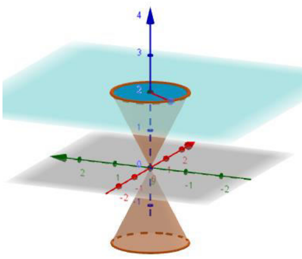
ΤΑΞΗ: Β΄

Οι Κωνικές Τομές και οι εφαρμογές τους

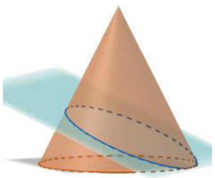
Στέργιος Τουρναβίτης

Μία ενότητα των Μαθηματικών που συνδέει την Άλγεβρα με την Γεωμετρία είναι σίγουρα οι Κωνικές Τομές. Λέγονται έτσι γιατί μπορεί να προκύψουν ως τομές ενός επιπέδου με έναν κώνο. Ο πρώτος που τις ανακάλυψε ήταν ο Μέναιχμος, ενώ ένας άλλος αρχαίος Έλληνας Μαθηματικος ο Απολλώνιος από την Πέργα έλυσε το Δήλιο πρόβλημα με διαφορετικό τρόπο απ' ότι ο Μέναιχμος, χρησιμοποιώντας όμως και οι δύο μερικές από τις ιδιότητες αυτών των καμπυλών. Στον Απολλώνιο μάλιστα οφείλονται τα μέχρι σήμερα ονόματα των τριών από αυτές της παραβολής, έλλειψης και υπερβολής.Οι κωνικές τομές βρίσκουν ενδιαφέρουσες εφαρμογές στην Αστρονομία, κατασκευή τηλεσκοπίων, κεραιών, Διαστημική, Αρχιτεκτονική, Γεωδαισία, Ιατρική κ.ά.

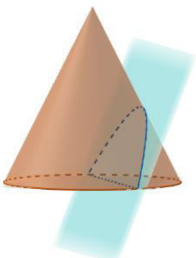
Σκοπός της εργασίας που ακολουθεί είναι να αναδείξουμε μέσω των ασκήσεων και των οπτικών αναπαραστάσεων, εκείνες τις ιδιότητες των κωνικών τομών που βρίσκουν εφαρμογές σε πραγματικά προβλήματα, αλλά και παράλληλα να κατανοήσουμε βαθύτερα τη φύση αυτών των καμπυλών.



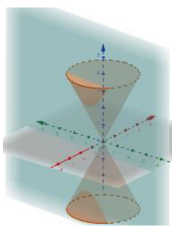
Ο κύκλος είναι η τομή του κώνου μ' ένα επίπεδο παράλληλο προς την βάση του.



Το επίπεδο τέμνει τον κώνο διαγώνια και η τομή τους είναι μία έλλειψη.



Αν το επίπεδο περιστραφεί κατάλληλα ώστε να γίνει παράλληλο προς μία γενέτειρα του κώνου, τότε η τομή τους είναι μία παραβολή.



Στην περίπτωση αυτή το επίπεδο στρέφεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε να τέμνει και τις δύο χοάνες του κώνου και η τομή του με αυτόν είναι μία υπερβολή.

Άσκηση 1: Παριστάνει η εξίσωση $x^2+y^2-6x+4y+7=0$ κύκλο;

Στη συνέχεια να προσδιοριστεί

α) Το κέντρο και η ακτίνα του,

β) να κατασκευαστεί γραφικά.

<u>Λύση</u>:

α) Με την μέθοδο συμπλήρωσης τετραγώνου, έχουμε διαδοχικά:

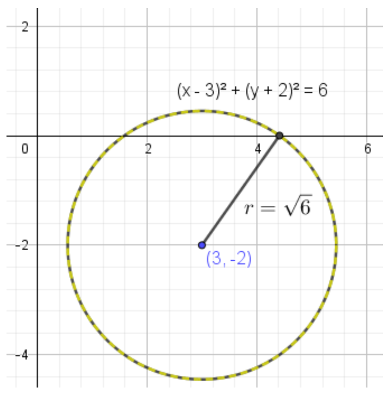
$$x^2+y^2-6x+4y+7=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2\cdot 3x+3^2+y^2+2\cdot 2y+2^2+7-13=0 \Leftrightarrow$$

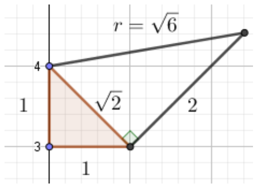
$$\Leftrightarrow (x-3)^2+(y+2)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2$$

Η εξίσωση παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $(3,-2)$ και ακτίνα $\sqrt{6}$.

β)



Γεωμετρική κατασκευή της ακτίνας $r=\sqrt{6}$

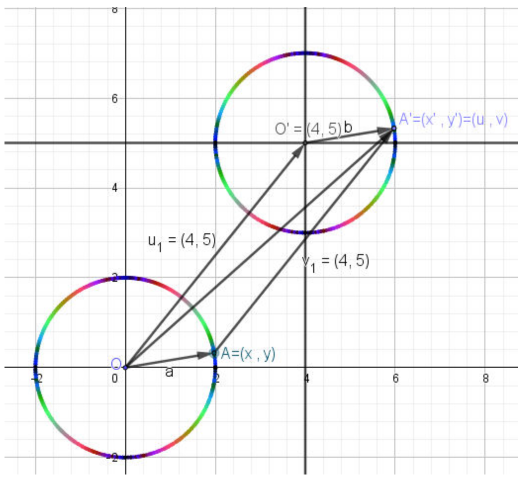


Άσκηση 2

Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου που προκύπτει από την μετακίνηση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2 κατά 4 μονάδες δεξιά και 5 πάνω;

<u>Λύση</u>:

Οι συντεταγμένες O' του κέντρου του νέου κύκλου προκύπτουν αν προσθέσουμε το διάνυσμα της αρχής των αξόνων $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ με το διάνυσμα της μεταφοράς $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. Άρα το κέντρο του νέου κύκλου έχει συντεταγμένες $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$.



Το διάνυσμα των συντεταγμένων του τυχαίου σημείου A'=$\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ προκύπτει και αυτό από την πρόσθεση του διανύσματος $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ με το διάνυσμα της μεταφοράς $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$. Από την ισότητα των δύο διανυσμάτων έχουμε:

$$x' = x+4$$
$$y' = y+5$$

Όμως το σημείο A περιστρέφεται σε σταθερή απόσταση γύρω από το O. Άρα οι συντεταγμένες του ικανοποιούν την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2.

$$x^2+y^2=2^2 \Rightarrow (x'-4)^2+(y'-5)^2=4$$

Η τελευταία εξίσωση εκφράζει την εξίσωση της κίνησης του σημείου $A'=(x',y')$ γύρω από το σημείο (4,5) και με ακτίνα 2. Μπορούμε επίσης να αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες x', y' με τις περισσότερο γνωστές μας x, y και να έχουμε τη ζητούμενη εξίσωση: $(x-4)^2+(y-5)^2=4$.

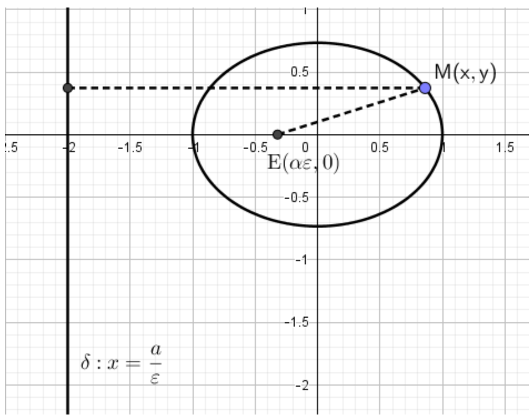
Οι κωνικές τομές ως γεωμετρικοί τόποι με κοινές ιδιότητες

Ένα άλλο κοινό σημείο των κωνικών τομών είναι ότι για τα σημεία που βρίσκονται σ' αυτές, **ο λόγος ε των αποστάσεών τους από ένα σημείο (εστία) και από μία ευθεία (διευθετούσα) είναι σταθερός και ονομάζεται εκκεντρότητα** (eccentricity).

Διαφορετικές τιμές του $\boldsymbol{\varepsilon}$, αντιστοιχούν σε διαφορετικές κωνικές τομές.

(i) Αν $\boldsymbol{\varepsilon=1}$, η κωνική τομή είναι παραβολή.

Αν έχουμε ένα σημείο $\mathbf{E(\alpha\varepsilon,0)}$ ως εστία και την ευθεία $\boldsymbol{\delta : x=\frac{\alpha}{\varepsilon}}$ να είναι η διευθετούσα, τότε:



$$\frac{(ME)}{d(M,\delta)}=\varepsilon \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-a\varepsilon)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a}{\varepsilon}\right|}=\varepsilon \ \ldots\Rightarrow$$

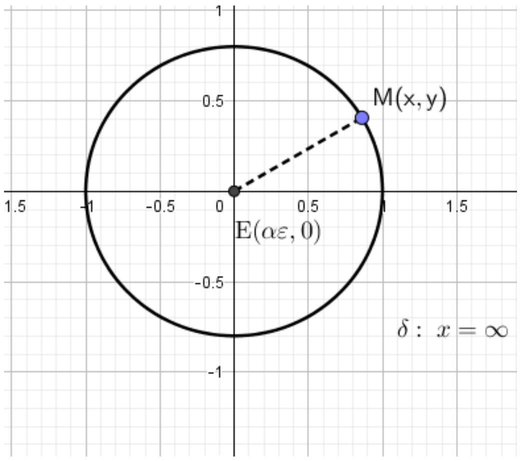
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-\varepsilon^2)}=1\ (1)}$$

(ii) Αν $0<\varepsilon<1 \Leftrightarrow \alpha^2(1-\varepsilon^2)>0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $a^2(1-\varepsilon^2)$ με το β^2.

Ο τύπος (1) γίνεται: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1}$

που δεν είναι άλλος από την εξίσωση της έλλειψης.

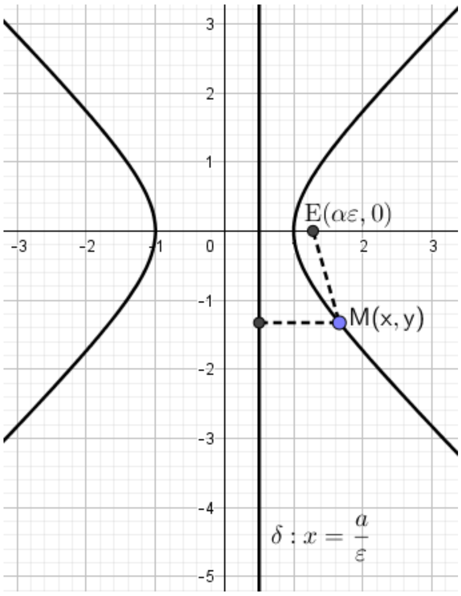
iii) Αν $\varepsilon=0$, από τον τύπο (1) παίρνουμε: $\boxed{x^2+y^2=a^2}$, την εξίσωση του κύκλου. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση αυτή το ρόλο της εστίας τον παίζει το κέντρο του κύκλου, ενώ η διευθετούσα δεν ορίζεται.

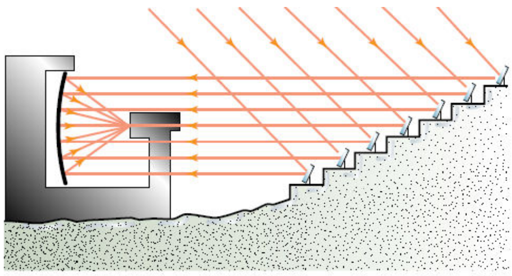


iv) Αν $\varepsilon>1 \Leftrightarrow \alpha^2(1-\varepsilon^2)<0$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την ποσότητα $a^2(1-\varepsilon^2)$ με το $-\beta^2$.

Ο τύπος (1) γίνεται: $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1}$

που δεν είναι άλλος από την εξίσωση της υπερβολής.



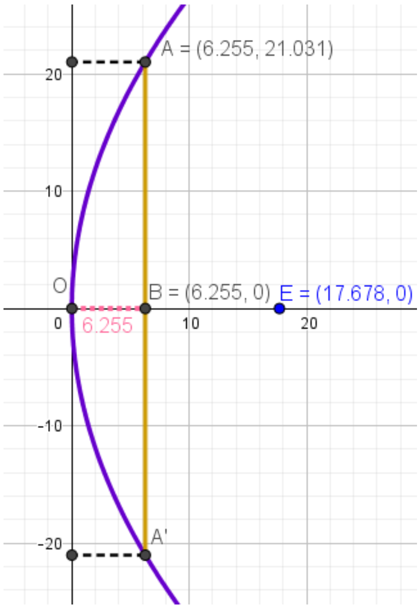


Άσκηση 3

Στο χωριό Odeillo που βρίσκεται στη Νότια Γαλλία στα Πυρηναία και στα Γαλλοϊσπανικά σύνορα, υπάρχει μία διάταξη με 63 επίπεδα κάτοπτρα τα οποία αντανακλούν τις ακτίνες του ηλίου σ' ένα μεγάλο παραβολικό κάτοπτρο. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα οι ακτίνες να εστιάζονται σ΄ένα σημείο στο οποίο βρίσκεται μία υψικάμινος. Εκεί λόγω της συγκέντρωσης της ακτινοβολίας, αναπτύσσονται θερμοκρασίες πάνω από 3.800^0C. Αν το πλάτος του παραβολικού κατόπτρου είναι **42,062** μέτρα και η υψικάμινος απέχει **17,678** μέτρα από το κέντρο του κατόπτρου, πόσο βαθύ είναι το κάτοπτρο;

<u>Λύση</u>: Σύμφωνα με τα στοιχεία του προβλήματος, το πάνω ακριανό σημείο A του κατόπτρου απέχει από τον άξονα της παραβολής:

$$\frac{42{,}062}{2}=21{,}031m.$$



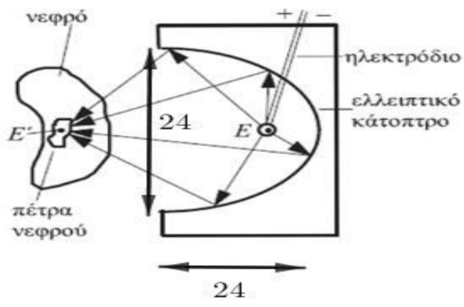
Στη συνέχεια αν στο γενικό τύπο της παραβολής $y^2 = 4ax$ (Ο τύπος αυτός προκύπτει εύκολα από την γενική θεώρηση που έγινε προηγουμένως και ιδιαίτερα ως προς την εκκεντρότητα $\varepsilon = 1$ των παραβολών, και με την παραδοχή ότι

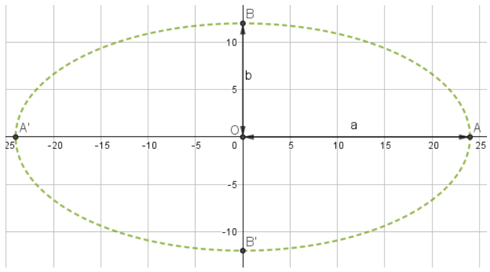
$$\left.\begin{matrix}\mathrm{E}(\alpha\varepsilon, 0)\\ \varepsilon = 1\end{matrix}\right\} \Rightarrow \mathrm{E}(\alpha, 0)$$ όπως επίσης και ότι η εξίσωση της διευθετούσας θα είναι

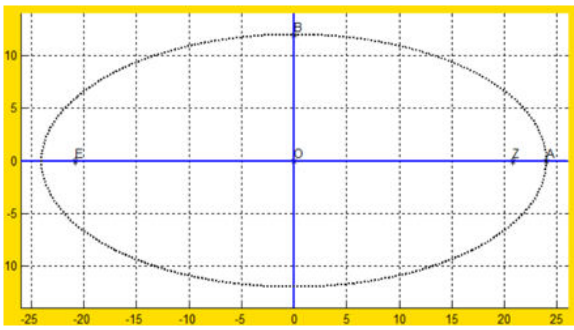
$x = -a$) θέσουμε $a = 17{,}678$, και $y = 21{,}031$ (την τεταγμένη του A) και λύσουμε ως προς x , θα βρούμε την τετμημένη του A άρα και το βάθος του κατόπτρου, περίπου ίσο με $6{,}255m$.

Άσκηση 4

Στην ιατρική χρησιμοποιείται μία μέθοδος που λέγεται λιθοθρυψία για να «σπάσουν» τις πέτρες από τα νεφρά των ασθενών. Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, στη μία εστία του οργάνου τοποθετείται ένα ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων, ενώ στην άλλη εστία βρίσκεται το νεφρό του ασθενή. Εξ' αιτίας της ανακλαστικής ιδιότητας της έλλειψης, οι πέτρες του νεφρού κονιορτοποιούνται από τους ανακλώμενους υπερήχους. Το πλάτος ενός ελλειψοειδούς οργάνου που χρησιμοποιείται για την λιθοθρυψία, είναι **24** cm ενώ το βάθος του επίσης **24** cm. Με τα παραπάνω στοιχεία πόση είναι η απόσταση ανάμεσα στο ηλεκτρόδιο εκπομπής υπερήχων και της πέτρας στο νεφρό του ασθενή;







<u>Λύση</u>: $\alpha = 24,\ \beta = 12$ και από τον προηγούμενο τύπο:

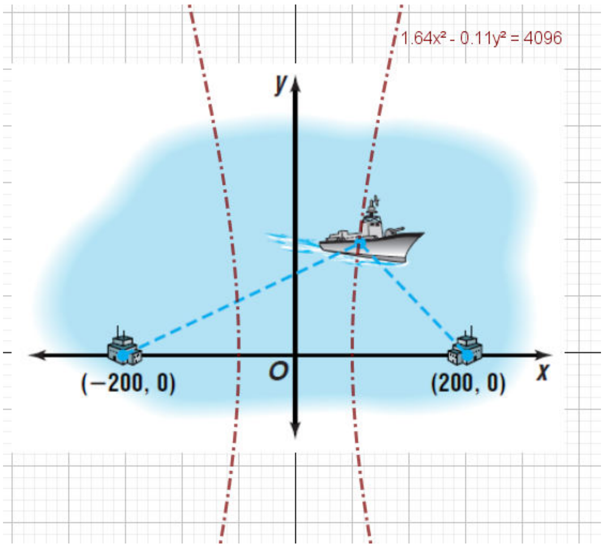
$$\beta^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) \Rightarrow \ldots \varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Το ηλεκτρόδιο απέχει από το νεφρό όσο οι δύο εστίες του οργάνου. Αυτή είναι:

$$EZ = 2a\varepsilon \cong 41{,}6\ cm.$$

Άσκηση 5

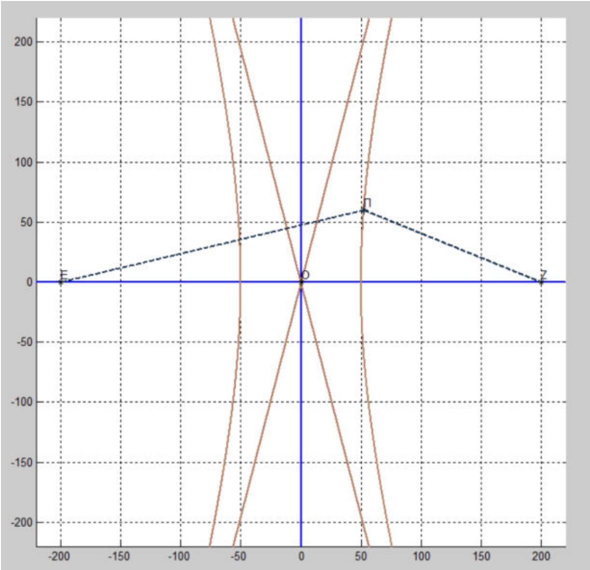
Για τον προσδιορισμό της θέσης ενός πλοίου, ήδη από την εποχή του 2ου Παγκοσμίου πολέμου χρησιμοποιείται ένα σύστημα LORAN (Long Range Navigation). Σύμφωνα με αυτό, 2 σταθμοί εκπομπής ραδιοκυμάτων ευρισκόμενοι σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, εκπέμπουν ταυτόχρονα ραδιοκύματα προς πλοία στη θάλασσα. Όταν ένα πλοίο που συνήθως η απόστασή του από τον ένα σταθμό είναι πιο μικρή σε σχέση με τον άλλο, δέχεται τα σήματα αυτά σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Μετρώντας αυτή τη διαφορά χρόνου και γνωρίζοντας την ταχύτητα των ραδιοκυμάτων, μπορούμε να προσδιορίσουμε την θέση του πλοίου πάνω σε μία υπερβολή, της οποίας οι εστίες είναι οι θέσεις των 2 σταθμών εκπομπής.



Έχουμε 2 σταθμούς εκπομπής ραδιοκυμάτων οι οποίοι βρίσκονται σε ευθύγραμμη απόσταση **400** km κατά μήκος μιας ακτογραμμής, με τον Α να βρίσκεται δυτικότερα σε σχέση με τον Β. Ένα πλοίο το οποίο πλησιάζει προς την ακτή, δέχεται τα ραδιοκύματα από τους 2 σταθμούς και το πλήρωμά του μπορεί να συμπεράνει ότι η διαφορά της απόστασης του σταθμού Β από τον σταθμό Α είναι **100** km.

Α) Ποια είναι η εξίσωση της υπερβολής που με την βοήθειά της μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση του πλοίου τη δεδομένη χρονική στιγμή;

Β) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του, αν αυτό απέχει 60 km από την στεριά;



<u>Λύση</u>:

Α) Όπως φαίνεται και από τα δύο σχήματα, θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με οριζόντιο άξονα την ευθεία που ενώνει τους δύο σταθμούς των οποίων οι θέσεις τους ταυτίζονται με τις εστίες της υπερβολής και κατακόρυφο άξονα την μεσοκάθετη του τμήματος με αυτά τα άκρα.

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι $\boldsymbol{2\alpha = 100\ km\ \ \gamma = 200\ km}$. Επειδή για κάθε υπερβολή ισχύει ότι $\boldsymbol{\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\beta^2 = 200^2 - 50^2 \Rightarrow \beta^2 = 37.500}.$$

Επομένως η υπερβολή πάνω στην οποία βρίσκεται το πλοίο, έχει εξίσωση:

$$\boldsymbol{\frac{x^2}{2.500} - \frac{y^2}{37.500} = 1}$$

Β) Αν θέσουμε στην παραπάνω εξίσωση $\boldsymbol{y = 60}$, βρίσκουμε $\boldsymbol{x \cong 52,3}$ km και οι συντεταγμένες του πλοίου Π είναι $\boldsymbol{\Pi(52,3,60)}$