Β΄ Τάξη

Η χρήση των συναρτήσεων για την επίλυση προβλημάτων

Στέργιος Τουρναβίτης

Εισαγωγικό σημείωμα: Ο σημερινός μαθηματικός όρος συνάρτηση, χρονολογείται από τα τέλη του 17ου αιώνα, όταν ο Απειροστικός Λογισμός (Calculus) βρισκόταν στα πρώτα στάδια ανάπτυξης. Σήμερα αυτή η σημαντική έννοια που είναι θα λέγαμε «ραχοκοκαλιά» των Μαθηματικών, είναι απαραίτητη σχεδόν σε όλες τις επιστήμες.
Στην εργασία που ακολουθεί θα προσπαθήσουμε αρχικά να αναδείξουμε τη σχέση των συναρτήσεων με τις εξισώσεις, στη συνέχεια τις αλληλένδετες εκφάνσεις της έννοιας αυτής δηλαδή του αλγεβρικού τύπου ή τα λόγια περιγραφής, του πίνακα τιμών, της γραφικής παράστασης και πως μπορούμε να τα χρησιμοποιούμε όλα αυτά για να μεταβαίνουμε από το ένα στο άλλο για την επίλυση προβλημάτων.
Επίσης θα περιοριστούμε στις πιο απλές συναρτήσεις, τις γραμμικές, τη συνάρτηση της υπερβολής, που όμως θα είναι συνάμα ένας γενικότερος τρόπος μελέτης και για τις περισσότερο πολύπλοκες συναρτήσεις που θα ακολουθήσουν σε επόμενες τάξεις.

Πρόβλημα 1 Έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο πλάτους 8 cm χωρισμένο σε άλλα δύο. Το ένα έχει άγνωστο μήκος $x\ cm$ και το ακριβώς διπλανό του έχει μήκος $5\ cm$.
α) Αναζητούμε εκείνη την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται $48\ \text{cm}^2$.
β) Για ποια τιμή του x το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $64\ \text{cm}^2$;
γ) Βρίσκουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου για $x = 4$ cm.
δ) Αναζητούμε έναν γενικό τύπο ο οποίος με αντικατάσταση των διαφόρων τιμών της μεταβλητής x να παίρνουμε τα αντίστοιχα $y = E(x)$ εμβαδά των ορθογωνίων, με άλλα λόγια να δούμε πως μεταβάλλεται η συνάρτηση του εμβαδού, όταν μεταβάλλεται το μήκος x.
ε) Κατασκευάζουμε τον πίνακα τιμών και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για τιμές του x όπου $0 < x \leq 6$.

Λύση:
α) Όπως γνωρίζουμε το εμβαδόν ενός ορθογωνίου είναι το γινόμενο των διαστάσεών του.
Επομένως έχουμε:

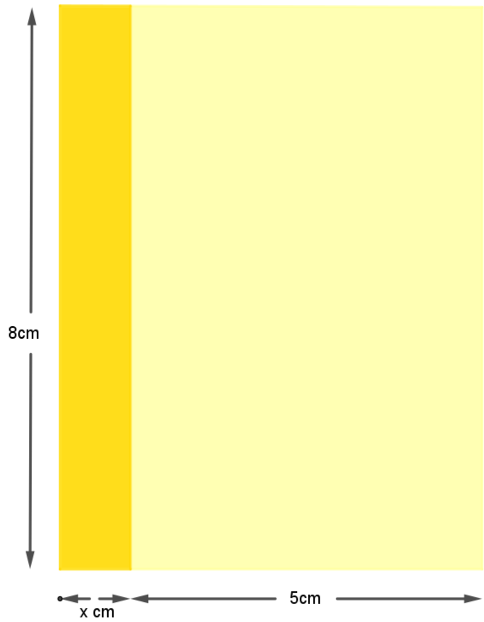
$$E = (x + 5) \cdot 8 \quad (1)$$

Αν αντικαταστήσουμε στην (1) όπου $E = 48$ και λύσουμε ως προς x την αντίστοιχη εξίσωση, θα έχουμε ισοδύναμα:

$$(x+5)\cdot 8 = 48 \Leftrightarrow x+5 = \frac{48}{8} \Leftrightarrow x = 6-5 = 1\text{cm}$$

β) Όμοια έχουμε:

$$(x+5)\cdot 8 = 64 \Leftrightarrow x+5 = \frac{64}{8} \Leftrightarrow x = 8-5 = 3\text{cm}$$



γ) Σ' αυτή την περίπτωση δεν χρειάζεται να λύσουμε κάποια εξίσωση. Απλά αντικαθιστούμε στον τύπο (1) όπου $x = 4cm$ και βρίσκουμε

$$E = (4 + 5) \cdot 8 = 72\ \text{cm}^2$$

δ)+ε) Στα παραπάνω ερωτήματα α), β), βρήκαμε ορισμένους αριθμούς για τη μεταβλητή x όταν γνωρίζαμε ότι το εμβαδόν έπαιρνε συγκεκριμένες τιμές, λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις. Στο δε ερώτημα γ) από τον έτοιμο τύπο (1) για το εμβαδόν, αντικαταστήσαμε όπου $x = 4$ cm και βρήκαμε $E = 72\ \text{cm}^2$.

Ας δώσουμε μερικές ακόμη ακέραιες τιμές από το σύνολο $\{1,2,3,4,5,6\}$ για να δούμε πως επιβεβαιώνεται ο τύπος (1) για το τυχαίο x, κατασκευάζοντας ταυτόχρονα και τον πίνακα τιμών της συνάρτησης E(x) «E του x» ή «το E σε συνάρτηση με το x».

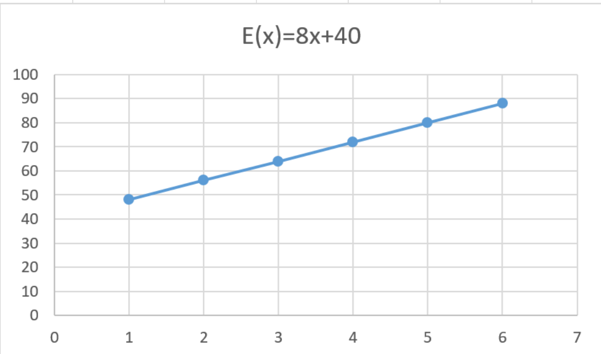
x	E(x)
1	$8 \cdot 1 + 40 = 48$
2	$8 \cdot 2 + 40 = 56$
3	$8 \cdot 3 + 40 = 64$
4	$8 \cdot 4 + 40 = 72$
5	$8 \cdot 5 + 40 = 80$
6	$8 \cdot 6 + 40 = 88$
x	$8 \cdot x + 40$

Όπως βλέπουμε από τον πίνακα τιμών και ίσως και από κάποιες παραπάνω ενδιάμεσες τιμές που θα θελήσουμε να δώσουμε, κάθε φορά αντικαθιστούμε στην (1) ή στον τύπο (της τελευταίας γραμμής του πίνακα τιμών) την εκάστοτε τιμή του x και βρίσκουμε τα αντίστοιχα εμβαδά. Αυτή η εξάρτηση, μονοσήμαντη αντιστοίχιση που υπάρχει, των Εμβαδών από τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής x, μας επιτρέπει να συμβολίσουμε – αντικαταστήσουμε το E με το E(x) στον τύπο (1) και να γράψουμε:

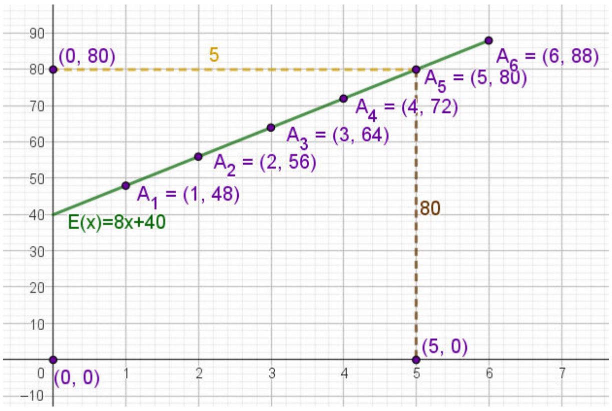
$$E(x) = (x + 5) \cdot 8$$

Αυτός είναι και ο ζητούμενος τύπος της συνάρτησης.

Από το γνωστό μας Excel, παίρνουμε το διάγραμμα αν ενώσουμε τα σημεία (1,48),…,(6,88) του πίνακα τιμών.



Το διάγραμμά μας στο Geogebra:



Το οποίο προκύπτει, αν γράψουμε απλά στο πεδίο εισαγωγή κάτω αριστερά του προγράμματος τον τύπο της συνάρτησης και για να φαίνεται η ευθεία – γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σύνολο που παίρνει τιμές η ανεξάρτητη μεταβλητή x – Πεδίο Ορισμού της συνάρτησης, επιλέγουμε κλίμακα για τους άξονες 1:20. Πιο συγκεκριμένα στον οριζόντιο άξονα το $1\ \text{cm} \to 1\ \text{cm}$ του μήκους x και στον κατακόρυφο το $1\ \text{cm} \to 20\ \text{cm}^2$ εμβαδού του ορθογωνίου.

Επέκταση της δραστηριότητας: Με βάση τα προηγούμενα, θα χαρούμε πολύ αν είστε σε θέση να κατασκευάσετε τα δικά σας διαγράμματα σε χιλιοστομετρικό (μιλιμετρέ) χαρτί, στην προαναφερόμενη κλίμακα, για το Πρόβλημα 1.

Πρόβλημα 2 Δύο διαφορετικοί τρόποι πληρωμών στο κολυμβητήριο
(Ποιος μας συμφέρει περισσότερο;)

Ο Κώστας θέλει να διαθέσει ορισμένα χρήματα ώστε να πηγαίνει στο κολυμβητήριο της περιοχής του μέχρι και 20 φορές για ένα μήνα.

Για τον πρώτο μήνα εγγραφής, έχει τις εξής δυνατότητες:

- να πληρώνει 5€ για κάθε φορά που χρησιμοποιεί την πισίνα,
- να πληρώσει 20€ στην αρχή του μήνα συνδρομή και 3€ για κάθε φορά που θα κολυμπάει.

<u>Ερωτήματα</u>:

1. Αν ονομάσουμε με y=f(x) την πρώτη συνάρτηση και y=g(x) την δεύτερη

(που αντιστοιχούν στους δύο διαφορετικούς τρόπους πληρωμής), μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά των παρακάτω προτάσεων και στην συνέχεια τα «άδεια κουτάκια» των δύο πινάκων τιμών;

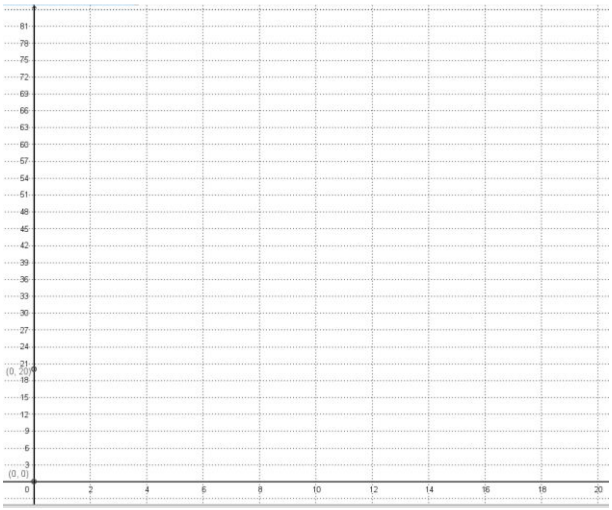
1ος τρόπος πληρωμής:
για 1 φορά ο Κώστας πληρώνει ……….. €
για 2 φορές ο Κώστας πληρώνει ………. €
για 3 φορές ο Κώστας πληρώνει ………. €
για x φορές ο Κώστας πληρώνει
y = f(x) = ………. €

2ος τρόπος πληρωμής:
για 0 (καμία φορά) ο Κώστας πληρώνει
………. €
για 1 φορά ο Κώστας πληρώνει ………. €
για 2 φορές ο Κώστας πληρώνει ……… €
για 3 φορές ο Κώστας πληρώνει ……… €
για x φορές ο Κώστας πληρώνει
y = g(x) = ………. €

x αριθμός φορών	0	1			16
f(x) σε ευρώ			20	40	

x αριθμός φορών	0		10	15	
g(x) σε ευρώ		26			80

2. Το επόμενο βήμα είναι ότι με βάση τους τύπους που βρήκατε από το προηγούμενο ερώτημα να κατασκευάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων σ’ ένα σύστημα ορθογωνίων αξόνων επιλέγοντας κατάλληλη κλίμακα σαν και αυτό παρακάτω.



α) Σε ποια σημεία τέμνουν τον άξονα y΄y οι δύο ευθείες και ποια η σημασία τους σε σχέση με τον τύπο και τον πίνακα τιμών των δύο συναρτήσεων;
β) Ποια από τις δύο ευθείες διέρχεται από την αρχή των αξόνων;
γ) Σχετίζεται αυτή η ευθεία με τα ανάλογα ποσά;
δ) Ποιες είναι οι κλίσεις των δύο ευθειών;

3. Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των δύο ευθειών, βρείτε (για λογαριασμό του Κώστα) πόσες φορές θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει την πισίνα σε έναν μήνα, ώστε τα χρήματα που θα πληρώσει και με τους δύο τρόπους να είναι ίδια; Πόσα είναι τα χρήματα αυτά;

4. Μπορείτε να προσδιορίσετε γραφικά πόσες φορές θα χρησιμοποιήσει την πισίνα σε κάθε περίπτωση, αν πληρώσει 80€;

5. Με την βοήθεια του 3δ) μπορείτε να δώσετε μία εξήγηση για το ότι, παρά το γεγονός πως η πρώτη ευθεία ξεκινά «από ένα σημείο πιο χαμηλά» στον άξονα των y΄y, τέμνει τελικά την δεύτερη, «που ξεκινάει πιο ψηλά» στον άξονα των y΄y κι’ έπειτα την ξεπερνάει;

Λύση:

1. <u>$1^{ος}$ τρόπος πληρωμής</u>:

για **1** φορά ο Κώστας πληρώνει $\mathbf{1}\cdot 5=5$ €
για **2** φορές ο Κώστας πληρώνει $\mathbf{2}\cdot 5=10$ €
για **3** φορές ο Κώστας πληρώνει $\mathbf{3}\cdot 5=15$ €
.
.
.
για **x** φορές ο Κώστας πληρώνει

$$y=f(\mathbf{x})=\mathbf{x}\cdot 5=5\cdot\mathbf{x}\text{ €}$$

<u>$2^{ος}$ τρόπος πληρωμής:</u>

για 0 (καμία φορά) ο Κώστας πληρώνει
20 €
για **1** φορά ο Κώστας πληρώνει
$20+\mathbf{1}\cdot 3=3\cdot\mathbf{1}+20$ €
για **2** φορές ο Κώστας πληρώνει
$20+\mathbf{2}\cdot 3=3\cdot\mathbf{2}+20$ €
για **3** φορές ο Κώστας πληρώνει
$20+\mathbf{3}\cdot 3=3\cdot\mathbf{3}+20$ €
.
.
.
για **x** φορές ο Κώστας πληρώνει

$$y=g(\mathbf{x})=20+\mathbf{x}\cdot 3=3\cdot\mathbf{x}+20\text{ €}$$

Τα πινακάκια συμπληρώνονται με την βοήθεια των τύπων των συναρτήσεων.
Αν αναζητούμε τα χρήματα (y) που θα πληρώσουμε, αντικαθιστούμε την τιμή του x στον τύπο και το αποτέλεσμα προκύπτει από την εκτέλεση των πράξεων ενώ αν αναζητούμε τον αριθμό των φορών, αντικαθιστούμε το y πάλι στον τύπο και λύνουμε τις αντίστοιχες εξισώσεις.
Π.χ. αν θέλουμε να βρούμε πόσες φορές (x) μπορεί να έχει πάει στο κολυμβητήριο όταν έχει πληρώσει y=20 € με τον πρώτο τρόπο πληρωμής, λύνουμε την εξίσωση:

$$20=5\cdot x\Leftrightarrow 5\cdot x=20\Leftrightarrow x=\frac{20}{5}=4\,,$$

ενώ αν θέλουμε να βρούμε τα χρήματα (y) που θα πληρώσει με τον $2^ο$ τρόπο πληρωμής, όταν έχει πάει 15 φορές, αντικαθιστούμε την τιμή του x =15 στον τύπο:

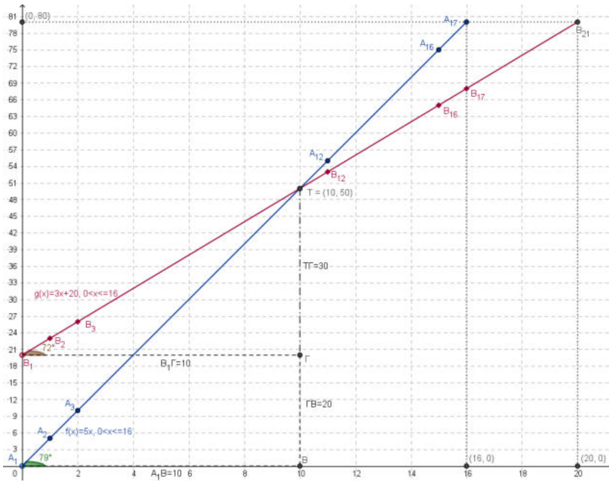
$$y=g(\mathbf{x})=3\cdot\mathbf{x}+20\text{ €}$$

Έτσι για x =15, το αντίστοιχο y είναι:

$$y=g(\mathbf{15})==3\cdot\mathbf{15}+20=65\text{ €}$$

x αριθμός φορών	0	1	<u>**4**</u>	<u>**8**</u>	16
f(x) σε ευρώ	<u>0</u>	<u>**5**</u>	20	40	<u>**80**</u>

x αριθμός φορών	0	<u>**2**</u>	10	15	<u>**20**</u>
g(x) σε ευρώ	<u>**20**</u>	26	<u>**50**</u>	<u>**65**</u>	80



2. Μία πρώτη παρατήρηση για το διάγραμμα είναι ότι αποτελείται από μεμονωμένα σημεία όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή x παίρνει τις ακέραιες τιμές από το σύνολο {1, 2, 3… 20} και για τις δύο συναρτήσεις.
Κοιτάζοντας τα ζευγάρια τιμών (x,y) από τα πινακάκια, (ή και βρίσκοντας ακόμη περισσότερα με τη βοήθεια των δύο τύπων)τοποθετούμε προσεκτικά τα σημεία στο διάγραμμα, βλέπουμε ότι από αυτά διέρχονται δύο ευθείες που είναι και οι γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων.

α) Όπως φαίνεται από το διάγραμμα και από τα προηγούμενα, όταν ο Κώστας δεν έχει πάει ακόμη να επισκεφθεί το Κολυμβητήριο, για μεν τον $1^ο$ τρόπο πληρωμής δεν έχει να πληρώσει κάτι, ενώ με τον $2^ο$ τρόπο πληρωμής θα έχει πληρώσει ήδη την εγγραφή των 20 €.

Αυτά «μεταφράζονται» στο διάγραμμα ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) ξεκινάει από το (0,0) και η g(x) από το (0,20), σημεία και τα δύο του κατακόρυφου άξονα y΄y.

Δεν είναι τυχαίο ότι αυτά τα σημεία στο διάγραμμα τα σημειώσαμε με ανοικτό κυκλάκι, γιατί στην εκφώνηση του προβλήματος αναζητούμε τον οικονομικότερο τρόπο από ένα ορισμένο αριθμό φορών (από 1 φορά και πάνω). Απλά τα βάζουμε στο διάγραμμα και στα πινακάκια (τις αριθμητικές συντεταγμένες τους) ως χαρακτηριστικά σημεία και για να απαντήσουμε πιο εύκολα σε επόμενα ερωτήματα, π.χ. στην κλίση κλπ.

β+γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=f(x)=5\cdot\mathbf{x}$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων και συνδέεται με τα ανάλογα ποσά, γιατί το πηλίκο $\frac{y}{x}=5$ σταθερό, ή αλλιώς όταν διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται το x, διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. αντίστοιχα το y.

δ) Για την κλίση των δύο ευθειών, χρειαζόμαστε τον τύπο της εφαπτομένης που μπορούμε να τον εφαρμόσουμε στα ορθογώνια τρίγωνα A_1BT, $B_1\Gamma T$ για τις οξείες γωνίες TA_1B $TB_1\Gamma$, αντίστοιχα.

Έχουμε: $\varepsilon\varphi\hat{A}_1=\frac{50}{10}=5$ και,

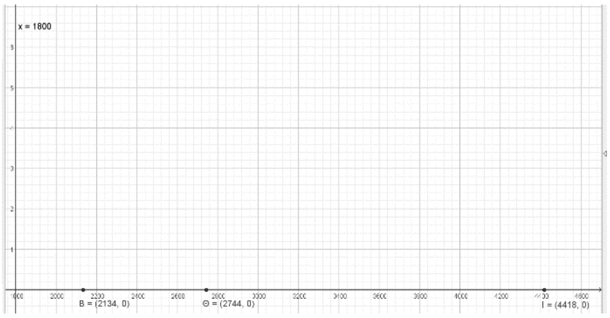
$$\varepsilon\varphi\hat{B}_1=\frac{30}{10}=3$$

Αυτές οι κλίσεις συμπίπτουν με τους συντελεστές του x στους τύπους που προσδιορίζουν τις μοναδικές ευθείες-γραφικές παραστάσεις των δύο συναρτήσεων.

3. Υπάρχει ένα σημείο που τέμνονται οι δύο ευθείες το οποίο για το ίδιο x αντιστοιχεί το ίδιο y. Αυτό δεν είναι άλλο από το Τ(10,50). Τα χρήματα που θα πληρώσει και με τους δύο τρόπους είναι η τεταγμένη 50 αυτού του σημείου και η τετμημένη του 10 είναι ο αριθμός των φορών που χρησιμοποιεί την πισίνα, για να πληρώσει τον ίδιο αριθμό χρημάτων 50 € και με τους δύο τρόπους.

4. Στον άξονα των y΄y και στη «θέση» 80, φέρνουμε μία κάθετη προς τα δεξιά. Αυτή συναντάει πρώτα (γιατί;) την γραφική παράσταση της f(x) στο A_{17} ενώ την άλλη στο B_{21}. Από τα σημεία αυτά ξανά κάθετες, αυτή τη φορά προς τον οριζόντιο άξονα και οι τετμημένες αυτών των σημείων, ταυτίζονται με τους αριθμούς των φορών του 1ου και 2ου τρόπου πληρωμής αντίστοιχα στα ίδια χρήματα των 80€. (Μπορείτε να τις βρείτε;)

5. Η πρώτη ευθεία – γραφική παράσταση της f(x), αν και ξεκινάει από ένα σημείο πιο χαμηλά το (0,0) σε σχέση με την άλλη που αρχίζει από το (0,20), μέχρι και για x=10, την τετμημένη του σημείου



τομής, εξακολουθεί να είναι πιο χαμηλά από την δεύτερη.

Από το σημείο όμως αυτό και μετά ή αν ο Κώστας ξεπεράσει τις 10 φορές επίσκεψής του στο Κολυμβητήριο (και μέχρι και τις 20 φορές) τα χρήματα που θα πληρώσει με τον 1ο τρόπο θα είναι περισσότερα. Αυτό συμβαίνει γιατί η κλίση 5 της 1ης ευθείας είναι μεγαλύτερη από τη κλίση 3 της 2ης και αυξάνεται όπως λέμε με πιο γρήγορο ρυθμό. Αλλά αυτό το τελευταίο θα μας απασχολήσει σε μεγαλύτερες τάξεις. Το τελικό συμπέρασμα είναι ότι ο Κώστας αν σκοπεύει να πηγαίνει στο Κολυμβητήριο μέχρι και 9 φορές συμφέρει να χρησιμοποιήσει τον 1ο τρόπο, στις 10 φορές θα πληρώσει τα ίδια χρήματα 80€, ενώ από 11μέχρι 20 φορές, ο 2ος τρόπος πληρωμής είναι οικονομικότερος.

Πρόβλημα 3

Οι σκιέρ, οι πεζοπόροι και οι ορειβάτες συχνά βιώνουν την λεγόμενη «ασθένεια του υψομέτρου» όταν φθάνουν σε υψόμετρο 2.438 m (8.000 ft) και πάνω. Ένας καλός εμπειρικός κανόνας προσαρμογής του ανθρώπινου οργανισμού για να εγκλιματιστεί σε υψηλά υψόμετρα είναι:

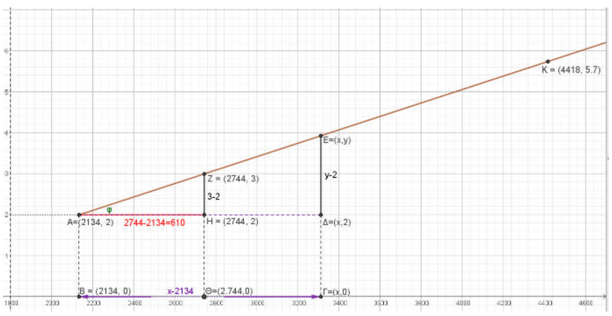
α) να παραμείνει 2 εβδομάδες για τα πρώτα 2.134 m (7.000 ft) και,

β) από το υψόμετρο αυτό και πάνω, να παραμένει 1 εβδομάδα παραπάνω για κάθε επιπλέον 610 m (2.000 ft).

Ερωτήματα:

1. Το όρος Whitney στην Καλιφόρνια

είναι η υψηλότερη κορυφή στην Ανατολική Σιέρα Νεβάδα, στα σύνορα μεταξύ του πάρκου Sequoia και του Δάσους Inyo. Πόσες εβδομάδες περίπου θα χρειαζόταν ένα άτομο για να εγκλιματιστεί στο υψόμετρο των 4.418 m (14.494 ft) του όρους Whitney;



2. Στο παραπάνω σχήμα, έχουμε σχεδιάσει μία ευθεία παράλληλη στον κατακόρυφο άξονα στη θέση (1.800,0), με τετμημένη 1.800 ώστε τα σημεία που αναφέρονται στην εκφώνηση του προβλήματος που οι τετμημένες τους είναι μεγαλύτερες από αυτό το υψόμετρο, θα βρίσκονται δεξιότερα αυτής της ευθείας στη γραφική παράσταση. Αυτή έχει μονάδες μέτρησης τις εβδομάδες (η $1^{η}$ εβδομάδα είναι στο 1, η $2^{η}$ εβδομάδα στο 2 κλπ). Επίσης υπάρχουν τα σημεία στον x΄x με υψόμετρα που αντιστοιχούν στα 2.134, 2.744 και 4.418 μέτρα.

Σε κατάλληλη κλίμακα σαν αυτή του παραπάνω σχεδίου, και με την βοήθεια του πίνακα τιμών, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση της παραπάνω συνάρτησης στην οποία να απεικονίζεται και το σημείο του προηγούμενου ερωτήματος.

3. Στο σχέδιο που ακολουθεί, τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΗΖ και ΑΔΕ έχουν κοινή την οξεία γωνία φ, το δε τυχαίο σημείο Ε(x,y) βρίσκεται πάνω στην γραφική παράσταση της μοναδικής ευθείας της οποίας αναζητούμε τον τύπο που είναι από την θεωρία και ο τύπος της συνάρτησης.
Με την βοήθεια του τύπου της εφαπτομένης (εφφ) που θα τον εφαρμόσετε δύο φορές μία για να βρείτε την κλίση στο ΑΗΖ και μία στο $2^{ο}$ ορθογώνιο ΑΔΕ, και αφού εξισώσετε τους δύο λόγους, να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης που δείχνει πως μεταβάλλεται ο χρόνος εγκλιματισμού σε σχέση με το υψόμετρο.

Λύση:

1.

h	2.134	2.134+1·610=2.744	2.134+**x**·610
t(h)	<u>2</u>	<u>2+1=3</u>	2+**x**

Για το τελευταίο κάτω δεξιά κουτάκι, μένει να βρούμε ποιος είναι (ο κατά προσέγγιση ενδεχομένως δεκαδικός) αριθμός που πολλαπλασιάζεται με το 610 για να δώσει το υψόμετρο των 4.418 μέτρων.

Έχουμε:

$\underline{2.134+\mathbf{x}\cdot 610=4.418}\ (1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x \cong \mathbf{3{,}7}$

Επομένως για το υψόμετρο του όρους Whitney, ο χρόνος εγκλιματισμού είναι περίπου 2+**3,7=**5,7 εβδομάδες

2. Ενώνουμε με μία ευθεία τα σημεία Α(2.134,2) και Ζ(2.744,3). Αυτή την ευθεία αν την προεκτείνουμε προς τα δεξιά, θα δούμε ότι συναντά την κάθετη στο σημείο Ι σ' ένα σημείο έστω Κ. Η τεταγμένη αυτού του σημείου είναι ο χρόνος εγκλιματισμού για το όρος Whitney (γιατί;)

3. Από το ΑΗΖ, έχουμε: $εφ\hat{φ}=\frac{1}{610}$ (1)

ενώ από το ΑΔΕ $εφ\hat{φ}=\frac{y-2}{x-2134}$ (2)

Από τις δύο σχέσεις, $\frac{y-2}{x-2134}=\frac{1}{610}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ... \Leftrightarrow y=\frac{1}{610}x-1.5$$

Τέλος αντικαθιστούμε την ανεξάρτητη μεταβλητή x με το h και την y με το t(h) και έχουμε τον τύπο της συνάρτησης:

$$t(h)=\frac{1}{610}h-1.5$$

Πως επαληθεύουμε με τον παραπάνω τύπο τον χρόνο εγκλιματισμού για το όρος της Καλιφόρνιας;

Πρόβλημα 4

Με έναν σωλήνα παροχής νερού γεμίζουμε μία δεξαμενή χωρητικότητας 360 λίτρων. Αν υποθέσουμε ότι από τον σωλήνα διοχετεύονται στη δεξαμενή x λίτρα το δευτερόλεπτο,

α) να εκφράσετε το χρόνο y (σε sec) που χρειάζεται για να γεμίσει η δεξαμενή, ως συνάρτηση του x.

β) Ποιες είναι οι ποσότητες που λείπουν στον πίνακα τιμών της συνάρτησης;

x (lt/s)	1		2		x
f(x)=y (s)		200		90	

γ) Μπορείτε να σχεδιάσετε το διάγραμμα αυτής της συνάρτησης επιλέγοντας την κατάλληλη κλίμακα;

Λύση:

α) Με ταχύτητα $1\frac{lt}{s}$ για να γεμίσει η δεξαμενή χρειάζεται χρόνος 360 s.

Με ταχύτητα $x\frac{lt}{s}$ για να γεμίσει η δεξαμενή θα χρειαστεί χρόνος $\frac{360}{x}$ s.

Άρα $y=f(x)=\frac{360}{x}$ είναι ο τύπος της συνάρτησης που δείχνει πως μεταβάλλεται ο χρόνος y σε σχέση με την ταχύτητα γεμίσματος σε δεξαμενή σταθερής χωρητικότητας 360 λίτρων.

β) Με βάση τον τύπο της συνάρτησης $y=\frac{360}{x}$, ανάλογα με το τι θα υπολογίσουμε, αντικαθιστούμε το x ή το y και λύνουμε ως προς y ή x αντίστοιχα.

x (lt/s)	1	**1,8**	2	**4**	x
f(x)=y (s)	**360**	200	**180**	90	$\mathbf{\frac{360}{x}}$

γ) Σε σύστημα ορθογωνίων αξόνων και με την κατάλληλη κλίμακα, θέτουμε τα παραπάνω σημεία, αλλά και άλλα όσα είναι εύκολο να υπολογίσουμε και παίρνουμε το παρακάτω διάγραμμα: