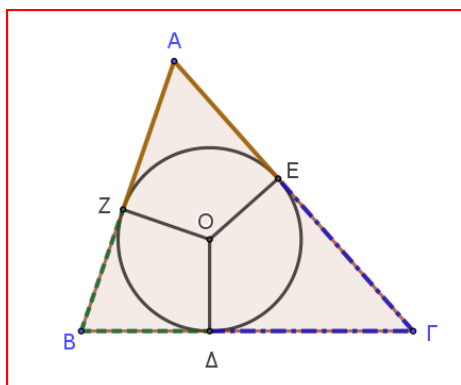


Σημείωση: Τα συστήματα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους είναι εκτός διδακτέας ύλης, όπως και η υποπαράγραφος «Λύση – Διερεύνηση του συστήματος 2×2 »

Ωστόσο παραθέτουμε την λύση της άσκησης 10 σελ. 23, για να δούμε ότι και αυτά τα συστήματα λύνονται με παρόμοιες τεχνικές, όπως αυτές που αναπτύξαμε στα συστήματα 2×2 .

Άσκηση 10, σελίδας 23 βιβλίου Άλγεβρας Β' Λυκείου



Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και τον εγγεγραμμένο του κύκλο που εφάπτεται των πλευρών του στα σημεία Δ , E και Z . Να υπολογίσετε τα τμήματα $AZ = x$, $B\Delta = y$ και $\Gamma E = z$, συναρτήσει των πλευρών α , β και γ .

Λύση:

Για να λύσουμε το παραπάνω πρόβλημα, θα χρειαστούμε μία πρόταση από την Γεωμετρία της Α' Λυκείου:

«Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείου εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους»

Βασικές έννοιες και ιδιότητες:

- **Εγγεγραμμένος κύκλος:** Ένας κύκλος που εφάπτεται και των τριών πλευρών ενός τριγώνου.
- **Σημεία επαφής:** Τα σημεία Δ , E και Z όπου ο κύκλος εφάπτεται των πλευρών $B\Gamma$, $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.
- **Ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου:** Το ευθύγραμμο τμήμα $O\Delta$, OE ή OZ
- **Επαφή ευθείας με κύκλο:** Σε σημείο επαφής ευθείας με κύκλο, η ακτίνα που φέρεται στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην ευθεία.

Σχέδιο λύσης:

1. **Ορθογώνια τρίγωνα:** Τα τρίγωνα AOZ , $BO\Delta$ και ΓOE είναι ορθογώνια και ίσα με τα αντίστοιχα AOE , BOZ , $\Gamma O\Delta$ όπως άλλωστε προκύπτει εύκολα και από την απόδειξη της πρότασης που αναφέραμε προηγουμένως. Άρα έχουμε:

$$AZ = AE = x, BZ = B\Delta = y, \Gamma\Delta = \Gamma E = z$$

2. **Σύστημα εξισώσεων:** Θα δημιουργήσουμε ένα σύστημα εξισώσεων με βάση αυτές τις ισότητες και τις σχέσεις των εφαπτόμενων τμημάτων με τις πλευρές του τριγώνου και ικανοποιώντας φυσικά, τα δεδομένα του σχήματος της άσκησης.

Έχουμε ένα σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους (x, y, z).

$$y + z = \alpha \quad (1)$$

$$x + z = \beta \quad (2)$$

$$x + y = \gamma \quad (3)$$

Στόχος: Να βρούμε τις τιμές των x, y και z που ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις τρεις εξισώσεις.

Λύση του συστήματος με τη μέθοδο της αντικατάστασης της μεταβλητής z

Βήματα λύσης:

1. **Επιλογή εξίσωσης και έκφραση της z :** Ας επιλέξουμε την εξίσωση (1) και ας εκφράσουμε την μεταβλητή z ως προς τη μεταβλητή y :
 - ο $z = \alpha - y \quad (4)$
2. **Αντικατάσταση της z στην εξίσωση (2):**
 - ο Αντικαθιστούμε την z στην δεύτερη εξίσωση: $x + (\alpha - y) = \beta \Rightarrow x - y = \beta - \alpha \quad (5)$
3. **Νέο σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους:** Η εξίσωση (5) που προέκυψε από τον συνδυασμό των (1), (2) και η εξίσωση (3) του αρχικού μας συστήματος είναι ένα σύστημα 2×2 , το οποίο το λύνουμε με μία από τις προσφιλείς μας μεθόδους:

$$x - y = \beta - \alpha \quad (5)$$

$$x + y = \gamma \quad (1)$$

4. **Λύση του νέου συστήματος:**
 - ο Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις:

$$(x - y) + (x + y) = (\beta - \alpha) + \gamma \Rightarrow 2x = \beta + \gamma - \alpha \Rightarrow x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$$

- ο Αντικαθιστούμε την τιμή του x στην (1) (δεύτερη εξίσωση του νέου συστήματος):

$$\frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} + y = \gamma \Rightarrow y = \gamma - \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} \Rightarrow \dots \Rightarrow y = \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$$

Τέλος, αντικαθιστούμε την τιμή του y στην εξίσωση (4):

$$z = \alpha - \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} \Rightarrow z = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$$

Λύσεις του συστήματος:

- $x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2}$
- $y = \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2}$
- $z = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$

Συμπέρασμα:

Οι λύσεις του συστήματος εξισώσεων είναι:

- $x = \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} = \tau - \alpha$
- $y = \frac{\alpha + \gamma - \beta}{2} = \tau - \beta$
- $z = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2} = \tau - \gamma$

όπου $2\tau = \alpha + \beta + \gamma$ η περίμετρος του τριγώνου και $\tau = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}$ η ημιπερίμετρος.

Αυτές οι τιμές για x, y και z ικανοποιούν ταυτόχρονα και τις τρεις αρχικές εξισώσεις.

Σημείωση:

Η μέθοδος της αντικατάστασης είναι μια κοινή μέθοδος για την επίλυση συστημάτων γραμμικών εξισώσεων όπως και η μέθοδος των αντιθέτων συντελεστών (απαλοιφής).

Σύγκριση με τη μέθοδο της απαλοιφής:

Και οι δύο μέθοδοι οδηγούν στην ίδια λύση. Η επιλογή της κατάλληλης μεθόδου εξαρτάται από το συγκεκριμένο σύστημα εξισώσεων και τις προτιμήσεις μας.

Επιπλέον: Μπορούμε να επαληθεύσουμε τις λύσεις αντικαθιστώντας τις τιμές των x, y και z στις αρχικές εξισώσεις και να βεβαιωθούμε ότι οι ισότητες ισχύουν.