιστοίχως. Να δειχθεί ότι οι κύκλοι $(P,P\Delta)$ και (Q,QB) τέμνονται ορθογωνίως. (Γιώργος Αποστολόπουλος – Μεσολόγγι)

ΛΥΣΗ (Δημήτρης Καρτσακλής – Αγρίνιο)



Έστω Κ ένα από τα σημεία τομής των δύο κύκλων. Αρκεί να δειχθεί ότι ισχύει: $R\hat{K}Q=\frac{\pi}{2}$ ή το αυτό $PQ^2=KP^2+QK^2$. Παρατηρούμε (βλέπε σχήμα) ότι: $\frac{AB}{ZB}=\frac{\Delta\Gamma}{ZB}=\frac{\Delta Q}{QB}=\frac{\Delta P+PQ}{QB}\Rightarrow\frac{AZ}{ZB}=$

$$\frac{AB-ZB}{ZB}=\frac{AB}{ZB}-1=\frac{\Delta P+PQ}{QB}-1=\frac{\Delta P+PQ-QB}{QB}$$

$\Rightarrow\frac{AZ}{ZB}=\frac{\Delta P+PQ-QB}{QB}$ (2). Ομοίως, έχουμε:

$\frac{AE}{E\Delta}=\frac{PQ+QB-\Delta P}{\Delta P}$ (3). Η (1) βάσει των (2),(3) δίνει: $\frac{\Delta P+PQ-QB}{QB}\cdot\frac{PQ+QB-\Delta P}{\Delta P}=2\Leftrightarrow$

$$\frac{[PQ+(\Delta P-OB)][PQ-(\Delta P-OB)]}{QB\cdot\Delta P}=2\Leftrightarrow$$

$$PQ^2-(\Delta P-OB)^2-QB\cdot\Delta P=0\Leftrightarrow$$

$PQ^2=\Delta P^2+QB^2\Leftrightarrow PQ^2=KP^2+QK^2$. ΟΕΔ.

Λύση έστειλαν: Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Θόδωρος Χωματάς – Νίκαια, Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Δημήτρης Μανωλόπουλος - Κατερίνη.

ΑΣΚΗΣΗ 296 (ΤΕΥΧΟΥΣ 103) Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με $f(x)=ax^2+bx+c$ με $a,b,c\in R$. Αν ισχύουν οι σχέσεις: $ab>0$ (1) και $P=8a+27b+216c=0$, τότε να δειχθεί ότι: **1)** Υπάρχει $x_1\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1)=0$. **2)** $f(1)\cdot f(2021)>0$. (Γιώργος Μήτσιος – Ράμια Άρτας)

ΛΥΣΗ (Σωτήρης Σκοτίδας - Καρδίτσα) Επειδή $ab>0$ οι a,b είναι ομόσημοι και μη μηδενικοί. Από $8a+27b+216c=0$ έπεται ότι

$c=-\frac{a}{27}-\frac{b}{8}=-(\frac{a}{27}+\frac{b}{8})$, οπότε $f(0)f(1)=$

$c(a+b+c)=-(\frac{a}{27}+\frac{b}{8})(a+b-\frac{a}{27}-\frac{b}{8})=$

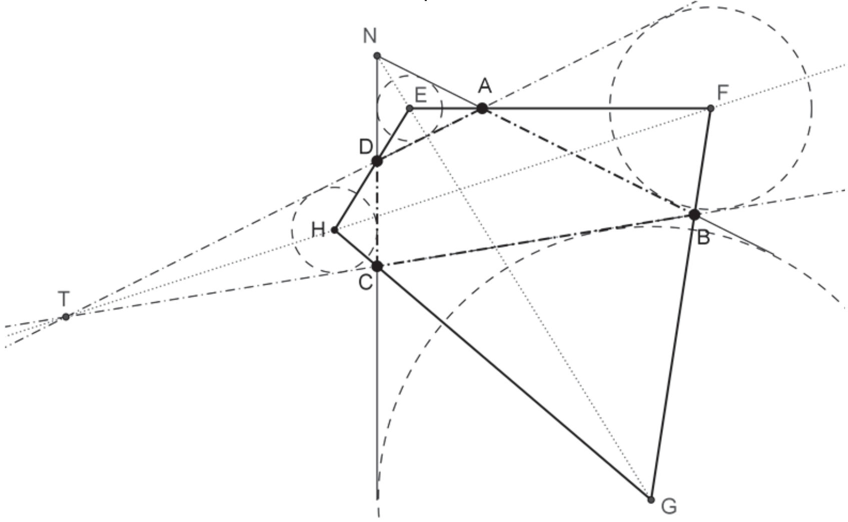
$=-(\frac{a}{27}+\frac{b}{8})(\frac{26a}{27}+\frac{7b}{8})<0$, αφού a, b ομόσημοι. Συνεπώς, υπάρχει $x_1\in(0,1):f(x_1)=0$ (αφού η f συνεχής). Επειδή $\Delta=b^2-4ac=b^2-4a(-\frac{a}{27}-\frac{b}{8})$

$=b^2+\frac{4a^2}{27}+\frac{ab}{2}>0$ και $x_1x_2=\frac{c}{a}<0$ οι ρίζες της f είναι ετερόσημες και ισχύει $x_2<0<x_1<1<2021$ ενώ σε κάθε περίπτωση ισχύουν οι σχέσεις: $af(1)>0$, $af(2021)>0$, οπότε $a^2f(1)f(2021)>0$ και τελικά $f(1)f(2021)>0$. **Λύση έστειλαν**: Θωμάς Τσάκας – Πάτρα, Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα , Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Κώστας Νερούτσος – Γλυφάδα, Θόδωρος Χωματάς – Νίκαια, Δημήτρης Μανωλόπουλος – Κατερίνη

ΑΣΚΗΣΗ 297 (ΤΕΥΧΟΥΣ 103)

Στον πίνακα σχεδιάζουμε κυρτό τετράπλευρο ABCD. Σημειώνουμε τα κέντρα E,F,G,H των τεσσάρων κύκλων καθένας από τους οποίους εφάπτεται σε μία πλευρά του τετραπλεύρου και στις προεκτάσεις των δύο διαδοχικών με αυτή πλευρών του. Μετά από αυτό σβήνουμε το τετράπλευρο ABCD. Μπορεί να καθορισθεί η περίμετρός του; (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος, Δημήτρης Μανωλόπουλος - Κατερίνη)

ΛΥΣΗ (Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)



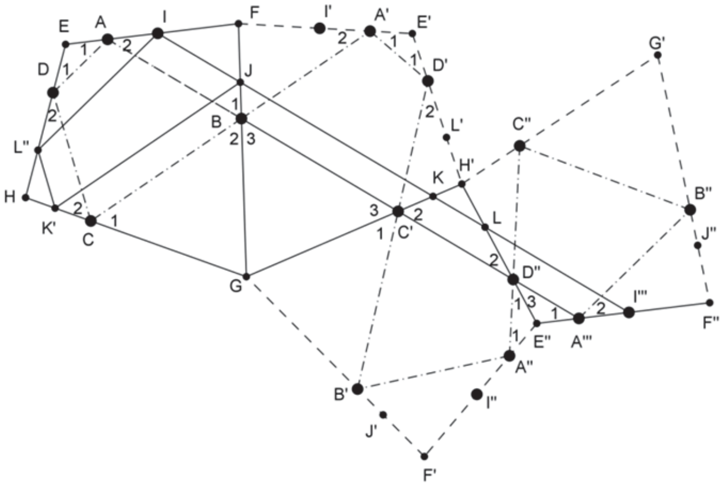
Η απάντηση στο ερώτημα είναι ΝΑΙ !

Έστω EFGH το τετράπλευρο που ορίζεται απο τα κέντρα των παρεγγεγραμμένων κύκλων στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ σύμφωνα με το πρόβλημα. Οι πλευρές EF, FG, GH, HE είναι φορείς των εξωτερικών διχοτόμων των γωνιών A,B,C,D του τετραπλεύρου ABCD αντιστοίχως. Κατά συνέπεια, **οι πλευρές του HGFQ είναι ισοκλινείς ως προς τις πλευρές του ΑΒΓΔ.**

Συγκεκριμένα: Η πλευρά EF σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές AB, AD , η πλευρά FG σχηματίζει ίσες γωνίες με τις AB,BC, η πλευρά GH σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές BC, CD και η πλευρά HE σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές CD, DA.

Η ιδιότητα αυτή μας επιτρέπει με τη βοήθεια τριών διαδοχικών αντανακλάσεων (συμμετρικών) του EFGH ως προς τρεις διαδοχικές πλευρές του, να αποκτήσουμε το ανάπτυγμα του τετραπλεύρου ABCD επί μιάς ευθείας. Πράγματι: (βλέπε σχήμα)

Ας ξεκινήσουμε την απόδειξη έχοντας ως δεδομένο το τετράπλευρο ABCD. Δηλαδή, αυτό υπάρχει (δεν το έχουμε σβήσει ακόμη). Έστω $E'FGH', E''F'GH', E''F''G'H'$ τα συμμετρικά του EFGH ως πρός $FG, GH', H'E''$ αντιστοίχως με τα αντίστοιχα συμμετρικά του τετραπλεύρου ABCD , όπως εμφανίζονται στο παραπάνω σχήμα. Επειδή $\hat{B}_1=\hat{B}_2$ (υπόθεση) και $\hat{B}_2=\hat{B}_3$ (συμμετρία) είναι $\hat{B}_1=\hat{B}_3$ και επειδή FBG ευθεία θα είναι ABC' ευθεία με $BC'=BC$. Είναι $\hat{C}_1=\hat{C}_2$ (υπόθεση) και $\hat{C}_1=\hat{C}_1', \hat{C}_2=\hat{C}_2'$ (συμμετρία). Επομένως, ισχύει ότι $\hat{C}_1'=\hat{C}_2'$. Όμως, $\hat{C}_1'=\hat{C}_3'$ (συμμετρία) οπότε είναι $\hat{C}_2'=\hat{C}_3'$ και επειδή $GC'H'$ ευθεία θα είναι και $BC'D''$ ευθεία, ενώ $C'D''=C'D'=CD$. Επειδή $\hat{D}_1=\hat{D}_2$ (υπόθεση) και $\hat{D}_1=\hat{D}_1'=\hat{D}_1''$, $\hat{D}_2=\hat{D}_2'=\hat{D}_2''$ (συμμετρία) θα είναι $\hat{D}_1''=\hat{D}_2''$. Όμως, $\hat{D}_1''=\hat{D}_3''$ (συμμετρία) οπότε είναι $\hat{D}_2''=\hat{D}_3''$ και επειδή $E''D''H'$ ευθεία θα είναι και $A'''D''C'$ ευθεία με $A'''D''=A''D''=A'D'=AD$. Σύμφωνα με τα παραπάνω η περίμετρος του τριγώνου ABCD είναι: $AB+BC+CD+DA=AB+BC'+C'D''+D''A'''=AA'''$, δηλαδή εκφράζεται με το μήκος AA''' όπου το $A'''\in E''F''$. Λόγω συμμετρίας είναι $\hat{A}_1=\hat{A}_1'=\hat{A}_1''=\hat{A}_1'''$ και λόγω της υπόθεσης $\hat{A}_1=\hat{A}_2$. Συνεπώς, είναι και $\hat{A}_2=\hat{A}_1'''$ που σημαίνει ότι οι ευθείες EF και $E''F''$ είναι παράλληλες με $EA=E''A'''$.



Σβήνουμε στη συνέχεια το τετράπλευρο ABCD και εκτελούμε την τριπλή συμμετρία του τετραπλεύρου EFGH όπως στην αρχή. Θεωρούμε τυχαίο σημείο A της πλευράς EF και σημείο A''' της πλευράς $E''F''$ τέτοιο, ώστε $EA=E''A'''$. Φέρουμε το τμήμα AA''' το μήκος του οποίου εκφράζει την περίμετρο του ABCD. Θεωρούμε ένα άλλο σημείο I της EF . βρίσκουμε σημείο I''' της $E''F''$ τέτοιο, ώστε $EI=E''I'''$ και φέρουμε το τμήμα II''' που τέμνει την FG στο J την GH' στο K και την $H'E''$ στο L. Με αντίστροφες αντανακλάσεις των σημείων K,L καταλήγουμε σε νέο τετράπλευρο $IJK'L''$ με την ιδιότητα του αρχικού και περίμετρο $II'''=AA'''=EE''$ (λόγω παραλληλογράμμων). **Συνεπώς, υπάρχουν άπειρα τετράπλευρα με την ιδιότητα του αρχικού τετραπλεύρου που όμως έχουν όλα την ίδια περίμετρο** EE''.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

319. Να δειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση: $E\le\dfrac{\tau^2+3\rho^2+12R\rho}{6\sqrt{3}}$, όπου τ η ημιπερίμετρος , ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου, R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του και Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Πότε ισχύει η ισότητα; (Γιώργος Νικητάκης – Σητεία).

320. Αν P τυχαίο σημείο στο εσωτερικό τριγώνου ΑΒΓ , κ,λ,μ οι αποστάσεις του P από τις κορυφές Α,Β,Γ αντιστοίχως και $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ οι αποστάσεις του P από τις πλευρές ΒΓ,ΑΓ,ΑΒ αντιστοίχως, τότε να αποδειχθεί ότι για το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ ισχύει η ανισότητα:

$$\kappa\alpha^2+\lambda\beta^2+\mu\gamma^2\ge 4E\left(\frac{\delta_1}{\eta\mu A}+\frac{\delta_2}{\eta\mu B}+\frac{\delta_3}{\eta\mu \Gamma}\right).$$

(Γιώργος Νικητάκης – Σητεία).

321. Αν Α είναι σημείο της C_f με $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ και Β σημείο της C_g με $g(x)=\dfrac{x^2}{2}+3$, τότε να βρεθεί η **ελάχιστη απόσταση** (ΑΒ). (Γιάννης Ηλιόπουλος – Καλαμάτα).

322. Αν $a,b>0$ να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της παράστασης: $\dfrac{|2a-b+2a(b-a)|+|b+2a-a(b+4a)|}{\sqrt{4a^2+b^2}}$

(Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος)

323. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\left(\dfrac{R}{E}\right)^2\ge 2\dfrac{\rho}{\upsilon_\alpha}\left(\dfrac{1}{\upsilon_\beta^2}+\dfrac{1}{\upsilon_\gamma^2}\right)$, όπου $R,E,\rho,\upsilon_\alpha,\upsilon_\beta,\upsilon_\gamma$ η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου , το εμβαδόν , η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και τα τρία ύψη του τριγώνου αντιστοίχως. (Γιώργος Νικητάκης – Σητεία).

324. Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma)\begin{cases}x^2+y^2+z^2-xz=0\\ yz=2\sqrt{3}\end{cases}$

(Διονύσης Γιάνναρος – Πύργος). Καλές διακοπές