Επαναληπτικές εξετάσεις 2007, Μαθηματικά & Στοιχεία Στατιστικής Θέμα 3γ

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β του Ω τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$A = \{x \in \Omega /\ 0 \le \ell n(x-1) < \ell n3\},$$

$$B = \{ x \in \Omega /\ (x^2 - 5x)(x-1) = -6(x-1)\}.$$

α. Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A-B)$ και $P(B \cup A')$. Μονάδες 8

β. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$, να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(A' \cup B')$. Μονάδες 7

γ. Αν $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B-A) = \frac{1}{8}$, να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή της πιθανότητας P(X), όπου X είναι ενδεχόμενο του Ω τέτοιο ώστε $A \cup X = B$. Μονάδες 10

Απάντηση στο 3γ (με την συνεργασία του μαθηματικού Βραϊμάκη Γιάννη)

Το ενδεχόμενο Α είναι το σύνολο {2,3}. Το Β είναι το {1,2,3}. Για να έχουμε AUX=B,

το ενδεχόμενο X είναι ένα από τα 4 σύνολα: $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{1,2\}$, $A_3 = \{1,3\}$ και $A_4 = \{1,2,3\}$.

Παρατηρούμε επίσης ότι: $A_1 \subset A_2$, $A_2 \subset A_4$, και $A_1 \subset A_3$, $A_3 \subset A_4$, οπότε

$P(A_1) < P(A_2) < P(A_4)$ και $P(A_1) < P(A_3) < P(A_4)$.

Συνεπώς, βρίσκουμε τις πιθανότητες των ενδεχομένων A_1 και A_4, με το μικρότερο και το μεγαλύτερο πλήθος αποτελεσμάτων αντίστοιχα και κατόπιν την την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή, της πιθανότητας P(X).

Σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει: $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(B) = P(B-A)+P(A \cap B) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

στην περίπτωση που X ={1}, $\min P(X)=P(B-A)=\frac{1}{8}$. Όταν X ={1, 2, 3},

$\max P(X) = P(B) = \frac{3}{8}$.