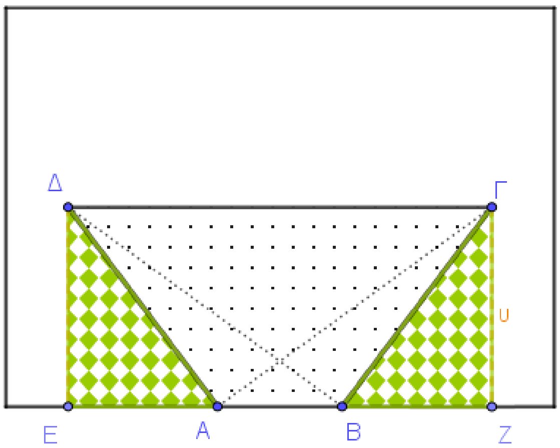
Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ

Στέργιος Τουρναβίτης

1. Με σκοπό την σχεδίαση ενός καραβιού, ένας μαθητής Δημοτικού σχολείου ζωγράφισε αρχικά ένα ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις $AB = 5\ cm, ΓΔ = 17\ cm$. Μπορείτε να τον βοηθήσετε να υπολογίσει το ύψος υ, τις μη παράλληλες πλευρές του y και τις διαγώνιες δ, αν είναι γνωστό ότι το εμβαδόν αυτού του τραπεζίου, καταλαμβάνει το $\frac{1}{4}$ της επιφάνειας ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $22\ cm$ μήκος και $16\ cm$ πλάτος;

Λύση:



Για να υπολογίσουμε το ύψος υ του τραπεζίου εφόσον γνωρίζουμε τις βάσεις και ότι το εμβαδόν του Ε είναι το $\frac{1}{4}$ του εμβαδού του ορθογωνίου ΕΖΓΔ, έχουμε: $\mathbf{E = \frac{(AB+ΓΔ)\cdot υ}{2} = \frac{1}{4}EZ\cdot EΔ}$

$\mathbf{\Rightarrow \frac{(5+17)\cdot υ}{2} = \frac{1}{4}22\cdot 16 \Rightarrow ... \Rightarrow υ = 8cm}$.

Αν από τα Γ και Δ φέρουμε τις κάθετες αποστάσεις στην απέναντι βάση ΑΒ, τα μήκη αυτά των καθέτων πλευρών, είναι ίσα μεταξύ τους, όπως είναι ίσα και τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ (γιατί;).

Από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων, μπορούμε να θέσουμε $\mathbf{AE = BZ = z}$ και $\mathbf{AΔ = BΓ = y}$. Εύκολα προκύπτει ότι:

$\mathbf{2z + 5 = 17 \Rightarrow z = 6cm}$

Εφαρμόζουμε το Π.Θ. σ' ένα από αυτά κι' έχουμε: $\mathbf{y = \sqrt{8^2 + 6^2} = ... = 10cm}$ είναι τα ίσα μήκη των μη παράλληλων πλευρών.

Για να βρούμε τις διαγώνιες δ, εφαρμόζουμε το Π.Θ. σ' ένα από τα επίσης ίσα ορθογώνια τρίγωνα ΔΕΒ, ΓΖΑ (γιατί;) κι' έχουμε:

$\mathbf{δ = \sqrt{8^2 + 11^2} = ... \cong 13.6cm}$.

2. Ένα κανονικό πολύγωνο με άγνωστο αριθμό πλευρών ν, έχει εμβαδόν $E_ν = 8$τ.μ. Η γωνία $φ_μ$ του κανονικού πολυγώνου που έχει τετραπλάσιο αριθμό πλευρών μ σε σχέση με αυτό $(μ = 4\cdot ν)$, είναι: $\hat{φ}_μ = 157^0\ 30'$.

Να υπολογισθούν:

2α) Ο αριθμός των πλευρών ν του κανονικού ν-γώνου,

2β) η πλευρά του $λ_ν$,

2γ) το απόστημά του $α_ν$ και,

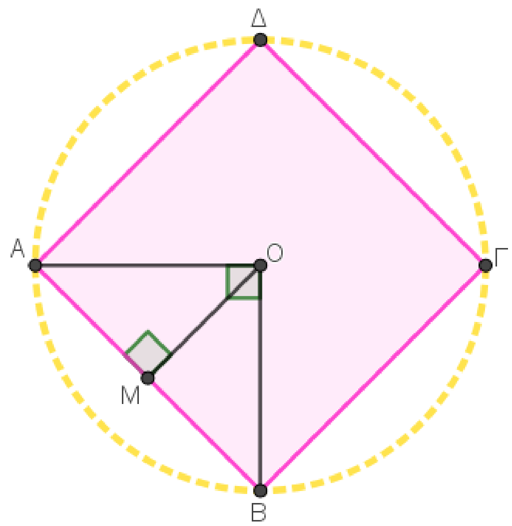
2δ) η περίμετρός του $P_ν$

Λύση:

2α) Για την γωνία $\mathbf{φ_μ = 157^0\ 30'}$ του κανονικού μ-γώνου, ισχύει: $\mathbf{φ_μ = 157^0\ 30' = 180^0 - \frac{360^0}{μ} \Rightarrow}$

$\mathbf{157.5^0 = 180^0 - \frac{360^0}{μ} \Rightarrow ... \Rightarrow μ = 16}$.

Επειδή $\mathbf{ν = \frac{1}{4}μ}$, **ν=4.**



2β)

Το εμβαδόν E_4 του τετραγώνου δίνεται από τον τύπο: $E_4 = 4 \cdot \frac{1}{2}\lambda_4 \cdot \alpha_4 = 8 \Rightarrow \lambda_4 \cdot \alpha_4 = 4\,(1)$

Γνωρίζουμε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
Αντικαθιστούμε στην (1) την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4, κι' έχουμε: $R\sqrt{2} \cdot \frac{R\sqrt{2}}{2} = 4 \Rightarrow$

$\ldots \Rightarrow R = 2$. Επομένως:
$\lambda_4 = 2\sqrt{2}$,

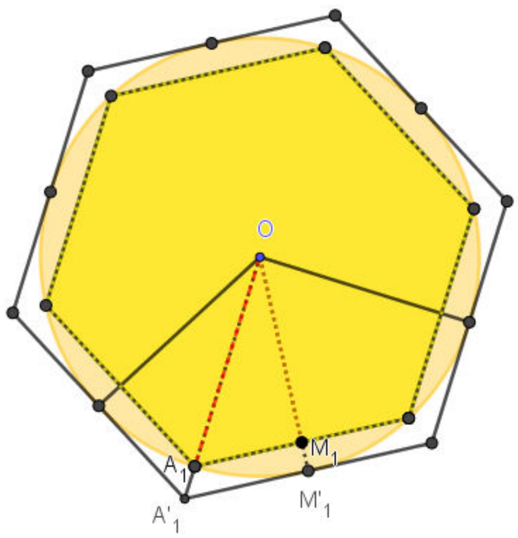
2γ) $\alpha_4 = \sqrt{2}$ και,

2δ) $P_4 = 8\sqrt{2}$.

3. **Η πλευρά και το απόστημα ενός κανονικού πολυγώνου που είναι περιγεγραμμένο σε κύκλο είναι αντίστοιχα $6\sqrt{3}$ cm και 9 cm.**
Να βρεθούν:
3α) Η πλευρά, το απόστημα, του κανονικού πολυγώνου που είναι εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο και έχει τον ίδιο αριθμό πλευρών με αυτό.
3β) Το συνολικό εμβαδό των κυκλικών τμημάτων που είναι μεταξύ του κύκλου και του εγγεγραμμένου κανονικού πολυγώνου.

<u>Λύση</u>:

3α) Γνωρίζουμε ότι δύο κανονικά πολύγωνα με το ίδιο πλήθος πλευρών, είναι όμοια.



Αν π.χ. κατασκευάσουμε σ' έναν κύκλο ένα κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σ' αυτό και στα μέσα των τόξων του φέρουμε τις εφαπτόμενες στον κύκλο και ενώσουμε τα σημεία τομής αυτών των εφαπτομένων, θα δημιουργήσουμε κατ' αυτό τον τρόπο ένα κανονικό εξάγωνο περιγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Μ' αυτόν τον τρόπο κατασκευάζεται και το περιγεγραμμένο κανονικό ν-γωνο, όταν έχουμε κατασκευάσει το αντίστοιχο ομόλογό του εγγεγραμμένο στον ίδιο κύκλο. Γι' αυτό στη συνέχεια αναφερόμαστε στο τυχαίο κανονικό ν-γωνο όπου ν φυσικός αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος του 3. Παρατηρούμε ότι το απόστημα α'_ν του περιγεγραμμένου κανονικού ν-γώνου, ταυτίζεται με την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου στο κανονικό ν-γωνο που είναι εγγεγραμμένο σ' αυτόν. Ονομάζουμε $\lambda_\nu,\ \alpha_\nu$ την πλευρά και το απόστημα του εγγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου και $\lambda'_\nu,\ \alpha'_\nu$ την πλευρά και το απόστημα του περιγεγραμμένου στον κύκλο κανονικού ν-γώνου, αντίστοιχα.
Από την σχέση ομοιότητας των δύο ορθογωνίων τριγώνων $A_1M_1O,\ A'_1M'_1O$, έχουμε:

$$\frac{\frac{\lambda_\nu}{2}}{\frac{\lambda'_\nu}{2}} = \frac{\alpha_\nu}{R} \Rightarrow \frac{\lambda_\nu}{6\sqrt{3}} = \frac{\alpha_\nu}{9} \Rightarrow \alpha_\nu = \frac{\lambda_\nu\sqrt{3}}{2}\,(1)$$

Επίσης από την σχέση που συνδέει την πλευρά και το απόστημα, ισχύει:

$$\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \alpha_\nu^2 = 9^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} \frac{\lambda_\nu^2}{4} + \left(\frac{\lambda_\nu\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow$$

$$\frac{\lambda_\nu^2}{4} + \left(\frac{\lambda_\nu\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 9^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \lambda_\nu = 9\ (2)$$ και

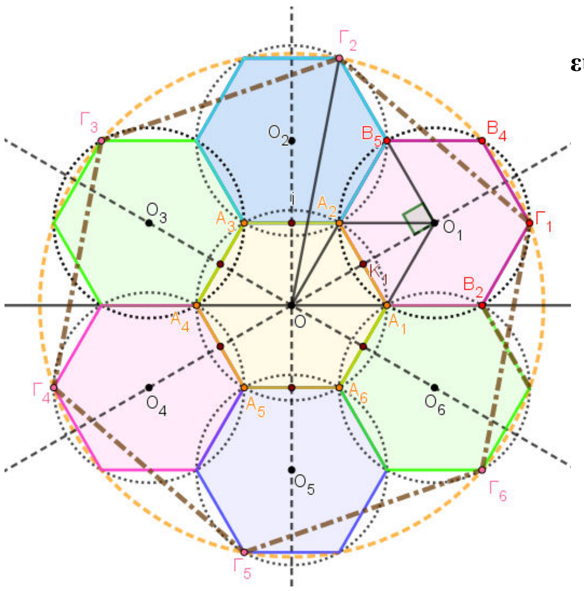
$\alpha_\nu \overset{(1)}{=} \frac{9\sqrt{3}}{2}$. Επειδή όπως είπαμε: $\alpha'_\nu = R = 9 \overset{(2)}{\Rightarrow}$
$\overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_\nu = R = 9$, συμπεραίνουμε ότι **ν=6**. (γιατί;)

3β) Το εμβαδόν του καθενός από τα ίσα κυκλικά τμήματα έστω **τ**, προκύπτει αν από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $\frac{\pi R^2}{6}$, αφαιρέσουμε το εμβαδόν ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς **R**.

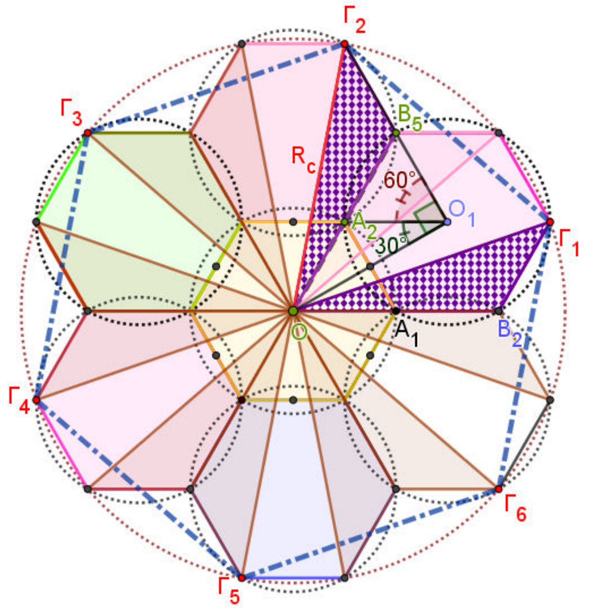
Άρα: $\tau = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \tau = \frac{R^2}{12}\cdot\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$.
Το ζητούμενο εμβαδόν θα είναι:

$$6\tau = \frac{R^2}{2}\cdot\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right) \Rightarrow 6\tau = \frac{81}{2}\cdot\left(2\pi - 3\sqrt{3}\right)$$

4. **Γύρω από τις πλευρές ενός κανονικού εξαγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το O(0,0) και ακτίνας R=1, «χτίζουμε» άλλα 6 κανονικά εξάγωνα ίσα προς αυτό. Η**



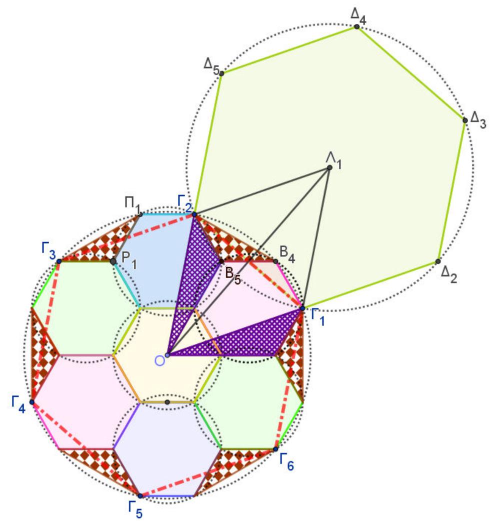
κατασκευή π.χ. του $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$ γίνεται όπως φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα.
Αρχικά φέρουμε την κάθετη στην A_1A_2, βρίσκουμε το συμμετρικό O_1 του O ως προς αυτή και εγγράφουμε στον κύκλο (O_1, O_1A_1) ένα κανονικό εξάγωνο.



Να αποδείξετε ότι:
4α) Τα 6 κανονικά εξάγωνα που κατασκευάζονται με αυτόν τον τρόπο, είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ίσης ακτίνας R=1, με αυτή του αρχικού κεντρικού εξαγώνου.
4β) Τα σημεία O, A_2, B_5 είναι συνευθειακά.
4γ) Αν ενώσουμε τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$ που είναι ανά ένα κορυφές των προηγούμενων κανονικών εξαγώνων, δημιουργείται ένα εξάγωνο, το οποίο αφού αποδείξετε ότι είναι κανονικό, να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R=1, την ακτίνα του R_C.
4δ) Τέλος, αν φέρουμε την κάθετη στην $\Gamma_1\Gamma_2$ και βρούμε το συμμετρικό Λ_1 του O ως προς

αυτή, μπορούμε να αποδείξουμε με παρόμοιο τρόπο όπως στο 4α) ερώτημα ότι το εξάγωνο $\Gamma_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4\Delta_5\Gamma_2$ που είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο $(\Lambda_1, \Lambda_1\Gamma_1)$, είναι κανονικό.
4δ$_{i}$) Με τι ισούται η απόσταση $d = O\Lambda_1$ των κέντρων των δύο κανονικών εξαγώνων;
4δ$_{ii}$) Να αποδείξετε ότι $d = \sqrt{3} \cdot R_C$.

<u>Λύση:</u>
4α) Το τετράπλευρο $OA_1O_1A_2$ είναι ρόμβος γιατί οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα. Επομένως το σημείο O_1 (το συμμετρικό του O ως προς την A_1A_2), θα ισαπέχει από τα σημεία A_1 και A_2, ίδια απόσταση με την πλευρά $\lambda_6 = R = 1$, του αρχικού (κεντρικού) κανονικού εξαγώνου. Εφόσον εγγράφουμε στον κύκλο



(O_1, O_1A_1) το κανονικό εξάγωνο $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$, η τελευταία κορυφή του (η A_2) θα συμπίπτει με το άλλο άκρο του τμήματος A_1A_2 που είναι ταυτόχρονα και πλευρά του αρχικού εξαγώνου με μήκος **R=1**, όσο και η ακτίνα των δύο κύκλων. Καθένα από αυτά τα τόξα των διαδοχικών κορυφών του $A_1B_2\Gamma_1B_4B_5A_2$ είναι 60^0. Όμοια αποδεικνύεται ότι και τα άλλα 5 κανονικά εξάγωνα με τον τρόπο που κατασκευάζονται είναι εγγεγραμμένα σε κύκλους ακτίνας $R = 1$.
4β) Οι γωνίες $B_5\hat{A}_2O_1$, $O_1\hat{A}_2A_1$, $A_1\hat{A}_2O$ είναι γωνίες ισοπλεύρων τριγώνων (ποιων;) και καθεμιά

τους είναι 60^0. Επομένως το άθροισμά τους θα είναι η ευθεία γωνία $B_5\hat{A}_2O_1 = 180^0$.

4γ) Το συμπέρασμα του προηγούμενου ερωτήματος μας επιτρέπει να θεωρήσουμε τα τμήματα OA_2 και A_2B_5 ως ευρισκόμενα στην ίδια ευθεία και με άθροισμα **2R=2**, που ταυτίζεται με το μήκος του OB_5. Τα σκιασμένα με μωβ τετραγωνίδια τρίγωνα, έχουν: δύο πλευρές ίσες (με μήκη **2**, **1**) και την περιεχόμενη γωνία ίση με $\varphi_6 = 120^0$. Αν κοιτάξουμε προσεκτικά το σχήμα υπάρχουν άλλα 10 ίσα τρίγωνα που έχουν ακριβώς τα ίδια στοιχεία με αυτά. Στην πραγματικότητα υπάρχουν 6 ζευγάρια (λαμβανομένων διαδοχικά με κοινή πλευρά π.χ. την OB_5) ίσα αμβλυγώνια και ανάμεσα σ' αυτά τα ίσα ζευγάρια, υπάρχουν άλλα 6 ισοσκελή και ίσα μεταξύ τους τρίγωνα (μπορείτε να τα εντοπίσετε στο σχήμα;).

Είναι προφανές ότι από τις παραπάνω ισότητες ότι το O ισαπέχει από τα σημεία $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, \Gamma_5, \Gamma_6$, άρα αυτά τα 6 σημεία βρίσκονται πάνω σε κύκλο. Μένει να αποδείξουμε ότι αυτά τα σημεία, χωρίζουν τον κύκλο σε **6** ίσα τόξα. Αν παρατηρήσουμε τα γραμμοσκιασμένα με την σκίαση της σκακέρας αμβλυγώνια και ισοσκελή τρίγωνα στο τελευταίο σχημα της άσκησης, αυτά έχουν από 2 πλευρές ίσες με την ακτίνα **R=1** και τις περιεχόμενες γωνίες από 120^0 (γιατί;). Άρα κάθε τόξο κάθε πλευράς του εξαγώνου $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$ είναι το άθροισμα δύο ίσων τόξων, αφού στο καθένα από αυτά αντιστοιχούν δύο ίσες χορδές. Π.χ. στην πλευρά-χορδή του κύκλου $\Gamma_1\Gamma_2$, αντιστοιχεί το τόξο της χορδής Γ_1B_4 συν το τόξο της χορδής $B_4\Gamma_2$. Και για τις άλλες 5 πλευρές το ίδιο ισχύει. Τα τόξα είναι μεταξύ τους ίσα, το ίδιο και οι πλευρές του εξαγώνου γιατί σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα και αντιστρόφως. Κάθε τώρα εγγεγραμμένη γωνία αυτού του εξαγώνου, βαίνει σε **6-2** τόξα των 60^0. Επομένως όλες οι γωνίες είναι ίσες με $\varphi_6 = 120^0$.

Το εξάγωνο $\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\Gamma_5\Gamma_6$ είναι κανονικό γιατί έχει όλες τις πλευρές και όλες τις γωνίες του ίσες. Όσον αφορά τον υπολογισμό της ακτίνας του περιγεγραμμένου κύκλου του εξαγώνου (ή της ακτίνας της συστάδας όπως λέγεται στην τεχνολογία των κυψελωτών δικτύων) μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

1ος τρόπος:
Εφαρμόζουμε το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο (γιατί;) $OO_1\Gamma_2$ κι' έχουμε:

$$R_c^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2^2 = 7 \Rightarrow R_c = \sqrt{7}.$$

2ος τρόπος:
Σύμφωνα με το Θεώρημα των συνημιτόνων σ' ένα από τα 12 ίσα αμβλυγώνια τρίγωνα π.χ. το $OB_5\Gamma_2$ ισχύει:

$$R_c^2 = 2^2 + 1^2 - 2\cdot 2\cdot 1\cdot \sigma\upsilon\nu(120^0) \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_c = \sqrt{7}$$

4δ$_i$)& 4δ$_{ii}$) Η απόσταση **d** είναι ίση με το διπλάσιο του ύψους ενός ισοπλεύρου τριγώνου πλευράς R_c.

Επομένως $d = 2\cdot\dfrac{R_c\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\cdot R_c \overset{4\gamma)}{\Rightarrow} d = \sqrt{21}$

5. Στρέφουμε τον οριζόντιο άξονα κατά γωνία 30^0 και προκύπτει ο άξονας u. Τον κατακόρυφο άξονα y΄y τον αφήνουμε αναλλοίωτο, ονομάζοντάς τον v. Οι δύο ευθείες u, v μαζί με ίσα κανονικά εξάγωνα ακτίνας R=1 των οποίων τα κέντρα τους βρίσκονται πάνω σ' αυτές και έχουν επίσης μία κοινή πλευρά ανά δύο, ορίζουν στο επίπεδο, ένα Πλαγιογώνιο - «Κυψελοειδές Σύστημα Συντεταγμένων» και ορίζουμε μονάδα μέτρησης και στους δύο άξονες, την απόσταση των κέντρων δύο γειτονικών εξαγώνων-κυψελών. Όπως αποδείξαμε στην προηγούμενη άσκηση η απόσταση αυτή είναι ίση με το διπλάσιο του αποστήματος του κανονικού εξαγώνου ακτίνας R=1. Επομένως, $|\vec{i}| = |\vec{j}| = R\sqrt{3} = 1\cdot\sqrt{3} = \sqrt{3}$ όπου $\vec{i}$, $\vec{j}$ τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων. Για να βρούμε τη θέση ενός σημείου με συντεταγμένες ακέραιους και θετικούς αριθμούς π.χ. Δ(7,9), εφόσον η μονάδα μέτρησης εκφράζει την απόσταση των κέντρων δύο κυψελών και έχουμε χτίσει πάνω σ' αυτούς τους άξονες κανονικά εξάγωνα ακτίνας 1, θα μετρήσουμε 7 κυψέλες από μία κυψέλη αναφοράς στον άξονα u κατόπιν θα στραφούμε 60^0 κατά την θετική φορά ή παράλληλα προς τον v κατακόρυφα προς τα πάνω και θα μετρήσουμε και εκεί 9 κυψέλες. Σύμφωνα με τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα των συνημιτόνων στο τρίγωνο ΒΓΑ,

5α) να αποδείξετε, ότι:
για δύο σημεία $A(u_1, v_1)$, $B(u_2, v_2)$, η απόσταση $d(A,B)$ των δύο σημείων στο πλαγιογώνιο σύστημα συντεταγμένων, είναι:

$$d(A,B) = \sqrt{(u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2 + (u_2 - u_1)(v_2 - v_1)}$$

Οι διαφορές, $u_2 - u_1$, $v_2 - v_1$ επειδή παριστάνουν μήκη πλευρών, λαμβάνονται ως θετικές.

Εφαρμογή: Βρείτε την απόσταση,
i) των σημείων Α(8,5), Β(14,11),

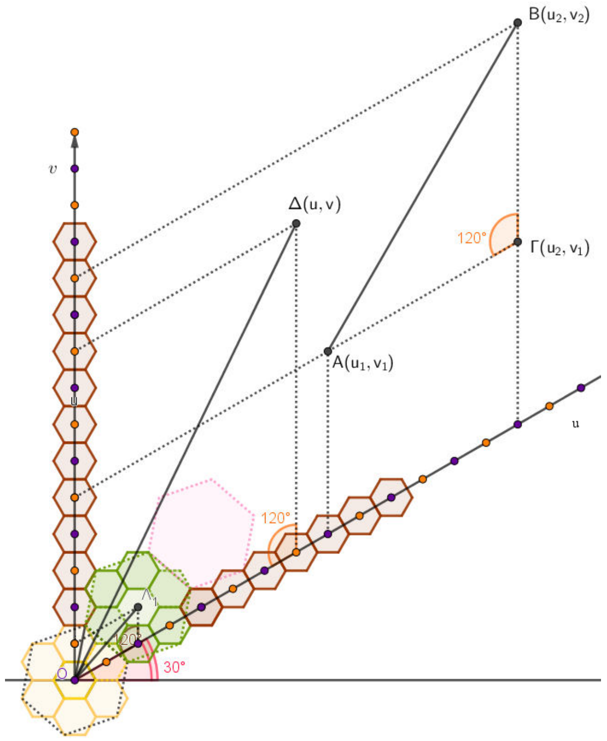
ii) των σημείων Ο(0,0), Δ(7,9).

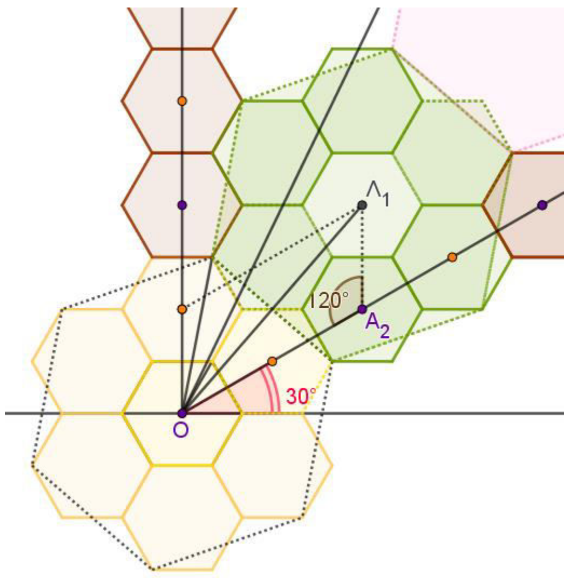
5β) Μπορείτε με τον παραπάνω τύπο και τις μετατροπές των μονάδων από το πλαγιογώνιο στο ορθοκανονικό, να επαληθεύσετε ότι η απόσταση των κέντρων δύο γειτονικών συστάδων που έχουν 7 εξάγωνα η κάθε μία ακτίνας R, είναι:

$$\mathbf{d=\sqrt{3}\cdot R\sqrt{7}=R\sqrt{21}}\ ;$$

5γ) Ποια είναι η σχέση που συνδέει την απόσταση d με την ακτίνα R_C της συστάδας, στην παραπάνω περίπτωση;

<u>Λύση:</u>





<u>Λύση:</u>

5α) Στο τρίγωνο **ΑΓΒ** η γωνία **Γ** είναι $\mathbf{120^0}$ και ισχύει:

$$d(A,B)=\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2-2\cdot(u_2-u_1)(v_2-v_1)\cdot \sigma\upsilon\nu(120^0)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2-2\cdot(u_2-u_1)(v_2-v_1)\cdot(-\frac{1}{2})}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(A,B)=\sqrt{(u_2-u_1)^2+(v_2-v_1)^2+(u_2-u_1)(v_2-v_1)}$$

Εφαρμογή: (i) $\mathbf{d(A,B)=6\sqrt{3}}$

Γιατί στο πρόγραμμα Geogebra με το εργαλείο μέτρησης έδειξε την ίδια απόσταση ίση με **18**;

ii) $\mathbf{d(A,B)=\sqrt{193}}$

5β) Αν θεωρήσουμε ότι το κέντρο **Ο** μιας συστάδας στο κυψελοειδές σύστημα συντεταγμένων κανονικών εξαγώνων ακτίνας **R=1**, έχει συντεταγμένες **(0,0)**, για να μεταβούμε στο κέντρο $\mathbf{\Lambda_1}$ της γειτονικής της στοιβάδας, περνάμε **2** κυψέλες στον άξονα **u** και **1** κυψέλη στον άξονα **v**. Άρα ως προς αυτό το πλαγιογώνιο σύστημα, το $\mathbf{\Lambda_1}$ έχει συντεταγμένες **(2,1)**. Από το τρίγωνο $\mathbf{OA_2\Lambda_1}$ και το Θεώρημα των συνημιτόνων, έχουμε για την απόσταση **d** των δύο γειτονικών συστάδων:

$$\mathbf{d=\sqrt{2^2+1^2-2\cdot 2\cdot 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\ (1)},$$

άρα $\mathbf{d=\sqrt{7}}$

Ο τύπος αυτός στο ορθοκανονικό έχει την ίδια μορφή μόνο που κάθε μονάδα μέτρησης του **u** ή του **v**, αντιστοιχεί σε **2** αποστήματα κανονικού εξαγώνου ακτίνας **R=1** και είναι: $\mathbf{2\cdot\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}}$, οι **2** μονάδες του **u** θα αντιστοιχούν σε **4** αποστήματα κανονικού εξαγώνου ή $\mathbf{4\cdot\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}}$ μονάδες του ορθοκανονικού. Αντικαθιστώντας στον τύπο **(1)** τα παραπάνω, όπου **2** το $\mathbf{2\sqrt{3}}$ και όπου **1** το $\mathbf{\sqrt{3}}$, έχουμε την ίδια απόσταση εκφρασμένη στο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων:

$$\mathbf{d=\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}^2-2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}\Rightarrow}$$

$$\mathbf{\Rightarrow d=\sqrt{(2^2+1+2)\cdot 3}=\sqrt{21}}$$

Τι γίνεται όταν στους άξονες «χτίζουμε» με κανονικά εξάγωνα ακτίνας γενικά, **R**;

Τότε αν θελήσουμε να μετατρέψουμε την μονάδα μέτρησης του πλαγιογώνιου συστήματος συντεταγμένων και των δύο αξόνων **u** και **v**, στο ορθοκανονικό θα πάρουμε: $2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}$.

Τώρα αντικαθιστούμε στον τύπο **(1)**, όπου **1** το $R\sqrt{3}$ και όπου **2** το $2R\sqrt{3}$

$$d = \sqrt{\left(2R\sqrt{3}\right)^2 + \left(R\sqrt{3}\right)^2 + 2R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$d = \sqrt{\left(R\sqrt{3}\right)^2 \cdot (2^2 + 1 + 2)} \Rightarrow d = R\sqrt{3} \cdot \sqrt{7} = R\sqrt{21}$$

5γ) Επίσης όπως είδαμε και από την προηγούμενη άσκηση, η απόσταση αυτή μπορεί να εκφραστεί ως **2** αποστήματα του μεγάλου εξαγώνου ακτίνας R_c.

Άρα $d = 2 \cdot \frac{R_c\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot R_c$ (2)

Σημείωση: Από το 4γ) της προηγούμενης άσκησης αν αντί για ακτίνα με μήκος **1** των κανονικών εξαγώνων, έχουμε ακτίνα **R** γενικά, πάλι από το θεώρημα των συνημιτόνων και ανάλογο σχήμα όπως αυτό του υποερωτήματος, έχουμε:

$$R_c^2 = (2R)^2 + R^2 + 2R \cdot R \Rightarrow$$

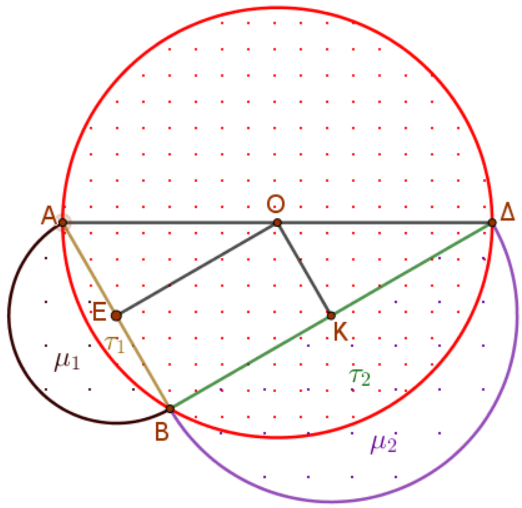
$$\Rightarrow R_c = \sqrt{4R^2 + R^2 + 2 \cdot R^2} = R\sqrt{7}.$$

Αντικαθιστώντας αυτή την τιμή του R_c στον τύπο **(2)** πάλι προκύπτει ότι η απόσταση **d** των δύο γειτονικών συστάδων (clusters) με **7** εξάγωνα το καθένα είναι $R\sqrt{21}$.

6. Σε κύκλο με διάμετρο την ΑΔ γράφουμε δύο ημικύκλια εκτός του κύκλου. Το ένα έχει διάμετρο τη χορδή ΒΔ τόξου 120^0 και το άλλο διάμετρο την ΑΒ, όπως δείχνει η παρακάτω εικόνα.

6α) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ή το διπλάσιο του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΕΒΚΟ όπου Κ και Ε τα μέσα των χορδών ΑΒ, ΒΔ αντίστοιχα.

6β) Αν ΒΔ = $5\sqrt{3}$ m να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο μηνίσκων και των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων, είναι: $E = \mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = 12.5\pi$.



Λύση:

6α) Παρατηρούμε ότι το τρίγωνο **ΑΒΔ** είναι ορθογώνιο στο **Β**. Επίσης η γωνία του **Δ** είναι 30^0. Άρα $AB = R$, όπου **R** η ακτίνα του κύκλου. (γιατί;) Όπως γνωρίζουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου τριγώνου **ΑΒΔ** συναρτήσει της ακτίνας **R**, αρκεί να υπολογίσουμε το μήκος της άλλης κάθετης πλευράς του **ΒΔ**, αφού αυτό ισούται με το ημιγινόμενο των καθέτων πλευρών του. Η **ΒΔ** μπορεί να υπολογιστεί είτε από το $\sigma\upsilon\nu(30^0)$, είτε από το **Π.Θ.** είτε ακόμη από το ότι είναι κατευθείαν $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ αφού αντιστοιχεί σ' αυτήν επίκεντρη γωνία $\hat{\omega}_3 = 120^0$.

Επομένως: $E = (AB\Delta) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2}$.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι το άθροισμα των εμβαδών κάθε μηνίσκου μαζί με το αντίστοιχο κυκλικό τμήμα, δίνει το εμβαδόν του ημικυκλίου στο οποίο περιέχονται. Αυτό εκφράζεται από τις δύο σχέσεις:

$$\mu_1 + \tau_1 = \pi \cdot \frac{R^2}{8} \quad (1)$$

$$\mu_2 + \tau_2 = 3\pi \cdot \frac{R^2}{8} \quad (2)$$

Αν προσθέσουμε κατά μέλη τις (1), (2), έχουμε:

$\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = \frac{1}{2}\pi R^2$ **(3)**, το οποίο ταυτίζεται με το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΒ.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο κυκλικών τμημάτων και το εμβαδόν του τριγώνου **ΑΒΔ** δίνει επίσης το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΔ. Οπότε έχουμε:

$$\tau_1 + \tau_2 + (AB\Delta) = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (4)$$

$$\mu_1 + \cancel{\tau_1} + \mu_2 + \cancel{\tau_2} = \cancel{\tau_1} + \cancel{\tau_2} + (AB\Delta) \quad (5)$$

Η σχέση (5) αποδεικνύει το 1ο σκέλος του ερωτήματος. Για το 2ο σκέλος αρκεί να αναλύσουμε το εμβαδόν του **ΑΒΔ** που βρήκαμε προηγουμένως, όπως παρακάτω:

$$E = (AB\Delta) = \frac{R^2\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{R}{2} = 2 \cdot (EBKO)$$

6β) Σύμφωνα με την εκφώνηση $B\Delta = 5\sqrt{3}$ **m.** Από το προηγούμενο ερώτημα είναι ακόμη και, $B\Delta = R\sqrt{3}$ **m**. Από αυτές τις δύο ισότητες συμπεραίνουμε ότι $R = 5$**m**.

Όπως φαίνεται και από την ισότητα **(3)** του προηγούμενου ερωτήματος,

$$\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = \frac{1}{2}\pi R^2 \quad (3)$$

Αντικαθιστούμε στο 2ο μέλος της ισότητας αυτής το R=5 κι' έχουμε:

$$\mu_1 + \tau_1 + \mu_2 + \tau_2 = 12.5\pi$$

7. Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας ρ, τέμνονται έτσι ώστε η διάκεντρος ΟΚ να είναι ίση με την κοινή χορδή ΑΒ.

7α) Να δικαιολογήσετε ότι το τετράπλευρο ΑΟΒΚ είναι τετράγωνο.

Περιμετρικά αυτού του τετραγώνου κατασκευάζουμε άλλα 4 ίσα τετράγωνα, τα ΑΕΙΟ, ΟΒΣΤ, ΚΒΠΡ και ΚΑΛΜ.

7β) Να αποδείξετε ότι τα 6 μικτόγραμμα τρίγωνα ΑΛΜ, ΙΕΑ, ΒΣΤ, ΒΠΡ, ΑΚΒ, ΑΟΒ έχουν ίσα εμβαδά και να υπολογίσετε το εμβαδόν του καθενός από αυτά, συναρτήσει της ακτίνας ρ των δύο ίσων κύκλων.

Αν γνωρίζουμε ότι το συνολικό εμβαδόν των 6 μικτόγραμμων τριγώνων είναι: $96 - 24\pi$, να υπολογισθούν:

7γ) Η ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων και,

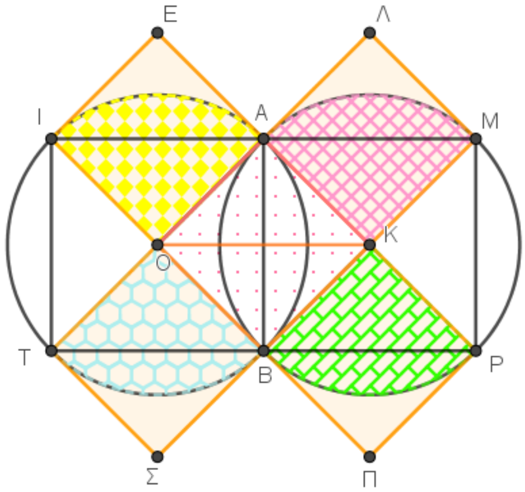
7δ) το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.

<u>Λύση:</u>

7α) Το τετράπλευρο **ΑΟΒΚ** είναι τετράγωνο γιατί οι διαγώνιοί του είναι και μεσοκάθετοι η μία της άλλης και επιπλέον είναι και ίσες.

7β) Το εμβαδόν καθενός από τα 6 μικτόγραμμα τρίγωνα, έστω **Ε**, προκύπτει αν από ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με **ρ**, αφαιρέσουμε ένα κυκλικό τμήμα εμβαδού έστω **τ**.

Είναι προφανές ότι τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα είναι ίσα μεταξύ τους επειδή έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες με την ακτίνα ρ των δύο ίσων κύκλων. Καθένα από τα κυκλικά τμήματα εμβαδού **τ**, προκύπτει αν από ένα τεταρτοκύκλιο (κυκλικός τομέας επίκεντρης γωνίας 90^0) και ακτίνας **ρ**, αφαιρέσουμε ένα ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με κάθετες πλευρές ίσες με **ρ**.



Όλα αυτά συνοψίζονται στις δύο ισότητες:

$$E = \frac{1}{2}\rho^2 - \tau \ (1), \quad \tau = \frac{\pi\rho^2}{4} - \frac{1}{2}\rho^2 \ (2)$$

$$\text{Από } (1) \wedge (2) \Rightarrow E = \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) \quad (3)$$

7γ) Από την ισότητα (3) και την εκφώνηση έχουμε:

$$6 \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) = 96 - 24\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{6} \cdot \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) = \cancel{6} \cdot (16 - 4\pi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho^2}{4} \cdot (4 - \pi) = 4 \cdot (4 - \pi) \Rightarrow \rho = 4$$

7δ) Η τομή των δύο ίσων κύκλων εμβαδού έστω **κ**, αποτελείται από δύο ίσα κυκλικά τμήματα εμβαδού **τ**. Όπως προκύπτει και από την **(2)** αν αντικαταστήσουμε όπου **ρ=4**, έχουμε:

$$\kappa = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa = 2 \cdot \left(\frac{\pi \cdot 4^2}{4} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \kappa = 2 \cdot (4\pi - 8) \ \Rightarrow \kappa = 8 \cdot (\pi - 2)$$

<u>Βιβλιογραφία:</u>

Για τις ασκήσεις 4, 5 χρησιμοποιήθηκαν οι Σημειώσεις του κ. Νικολάου Τσελίκα του μαθήματος Ευρυζωνικά Δίκτυα, στο ΜΠΣ «Εφαρμοσμένα Πληροφοριακά Συστήματα» του ΑΕΙ Πειραιά Τ.Τ.