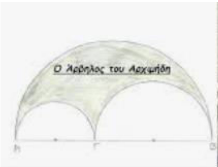
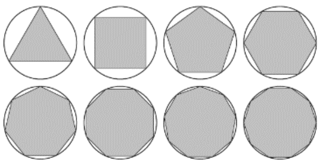
Τάξη: Γ΄

Η χρησιμοποίηση του ορισμένου ολοκληρώματος στον υπολογισμό εμβαδών

Στέργιος Τουρναβίτης

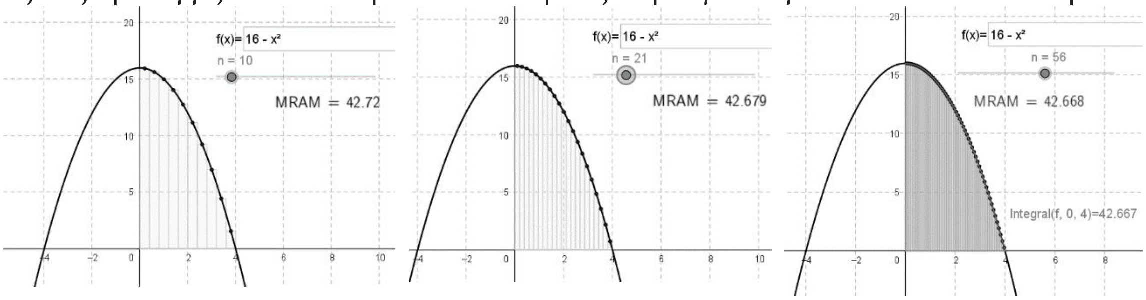
Το πρόβλημα της εύρεσης του εμβαδού μιας περιοχής που περικλείεται από ένα πολύγωνο, τετράγωνο, παραλληλόγραμμο, τραπέζιο, τρίγωνο ήταν γνωστό σε κάποιους πολιτισμούς από την αρχαιότητα. Οι πρώτες δυσκολίες εμφανίστηκαν για τους μαθηματικούς της αρχαιότητας και των μετέπειτα χρόνων, όταν προσπάθησαν να υπολογίσουν εμβαδά περιοχών που περικλείονταν από καμπύλες, όχι ευθύγραμμες όπως τα προηγούμενα σχήματα. Ένα απλό και χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ο κύκλος. Ο Αρχιμήδης ήταν ο πρώτος ο οποίος αντιμετώπισε με γεωμετρικές μεθόδους το γενικό πρόβλημα του εμβαδού περιοχών που οριοθετούνται από κυκλικά τόξα, παραβολές, σπείρες και διάφορες καμπύλες χρησιμοποιώντας μία διαδικασία που ονομάστηκε αργότερα μέθοδος εξάντλησης. Με τη μέθοδο αυτή μπορούμε να προσδιορίσουμε κατά προσέγγιση το εμβαδόν του κύκλου, θεωρώντας το ως το όριο μιας ακολουθίας εμβαδών εγγεγραμμένων πολυγώνων. Όσο το πλήθος των πλευρών των εγγεγραμμένων πολυγώνων αυξάνεται, τόσο η περίμετρός τους πλησιάζει το μήκος της περιφέρειας του κύκλου και το εμβαδόν τους το εμβαδόν του κύκλου.





Χρειάστηκε να περάσουν περίπου 19 αιώνες από την εποχή που έζησε ο Αρχιμήδης για να πλαισιωθούν οι ιδέες του σε μία γενικότερη μέθοδο με την έννοια του ορίου και του απείρου από τον Νεύτωνα και τον Λάιμπνιτς. Στο πλευρό της Γεωμετρίας και της Άλγεβρας εμφανίστηκε η νεαρή Ανάλυση που συνενώνει τον Διαφορικό και τον Ολοκληρωτικό Λογισμό, με όλες τις ομορφιές και τις επεκτάσεις της στη λύση των προβλημάτων στη Φυσική και στις άλλες θετικές επιστήμες. Μετά από αιώνες τα ζεύγη των αντίστροφων πράξεων που γνώριζε ο κόσμος πρόσθεση/αφαίρεση, πολλαπλασιασμός/διαίρεση, τετραγωνισμός/τετραγωνική ρίζα, ξεπετάχτηκε ένα καινούριο ντουέτο, παραγώγιση/ολοκλήρωση που λειτουργούσε ανάλογα.

Στα παρακάτω σχήματα βλέπουμε το εμβαδόν που περικλείεται από την παραβολή και τους άξονες προσεγγίζεται καλύτερα όταν οι λωρίδες – ορθογώνια γίνονται ολοένα και περισσότερα.



Στις ασκήσεις που ακολουθούν, αρχικά με τη βοήθεια της μονοτονίας ή και των ακροτάτων της προς ολοκλήρωση συνεχούς συνάρτησης , βρίσκουμε τα όρια ενός κλειστού διαστήματος που ανήκει το ορισμένο ολοκλήρωμα, και στη συνέχεια με τη βοήθεια των αρχικών συναρτήσεων, μεθόδων ολοκλήρωσης, διαδικασιών από τις προηγούμενες τάξεις, όπως επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, συστημάτων, γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων, υπολογίζουμε διάφορα εμβαδά, δίνοντας ταυτόχρονα τη γεωμετρική τους αναπαράσταση και ερμηνεία.

Άσκηση 1

Για τα επόμενα ορισμένα ολοκληρώματα, αποδεικνύουμε ότι βρίσκονται σ' ένα κλειστό διάστημα ή ικανοποιούν μία διπλή ανισοϊσότητα.

i. $$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(3-2\sigma\upsilon\nu x)^2} \in \left[\frac{\pi}{54}, \frac{\pi}{24}\right]$$

ii. Αν $t>0$, τότε:

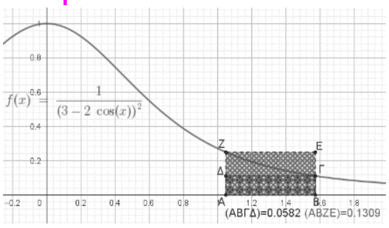
$$\int_1^{2\sqrt{2}}(3\sqrt[3]{t^2}-t^2)dt\in[2-4\sqrt{2},-2+4\sqrt{2}]$$

iii. $0\le\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}\,dx\le\frac{\pi}{3},x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$

iv. $0\le\int_1^e\frac{\ln x}{x}\,dx\le\frac{e-1}{e},x\in[1,e]$

v. $\frac{2}{e}\cdot(e-1)\le\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx\le e-1,x\in\left[e,e^2\right]$

Λύση:



i. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{(3-2\sigma\upsilon\nu x)^2}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο

$f'(x)=\frac{4\eta\mu x}{(2\sigma\upsilon\nu x-3)^3}<0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο

$m=f(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{9}$ και μέγιστο $M=f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{4}$. Από τη σχέση:

$\frac{1}{9}\le f(x)\le\frac{1}{4}$, $x\in\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε:

$$\frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\le\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(3-2\sigma\upsilon\nu x)^2}\le\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$$ ή

$$\frac{\pi}{54}\le\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{(3-2\sigma\upsilon\nu x)^2}\le\frac{\pi}{24}$$

ii. Η συνάρτηση $f(t)=3\sqrt[3]{t^2}-t^2,t>0$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[1,2\sqrt{2}\right]$ με παράγωγο $f'(t)=\frac{2}{t^{\frac{1}{3}}}-2t$.

t 0	1	$2\sqrt{2}$	$+\infty$
t^4-1	−	+	+
f'(t)	+	−	−
f(t)	↗	↘	↘

Από τον πίνακα τιμών της μονοτονίας της f, συνάγουμε ότι:
Η $f(t)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[1,2\sqrt{2}\right]$, έχει ελάχιστο

$m=f(2\sqrt{2})=-2$ και μέγιστο $M=f(1)=-2$.

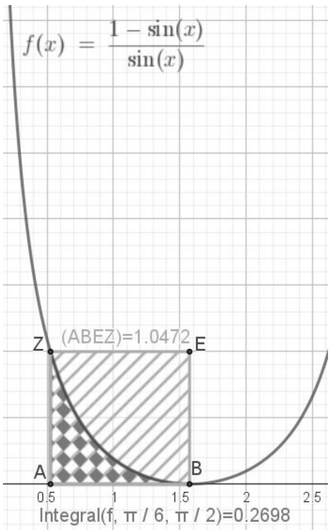
Από τη σχέση:

$-2\le f(t)\le2\sqrt{2}$, $t\in\left[1,2\sqrt{2}\right]$, έχουμε:

$$2-4\sqrt{2}\le\int_1^{2\sqrt{2}}(3\sqrt[3]{t^2}-t^2)dt\le-2+4\sqrt{2}$$

iii. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ με παράγωγο

$f'(x)=\frac{-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu^2 x}<0$, $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$. Επομένως η



$f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο

$m=f(\frac{\pi}{2})=0$ και μέγιστο

$M=f(\frac{\pi}{6})=1$.

Από τη σχέση:

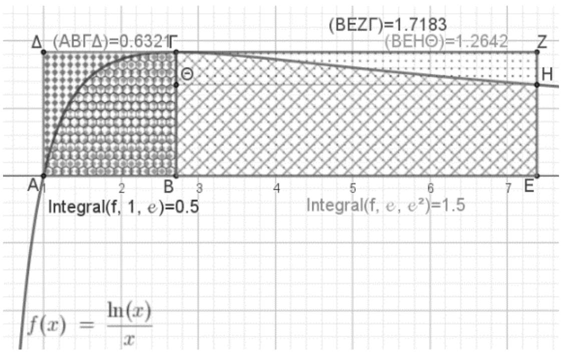
$0\le f(x)\le1$, $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$, έχουμε:

$$0 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}\,dx \le 1\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ή}$$

$$0 \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\eta\mu x}{\eta\mu x}\,dx \le \frac{\pi}{3}$$

iv. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x\in[1,e]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[1,e]$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}>0$ για κάθε $x\in[1,e]$. Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο $m=f(1)=0$ και μέγιστο $M=f(e)=\frac{1}{e}$. Από τη σχέση:

$0\le\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}, x\in[1,e]$, έχουμε:



$$0 \le \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx \le \frac{e-1}{e}$$

v. Η ίδια συνάρτηση $f(x)=\frac{\ln x}{x}, x\in[e,e^2]$ είναι συνεχής στο διάστημα $[e,e^2]$ με παράγωγο $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ για κάθε $x\in[e,e^2]$.
Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα σ' αυτό το διάστημα, έχει ελάχιστο $m=f(e^2)=\frac{2}{e^2}$ και μέγιστο $M=f(e)=\frac{1}{e}$.
Από τη σχέση:
$\frac{2}{e^2}\le\frac{\ln x}{x}\le\frac{1}{e}, x\in[e,e^2]$, έχουμε:

$$\frac{2}{e}\cdot(e-1)\le\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}\,dx\le e-1$$

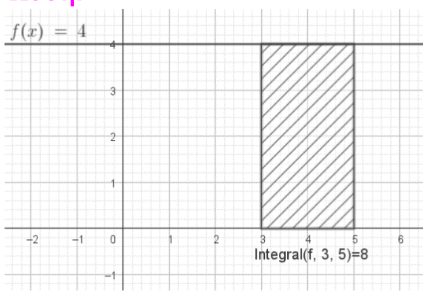
Εμβαδά κάτω από καμπύλες μεταξύ γραφικών παραστάσεων συναρτήσεων και ορισμένα ολοκληρώματα.

Άσκηση 2

Υπολογίζουμε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα και δίνουμε την γεωμετρική τους σημασία.

α) $\int_3^5 4dx$

Λύση:

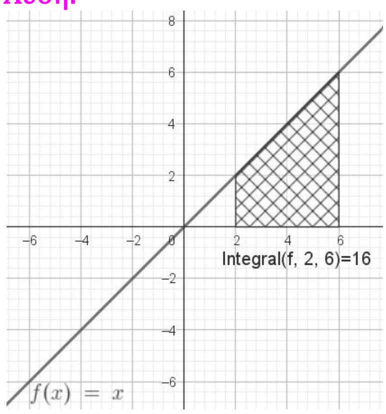


$$\int_3^5 4dx = 4[x]_3^5 = 4\cdot(5-3)=8$$

Ταυτίζεται με το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου που έχει μήκος 5-3=2, τη διαφορά των ορίων ολοκλήρωσης και πλάτος 4, την κοινή τεταγμένη των πάνω κορυφών του ορθογωνίου.

β) $\int_2^6 xdx$

Λύση:



$$\int_2^6 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^6 = \frac{1}{2}\cdot(36-4)=16$$

Ανάμεσα στο γράφημα της f(x)=x, τις κατακόρυφες ευθείες x=2, x=6 και του οριζόντιου άξονα, περικλείεται ένα τραπέζιο, με εμβαδόν: $\frac{β+Β}{2}\cdot υ=\frac{2+6}{2}\cdot 4=16$

Στην παρακάτω άσκηση, αναλύουμε τη διαφορά μεταξύ ορισμένου ολοκληρώματος και εμβαδού.

Άσκηση 3

Υπολογίζουμε το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του οριζόντιου άξονα x΄x και της γραφικής παράστασης της $f(x)=συνx$, στο κλειστό διάστημα:

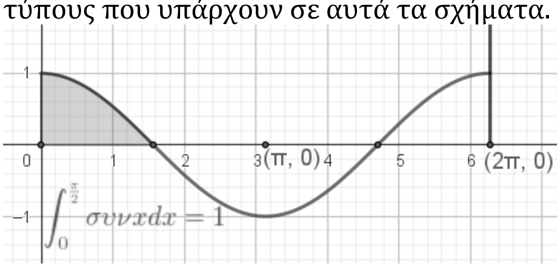
α) $\left[0,\frac{π}{2}\right]$, β) $\left[\frac{π}{2},π\right]$, γ) $\left[0,π\right]$, δ) $\left[0,\frac{3π}{2}\right]$

ε) $\left[0,2π\right]$

Λύση:

Αρχίζουμε με μία επισήμανση, ότι οποιοδήποτε εμβαδόν δεν μπορεί να είναι αρνητικό ή μηδέν, σε αντίθεση με το ορισμένο ολοκλήρωμα που μπορεί να είναι.

Επίσης τα σκιασμένα χωρία στα σχήματα δεν δηλώνουν πάντα εμβαδά αλλά ορισμένα ολοκληρώματα σε αντιστοιχία και με τους τύπους που υπάρχουν σε αυτά τα σχήματα.



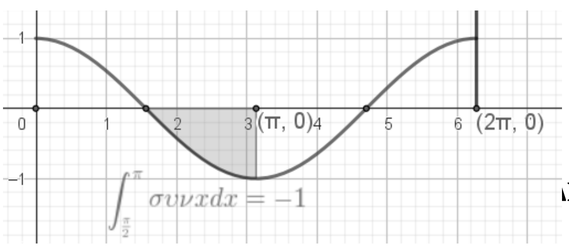
α)Έχουμε: $\int_0^{\frac{π}{2}} συνx\, dx=\left[ημx\right]_0^{\frac{π}{2}}=ημ\frac{π}{2}=1$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ταυτίζεται με το εμβαδόν που βρίσκεται μεταξύ της καμπύλης και του άξονα x΄x. Αυτό συμβαίνει γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι πάνω από τον οριζόντιο άξονα ή αλλιώς η διαφορά:

f(x)-g(x)=f(x)-0=f(x) είναι θετική στο ζητούμενο διάστημα, όπου $f(x)=συνx$ και g(x)=0 η εξίσωση του x΄x.

β) $\int_{\frac{π}{2}}^{π} συνx\, dx=\left[ημx\right]_{\frac{π}{2}}^{π}=ημπ-ημ\frac{π}{2}=0-1=-1$

Αυτό είναι το ορισμένο ολοκλήρωμα αρνητικό. Τι γίνεται όμως με το εμβαδόν;



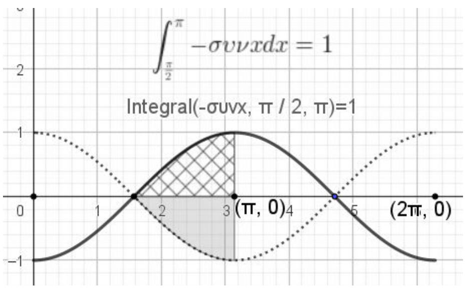
Όπως βλέπουμε η καμπύλη του συνx – γραφική παράσταση της y=συνx, είναι κάτω από τον οριζόντιο άξονα ή αλλιώς η διαφορά συνx-0 είναι αρνητική το πολύ 0, ή ακόμη γνωρίζουμε από προηγούμενες τάξεις ότι το συνx δεν είναι θετικό στο διάστημα $\left[\frac{π}{2},π\right]$. Επειδή για την εύρεση του εμβαδού που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων, ενδιαφερόμαστε για το ποια γραφική παράσταση είναι πάνω από την άλλη και στην περίπτωσή μας είναι ο άξονας x΄x, για το εμβαδόν που θέλουμε να υπολογίσουμε έχουμε:

$$E(Ω)=\int_{\frac{π}{2}}^{π}(0-συνx)\, dx=-\left[ημx\right]_{\frac{π}{2}}^{π}=1$$

Αυτό συμπίπτει με το ολοκλήρωμα

$$\int_{\frac{π}{2}}^{π}\left|συνx\right|\, dx=-\int_{\frac{π}{2}}^{π}συνx\, dx=-\left[ημx\right]_{\frac{π}{2}}^{π}=1$$

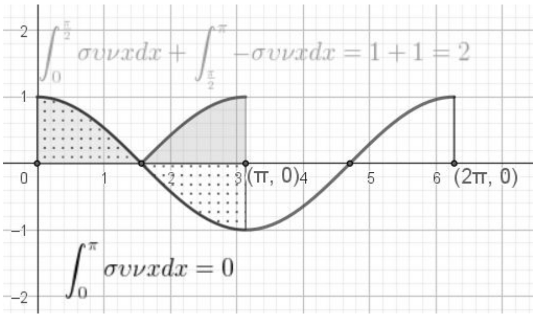
και επιβεβαιώνεται με το εμβαδόν – ολοκλήρωμα που είναι μεταξύ της αντίθετης συνάρτησης $f(x)=-συνx$ και του x΄x. Όπως εύκολα βλέπουμε η γραφική παράσταση της $f(x)=-συνx$ είναι πάνω από αυτόν τον άξονα.



γ) Η διαφορά $συνx-0\ =\ συνx$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left[0,π\right]$.

Επομένως ενώ το ορισμένο ολοκλήρωμα είναι μηδέν

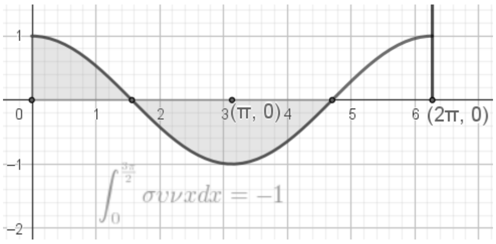
$$\int_0^{π}συνx\, dx=\left[ημx\right]_0^{π}=ημπ-ημ0=0$$



για το εμβαδόν πρέπει να υπολογίσουμε το

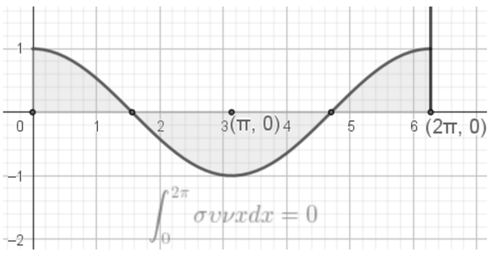
$$\int_0^{\pi} |\sigma\upsilon\nu x|\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\ dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sigma\upsilon\nu x\ dx = 1 + 1 = 2$$

δ)Έχουμε: $\int_0^{\frac{3\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x\ dx = \left[\eta\mu x\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \eta\mu\frac{3\pi}{2} = -1$



και για το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου $E(\Omega) = 1 + 1 + 1 = 3$ αφού σε καθένα από τα διαστήματα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ το εμβαδόν είναι 1τ.μ.

ε) $\int_0^{2\pi} \sigma\upsilon\nu x\ dx = \left[\eta\mu x\right]_0^{2\pi} = \eta\mu 2\pi - \eta\mu 0 = 0$



Όμοια $E(\Omega) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

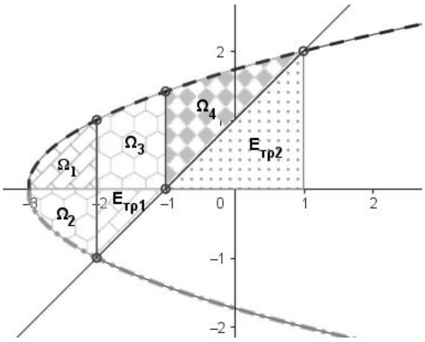
Άσκηση 4

Βρίσκουμε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$f(x) = \sqrt{(x+3)}$, $g(x) = -\sqrt{(x+3)}$,

$h(x) = x + 1$.

Λύση:



Για να προσδιορίσουμε τα όρια της περιοχής χρειάζεται να γνωρίζουμε τα σημεία τομής αυτών των γραφικών παραστάσεων ή να βρούμε εκεί που τέμνονται η ευθεία $h(x) = x + 1$ με την καμπύλη $x = y^2 - 3$ (γιατί;)

Από την επίλυση του συστήματος βρίσκουμε ότι αυτά είναι $A(-2,-1)$, $B(1,2)$.

Στη συνέχεια βλέπουμε ότι ενώ το ανώτερο τμήμα της περιοχής που θέλουμε να υπολογίσουμε αποτελείται αποκλειστικά από την $f(x) = \sqrt{(x+3)}$, το κατώτερο αποτελείται από δύο μέρη:

$g(x) = -\sqrt{(x+3)}$ για $-3 \le x \le -2$ και,

$h(x) = x + 1$ για $-2 \le x \le 1$.

Εξαιτίας της αλλαγής αυτής του κατώτερου μέρους, είναι απαραίτητο να χωρίσουμε το εμβαδόν της περιοχής που θέλουμε να υπολογίσουμε σε δύο μέρη, που εκφράζονται με τα ορισμένα ολοκληρώματα:

$$A_1 = \int_{-3}^{-2} [\sqrt{x+3} - \left(-\sqrt{x+3}\right)]dx = \ldots = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-2}^{1} [\sqrt{x+3} - (x+1)]dx = \ldots = \frac{19}{6}$$

Έτσι το εμβαδόν όλης της περιοχής είναι:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{4}{3} + \frac{19}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

Ένας 2ος τρόπος προσέγγισης είναι να υπολογίσουμε χωριστά τα εμβαδά των χωρίων:

α) $E(\Omega_1) + E(\Omega_2) = 2 \cdot E(\Omega_1) = 2\int_{-3}^{-2} [\sqrt{x+3}\ dx = \frac{4}{3}$,

β) $E(\Omega_3) = \int_{-2}^{-1} [\sqrt{x+3}\ dx = \ldots = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$,

γ) $E_{\tau\rho 1} = \int_{-2}^{-1} -(x+1)\ dx = \frac{1}{2}$ για αυτό το εμβαδόν μπορούμε απλά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του εμβαδού του ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με 1.

δ) $E(\Omega_4)=\int_{-1}^{1}[\sqrt{x+3}\ dx-2=...=\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}$

Αν προσθέσουμε τα παραπάνω εμβαδά,

$\underbrace{\frac{4}{3}}_{\alpha)}+\underbrace{\frac{4\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3}}_{\beta)}+\underbrace{\frac{1}{2}}_{\gamma)}+\underbrace{\frac{10}{3}-\frac{4\sqrt{2}}{3}}_{\delta)}=\frac{9}{2}$ βρίσκουμε ξανά το ίδιο αποτέλεσμα.

Αντιστρέφοντας τον ρόλο των x και y.

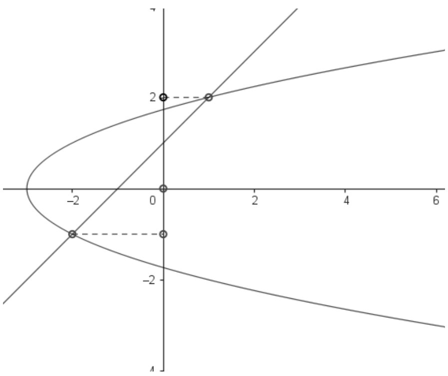
Μερικές φορές είναι πολύ πιο εύκολο να βρούμε το εμβαδόν μιας περιοχής ολοκληρώνοντας ως προς y (θεωρώντας τη ως ανεξάρτητη μεταβλητή) παρά ως προς x. Για να γίνει αυτό θα πρέπει όταν θα λύσουμε ως προς x (εξαρτημένη μεταβλητή) από τους τύπους των δύο συναρτήσεων ή καμπυλών να προκύψουν συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα ολοκλήρωσης και η διαφορά w(y)-u(y) είναι θετική μόνο όταν η w(y) βρίσκεται δεξιότερα της u(y). Ας δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε τις παραπάνω σκέψεις για τον ευκολότερο υπολογισμό του παραπάνω εμβαδού.

Λύνοντας ως προς x, βλέπουμε ότι η παραβολή $x=y^2-3$ (η ένωση των f, g στην προηγούμενη θεώρηση) είναι μετατόπιση της $x=y^2$ κατά 3 μονάδες αριστερά, καθορίζει το αριστερό σύνορο του εμβαδού στο διάστημα $[-1,2]$, ενώ η $x=y-1$ επίσης συνεχής συνάρτηση βρίσκεται στο δεξιό σύνορο στο ίδιο διάστημα. Όταν βέβαια αντιστρέψουμε τον ρόλο των μεταβλητών, αντιστρέφονται οι άξονες και η οριζοντιωμένη παραβολή γίνεται μία κανονική συνεχής συνάρτηση λυμένη ως προς x.

Το ζητούμενο εμβαδόν μπορεί να βρεθεί από την επίλυση του ολοκληρώματος:

$$\int_{-1}^{2}[(y-1)-(y^2-3)\ dy=$$

$$\int_{-1}^{2}\left(-y^2+y+2\right)\ dy=...=\frac{9}{2}$$



Μπορούμε να επεξηγήσουμε περισσότερο αυτόν τον μετασχηματισμό με μία απλή αλλαγή της οπτικής του σχήματος. Αν αλλάξουμε οπτική γωνία και κοιτάξουμε το παραπάνω σχήμα από αριστερά προς τα δεξιά και υποθέσουμε αλλαγή των ρόλων των x, y ο οριζόντιος άξονας γίνεται κατακόρυφος και ο κατακόρυφος, οριζόντιος εκεί δηλαδή που ορίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή y.

Τα παραπάνω γίνονται ακόμη πιο κατανοητά με την στροφή κατά 90^0 του όλου σχήματος, της αντιστροφής των x, y στους τύπους της αρχικά οριζοντιωμένης παραβολής (που δεν είναι συνάρτηση με το αρχικό σύστημα αξόνων) αλλά μετασχηματίζεται στην συνεχή συνάρτηση $y=x^2-3$ μετατόπιση της $y=x^2$ κατά 3 μονάδες κάτω. Βλέπουμε επίσης πως το αριστερό όριο, γίνεται κάτω όριο και το δεξιό όριο πάνω. Με την ευθεία που είναι γραμμική συνάρτηση εξακολουθεί να είναι γραμμική και συνεχής, σταθερά πάνω από την παραβολή στο διάστημα $[-1,2]$.