Άσκηση στα διαγράμματα κατανομών και συναρτήσεων κατανομών διακριτής τ.μ. Χ

Αν η τ.μ. Χ, έχει πίνακα κατανομής:

x_j	-1	0	1	2
p_j	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$

Να σχεδιαστούν:

α) το διάγραμμα κατανομής,

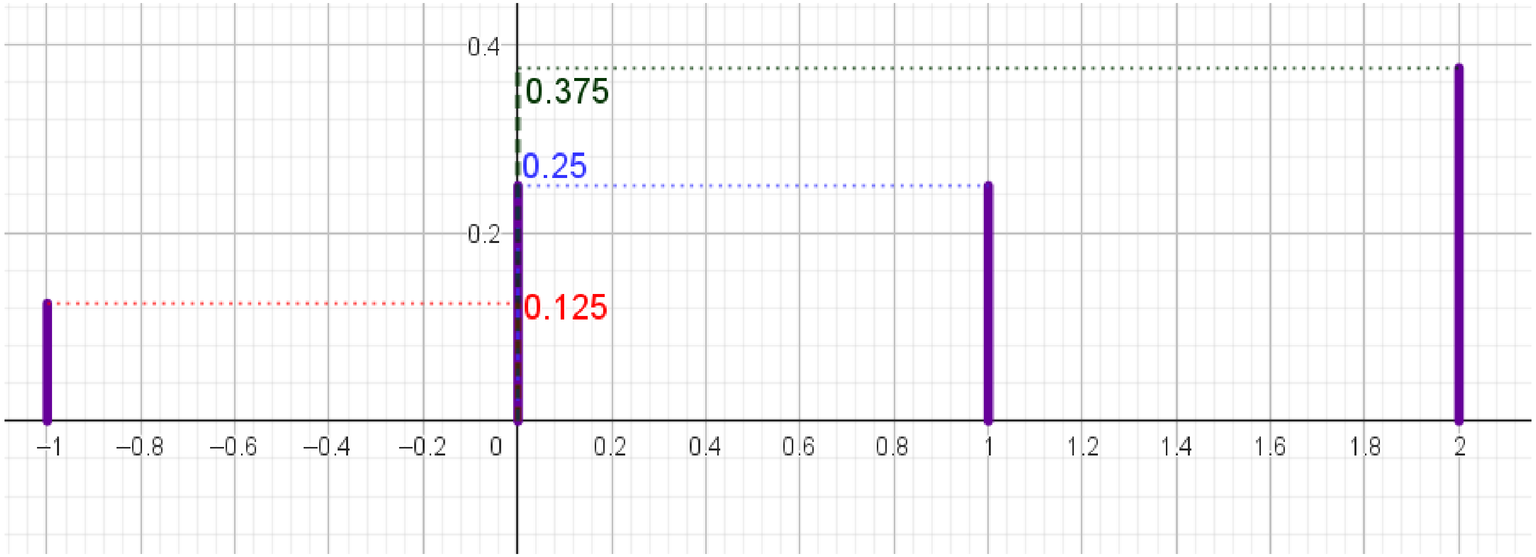
βi) το διάγραμμα της συνάρτησης κατανομής και,

βii) να δοθεί η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης κατανομής

γ) να βρεθεί η $P[-1 \leq X < 2]$

Λύση:

α) Σύμφωνα με τον πίνακα τιμών, τοποθετούμε τις τιμές x_j σε ίσες αποστάσεις μεταξύ τους στον οριζόντιο άξονα (π.χ. 2cm και ανάλογα με το πλήθος των τιμών που έχουμε σε κάθε πρόβλημα) και στον κατακόρυφο άξονα τις αντίστοιχες πιθανότητες p_j σε ανάλογη κλίμακα. Για κάθε τιμή της μεταβλητής Χ, x_j σχεδιάζουμε μία κατακόρυφη γραμμή με ύψος ίσο με την πιθανότητά της. Το σύστημα των αξόνων δεν χρειάζεται να είναι «κανονικό» γιατί τα μεγέθη που μετράμε είναι διαφορετικά (τιμές της μεταβλητής Χ - αντίστοιχες πιθανότητες)



βii) Η συνάρτηση κατανομής της διακριτής τ.μ. X με τιμές $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1,\ x_4=2$, είναι το σύνολο όλων των ζευγών $(x_j, P[X\le x_j])$ όπου η $P[X\le x_j]$ είναι **το άθροισμα των πιθανοτήτων** όλων των τιμών της τ.μ. X που είναι μικρότερες ή ίσες, της x_j. Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό για τις μεμονωμένες τιμές της τ.μ. X που μας δίνονται από την εκφώνηση, έχουμε:

$$F(-1)=P[X\le -1]=P[X=-1]=\frac{1}{8},$$

$$F(0)=P[X\le 0]=P[X=-1]+P[X=0]=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}=\frac{3}{8}$$

Παρόμοια υπολογίζονται και οι άλλες δύο τιμές $F(1)=F(0)+P[X=1]=\frac{3}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8},\ F(2)=F(1)+P[X=2]=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}=1$

Τι γίνεται όμως με τα ενδιάμεσα σημεία των τιμών της μεταβλητής X; Δίνουμε ένα παράδειγμα διαφορετικό του επομένου ερωτήματος που ακολουθεί, που και αυτή είναι μία ζητούμενη πιθανότητα σ' ένα διάστημα.

Για $x\in[1,2)$, $F(x)=P[X=-1]+P[X=0]+P[X=1]=\frac{1}{8}+\frac{2}{8}+\frac{2}{8}=\frac{5}{8}$

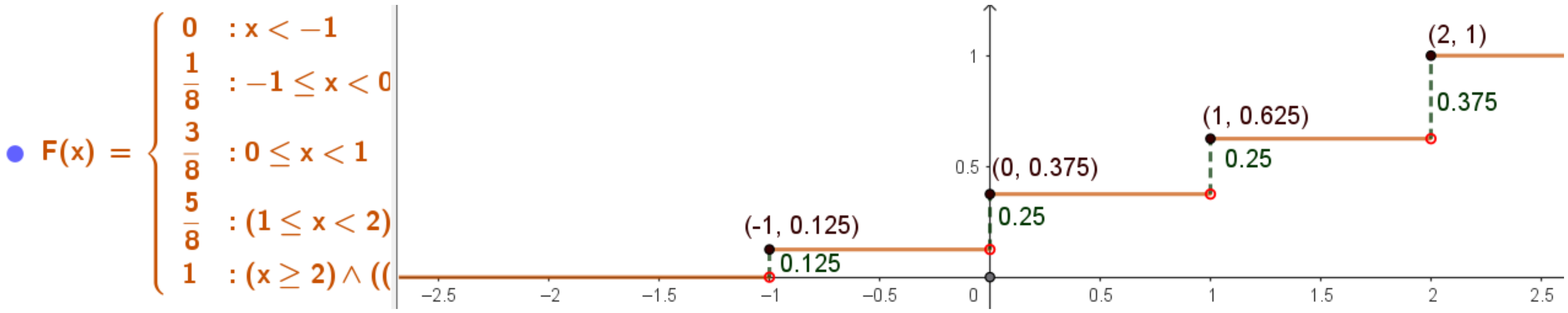
Παρατηρούμε ότι η τιμή αυτή $F(x)=\frac{5}{8}$ για όλα τα ενδιάμεσα σημεία x του διαστήματος $[1,2)$ συμπίπτει με την τιμή που παίρνει η F στο αριστερό άκρο 1 του διαστήματος και αυτό βέβαια προκύπτει από τον ορισμό της συνάρτησης κατανομής F.

Παρόμοιο συλλογισμό ακολουθούμε και για τα υπόλοιπα ενδιάμεσα διαστήματα, όπως και για τιμές της X, αριστερά του -1 και δεξιά του 2.

Η αναλυτική έκφραση της συνάρτησης κατανομής:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{αν } x<-1 \\ \frac{1}{8}, & \text{αν } -1\leq x<0 \\ \frac{3}{8}, & \text{αν } 0\leq x<1 \\ \frac{5}{8}, & \text{αν } 1\leq x<2 \\ 1, & \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$$

βi) Το διάγραμμα της F είναι το διάγραμμα μιας κλιμακωτής συνάρτησης. Τα «άλματα» που παρουσιάζει η γραφική της παράσταση στις τιμές -1, 0, 1, 2 έχουν ίσο μέγεθος με τις πιθανότητες $\frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{3}{8}$, αντίστοιχα.



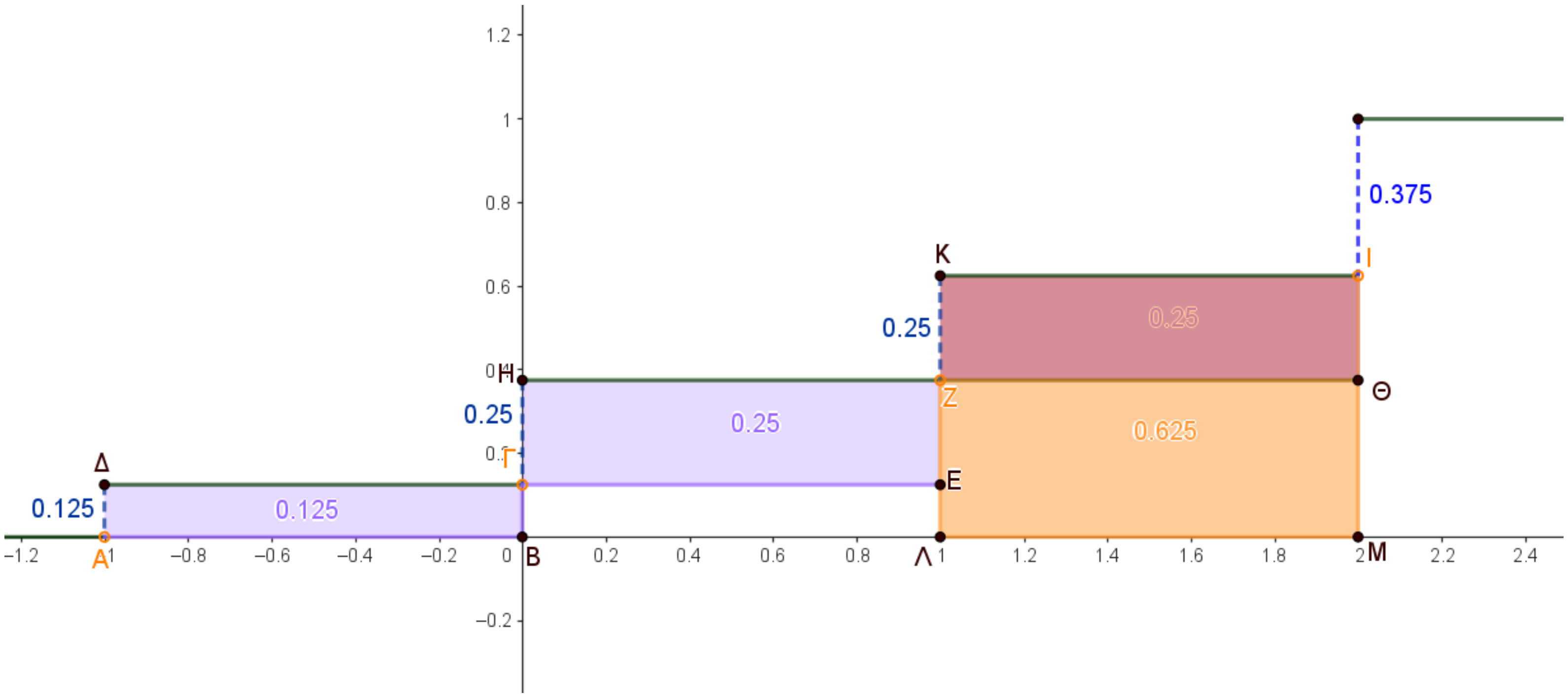
γ)

Η ζητούμενη πιθανότητα $P[-1 \le X < 2]$ είναι ίση με το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων,

$$P[-1 \le X < 2] = (ΑΒΓΔ) + (ΓΕΖΗ) + (ΖΘΙΚ) = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8} \text{ ή } P[-1 \le X < 2] = (ΙΚΛΜ) = \frac{5}{8}.$$

Αυτό συμβαίνει επειδή οι διαφορές των τιμών της τ.μ. Χ είναι 1 και τα ορθογώνια έχουν πλάτος 1, οπότε το εμβαδό τους συμπίπτει με τα άλματα (μήκη των διακεκομμένων μπλε τμημάτων) ή με τις πιθανότητες $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$.

Αυτή η αναφορά με τα εμβαδά ισχύει στη συγκεκριμένη άσκηση εξ' αιτίας της ιδιαίτερης διαφοράς των τιμών της Χ, ίσης με 1 θέλοντας να δώσουμε ένα γεωμετρικό ανάλογο. Όμως σε κάθε περίπτωση, το γεωμετρικό ανάλογο που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα μιας συνάρτησης κατανομής F διακριτής τ.μ. Χ, είναι το μήκος κάθε φορά αυτού του άλματος.



Επίσης αυτή η αναφορά με τα εμβαδά, δεν θα πρέπει σε καμία περίπτωση να συγχέεται με την έννοια του εμβαδού – ορισμένο ολοκλήρωμα που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής συνεχών μεταβλητών.