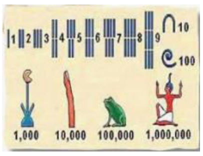
Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

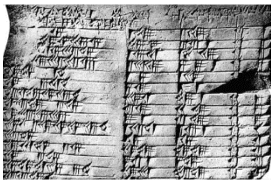
Επίλυση προβλημάτων από την αρχαία Αίγυπτο και την Μεσοποταμία με σύγχρονη αντιμετώπιση και συμβολισμούς

Στέργιος Τουρναβίτης

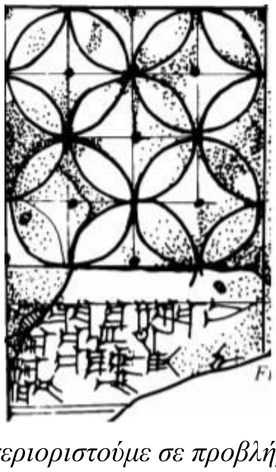


Οι περισσότερες γνώσεις μας για τα Αιγυπτιακά Μαθηματικά περίπου 3 χιλιετίες π.χ. προέρχονται από τους παπύρους.

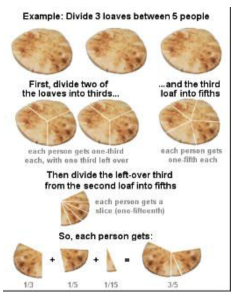
Οι σπουδαιότεροι από αυτούς της Μόσχας, του Αχμή-Rhind, του Βερολίνου, περιέχουν πολλά πρακτικά προβλήματα όπως ο υπολογισμός της χωρητικότητας μιας σιταποθήκης, του όγκου μιας κανονικής ή κόλουρης πυραμίδας, πόσο σιτάρι χρειάζεται για να παρασκευαστεί μία συγκεκριμένη ποσότητα ψωμιού ή ζύθου κ.ά. Οι



γνώσεις μας για τα Μαθηματικά των Βαβυλωνίων προέρχονται από τις πλάκες πηλού στις οποίες χαράσσονταν και στη συνέχεια ψήνονταν στον καυτό ήλιο ή φούρνους. Ευτυχώς αυτού του είδους τα γραπτά ντοκουμέντα ήταν πιο ανθεκτικά στο χρόνο απ' ότι οι αιγυπτιακοί πάπυροι.



Θεωρούσαν απλές τις γραμμικές εξισώσεις για να ασχοληθούν με αυτές, ενώ αντιμετώπιζαν με άνεση την επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού, ήξεραν να επιλύουν προβλήματα με δύο αγνώστους με τρόπο που μοιάζει με τον σημερινό και πολλά ακόμη.
Εμείς στην σύντομη αυτή ξενάγησή μας θα περιοριστούμε σε προβλήματα που ενδεχομένως έχουμε διασκευάσει για να ανταποκρίνονται και στις ανάγκες της Α΄Λυκείου.



1. Επιθυμούμε να διαιρέσουμε 6 φραντζόλες σε 10 άνδρες.

__Λύση__ Κάθε άνδρας θα πάρει τα $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ της φραντζόλας.

Αυτό προϋποθέτει να κόψουμε κάθε μία από τις 10 φραντζόλες σε 5 ίσα μέρη και να δώσουμε σε κάθε άνδρα τα 3 από αυτά. Μία περισσότερο πρακτική προσέγγιση θα επιτευχθεί αν αναλύσουμε το κλάσμα $\frac{6}{10}$ σε δύο ομώνυμα κλάσματα.

$$\frac{6}{10}=\frac{1+5}{10}=\frac{1}{10}+\frac{5}{10}=\frac{1}{10}+\frac{1}{2}$$

Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί έγινε αυτή η διαδικασία;

2. Να μοιραστούν 700 καρβέλια ψωμιού σε 4 ανθρώπους και σε μερίδια ανάλογα προς τους αριθμούς $\frac{2}{3},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ αντίστοιχα.

__Λύση__ Έστω x,y,z,w τα μερίδια του 1ου, 2ου, 3ου, 4ου, αντίστοιχα. Σύμφωνα με το πρόβλημα ισχύουν οι παρακάτω εξισώσεις:

$$x+y+z+w=700 \quad (1)$$

$$\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{w}{\frac{1}{4}} \quad (2)$$

Ένας τρόπος είναι να εξισώσουμε καθένα από τους 4 ίσους λόγους με λ, να αντικαταστήσουμε στην (1) τις μεταβλητές x,y,z,w «συναρτήσει» του λ, να λύσουμε ως προς λ την εξίσωση που θα προκύψει και να αντικαταστήσουμε ξανά το λ για να βρούμε τα 4 άγνωστα μερίδια.

Μπορούμε όμως να βρούμε κατευθείαν με τι ισούται καθένα από τα 4 ίσα κλάσματα, εκμεταλλευόμενοι μία ιδιότητα των αναλογιών που χρησιμοποιείται ευρέως σε τέτοιου είδους προβλήματα. Έχουμε: $\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{w}{\frac{1}{4}}=$

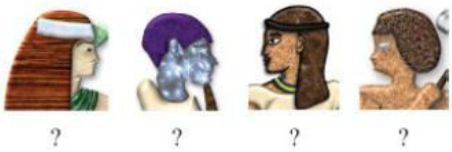
$$=\frac{x}{\frac{2}{3}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{3}}=\frac{w}{\frac{1}{4}}=\frac{x+y+z+w}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=$$

$= \dfrac{700}{\frac{7}{4}} = \mathbf{400}$. Άρα $\mathbf{x = \frac{2}{3}400 = 266\frac{2}{3}}$,

$\mathbf{y = \frac{1}{2}400 = 200}$, $\mathbf{z = \frac{1}{3}400 = 133\frac{1}{3}}$,

$\mathbf{w = \frac{1}{4}400 = 100}$.

3. **Σε τέσσερις ανθρώπους διαμοιράστηκαν 28 καρβέλια ψωμί έτσι ώστε καθένας από αυτούς πήρε 3 παραπάνω από τον προηγούμενό του. Πόσα καρβέλια πήρε ο καθένας χωριστά;**



Λύση

Αν υποθέσουμε ότι ο 1ος πήρε $\mathbf{x}$ καρβέλια ψωμί, ο 2ος πήρε $\mathbf{x+3}$, ο 3ος $\mathbf{x+6}$ και ο 4ος $\mathbf{x+9}$.
Αν αθροίσουμε όλα αυτά τα μερίδια των τεσσάρων ατόμων, καταλήγουμε στην εξίσωση:
$\mathbf{4x+18=28 \Rightarrow x=2,5}$.
Επομένως αντικαθιστώντας το $\mathbf{x}$, βρίσκουμε την ποσότητα του ψωμιού **2.5, 5.5, 8.5, 11.5** που πήραν ο 1ος, 2ος, 3ος, 4ος αντίστοιχα.
Τα προβλήματα ζύγισης πετρών από διάφορα πολύτιμα μέταλλα, όπως ασήμι, απασχολούσαν πολύ τους Βαβυλώνιους όπως φαίνεται από τα γραφόμενά τους στα διάφορα ευρήματα στις πλάκες πηλού.

4. **Πόση είναι η μάζα μιας πέτρας αν γνωρίζουμε ότι η νέα της μάζα είναι η μάζα της μαζί με το $\frac{1}{7}$ αυτής της μάζας. Επίσης η νέα μάζα μαζί με το $\frac{1}{11}$ της νέας της μάζας είναι 1 μίνα. (Να βρεθεί το αποτέλεσμα σε τζιν. Δίνεται 1 μίνα=60 τζιν)**

Λύση

Αν $\mathbf{x}$ είναι η άγνωστη μάζα της πέτρας, $\mathbf{y}$ η νέα της μάζα που προέκυψε από κάποια πρόσμιξη με επιπλέον υλικό, τότε ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\mathbf{y = x + \frac{1}{7}x \ (1),\ y + \frac{1}{11}y = 60 \ (2)}$$

Από την λύση του συστήματος των δύο εξισώσεων παίρνουμε $\mathbf{x = 48.125}$ τζιν.

5. **Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Αφαίρεσα το $\frac{1}{7}$ της μάζας της, στη συνέχεια αφαίρεσα το $\frac{1}{13}$ από την μάζα που απέμεινε, τη ζύγισα και βρήκα 1 μίνα. Ποια είναι η αρχική μάζα της πέτρας;**

Λύση

Υποθέτουμε ότι η πέτρα έχει μάζα $\mathbf{x}$ τζιν. Από το πρόβλημα προκύπτει η εξίσωση:

$\mathbf{x - \frac{1}{7}x - \frac{1}{13}\left(x - \frac{1}{7}x\right) = 60}$. Αν τη λύσουμε ως προς $\mathbf{x}$ προκύπτει $\mathbf{x = 75.8\overline{3}}$ τζιν.

6. **Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Αφαίρεσα το $\frac{1}{7}$ της μάζας της. Στη νέα μάζα πρόσθεσα το $\frac{1}{11}$ αυτής και από την μάζα που προέκυψε αφαίρεσα το $\frac{1}{13}$ αυτής. Ζύγισα την τελική μάζα και βρήκα 1 μίνα. Ποια είναι η αρχική μάζα (σε τζιν) της πέτρας;**

Λύση

Αν $\mathbf{x}$ η αρχική μάζα της πέτρας και $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ οι μάζες που προκύπτουν από τις προσθαφαιρέσεις μαζών της αρχικής μάζας με την ίδια σειρά που αναφέρονται στο πρόβλημα, τότε έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\mathbf{x - \frac{1}{7}x = y,\ y + \frac{1}{11}y = z,\ z - \frac{1}{13}z = 60}$$

Από την τελευταία εξίσωση βρίσκουμε $\mathbf{z = 65}$. Αν αντικαταστήσουμε αυτή την τιμή στην μεσαία και στη συνέχεια αυτό που θα βρούμε για $\mathbf{y}$ στην 1η, παίρνουμε: $\mathbf{x = 69.51\overline{38}}$ τζιν.

7. **Βρήκα μία πέτρα αλλά δεν τη ζύγισα. Πήρα 6 φορές τη μάζα της και πρόσθεσα 2 τζιν. Στη μάζα που προέκυψε πρόσθεσα το 24πλάσιο του $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{7}$ αυτής. Τη ζύγισα και τη βρήκα 1 μίνα. Ποια είναι η αρχική μάζα της πέτρας;**

Λύση

Όπως και στα προηγούμενα προβλήματα, καλούμε $\mathbf{x}$ την αρχική μάζα της πέτρας και $\mathbf{y}$ τη νέα μάζα. Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\mathbf{6x + 2 = y \ (1),\ y + 24 \cdot \left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{7}y\right)\right] = 60 \ (2)}$$

Η λύση ως προς $\mathbf{y}$ της τελευταίας εξίσωσης δίνει $\mathbf{y=28}$ ενώ από την 1η παίρνουμε $\mathbf{x=4.\overline{3}}$ τζιν.

Από τους αρχαίους πολιτισμούς της Περσίας και της Ινδίας όπου καλλιεργούνταν τα κίτρα και τα μάνγκο αντίστοιχα, προέρχονται πιθανόν τα δύο επόμενα προβλήματα.

8. Η συνολική τιμή 9 κίτρων και 7 μήλων είναι 107 νομισματικές μονάδες, ενώ η συνολική τιμή 7 κίτρων και 9 μήλων είναι 101 ν.μ. Ποια είναι η τιμή του ενός κίτρου και ενός μήλου;

Λύση

Έστω $\mathbf{x}$ η τιμή του ενός κίτρου και $\mathbf{y}$ η τιμή του ενός μήλου. Τότε έχουμε:

$$\mathbf{9x+7y=107\ (1)}$$
$$\mathbf{7x+9y=101\ (2)}$$

Με τα γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους θα ασχοληθούμε εκτενέστερα στην επόμενη τάξη. Ωστόσο από το Γυμνάσιο είχαμε αναπτύξει διάφορες μεθόδους επίλυσης αυτών, όπως επίσης και στην φετινή τάξη σε προβλήματα Φυσικής, Χημείας κ.ά.

Αν λύσουμε το σύστημα με οποιαδήποτε μέθοδο βρίσκουμε $\mathbf{x=8,\ y=5}$ μονάδες.

9. Μία νύχτα σ' ένα δάσος όπου ζούσε μία οικογένεια μαϊμούδων, ο μπαμπάς δεν μπορούσε να κοιμηθεί και κατέβηκε από το δέντρο στο έδαφος όπου σ' ένα λαγούμι είχαν αποθηκεύσει μερικά μάνγκο. Καθώς ήταν πεινασμένος, πήρε και έφαγε το $\frac{1}{6}$ από τα μάνγκο. Αργότερα την ίδια νύχτα η μητέρα της οικογένειας ήταν και αυτή πεινασμένη και έφαγε το $\frac{1}{5}$ από αυτά που άφησε ο πατέρας. Αργότερα καθένας από τα τρία μεγαλύτερα αδέρφια πήραν το $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ από τα αντίστοιχα υπόλοιπα. Ο «Βενιαμίν» της οικογένειας πεινούσε και αυτός και έφαγε τα 3 τελευταία μάνγκο που είχαν απομείνει. Πόσα μάνγκο έφαγε ο καθένας;

Λύση

Έστω $\mathbf{x}$ τα μάνγκο της κρυψώνας. Σύμφωνα με το πρόβλημα και τους υπολογισμούς μας, καθένα από τα μέλη της 6-μελούς οικογένειας έφαγε,… τα $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{6}}$ από αυτά. Όμως τόσα είναι και αυτά που έμειναν για το μικρότερο μαϊμουδάκι.

Άρα $\mathbf{\frac{x}{6}=3 \Rightarrow x=18}$

10. Κάποιος δίνει στους ιερούς Βραχμάνες 1 μονάδα κάθε $\frac{1}{3}$ της ημέρας. Ένας άλλος δίνει το ίδιο ποσό κάθε $\frac{1}{2}$ της ημέρας και ένας 3ος δίνει 3 μονάδες κάθε 5 ημέρες. Σε πόσο χρονικό διάστημα αν διατηρηθούν αυτές οι αναλογίες θα έχουν δώσει 100 μονάδες;

Λύση

Ο 1ος:

στο $\frac{1}{3}$ της ημέρας δίνει 1 μονάδα,

στα $\frac{3}{3}$ της ημέρας (1 ημέρα) ...δίνει 3 μονάδες.

Ο 2ος:

στο $\frac{1}{2}$ της ημέρας δίνει 1 μονάδα,

στα $\frac{2}{2}$ της ημέρας ...δίνει 2 μονάδες.

Ο 3ος:

σε 5 ημέρες δίνει 3 μονάδες,

σε 1 ημέρα δίνει $\frac{3}{5}$ της μονάδας.

Σε 1 ημέρα και οι τρεις μαζί δίνουν

$\mathbf{3+2+\frac{3}{5}=\frac{28}{5}=5.6}$ μονάδες.

Τις $\frac{28}{5}$ μονάδες τις δίνουν και οι τρεις σε 1 ημέρα.

Άρα τις 100 μονάδες θα τις δώσουν σε περίπου **17.857** ημέρες.