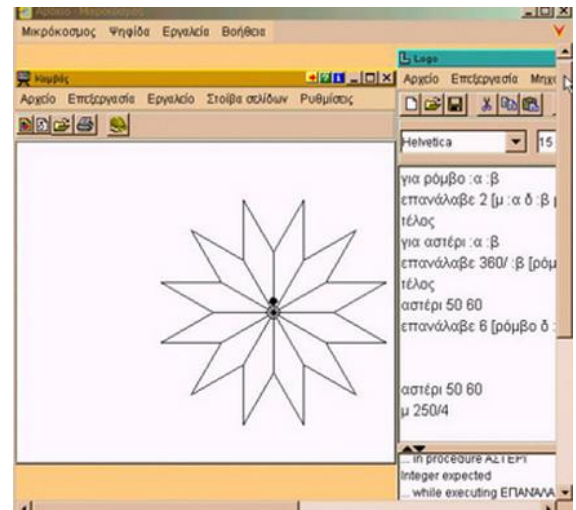
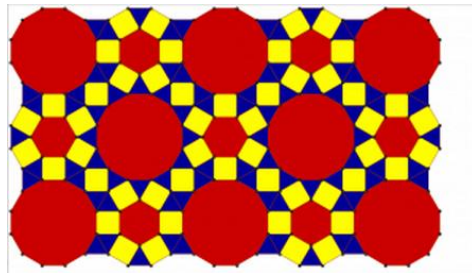
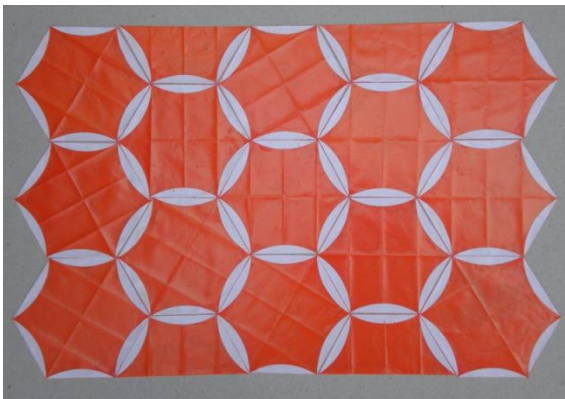
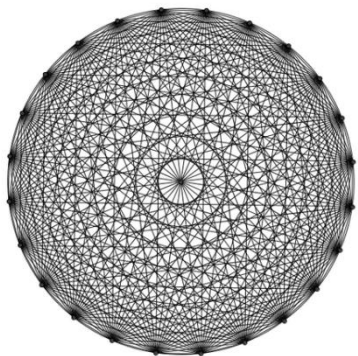
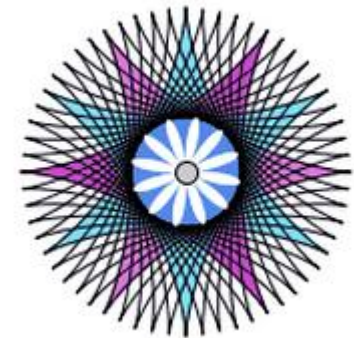
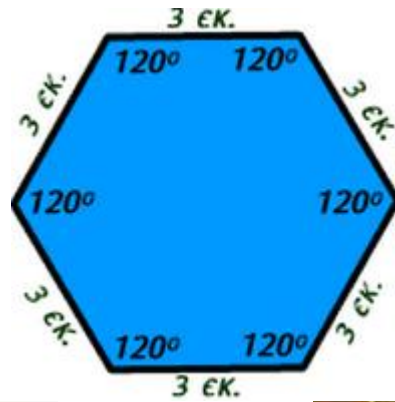
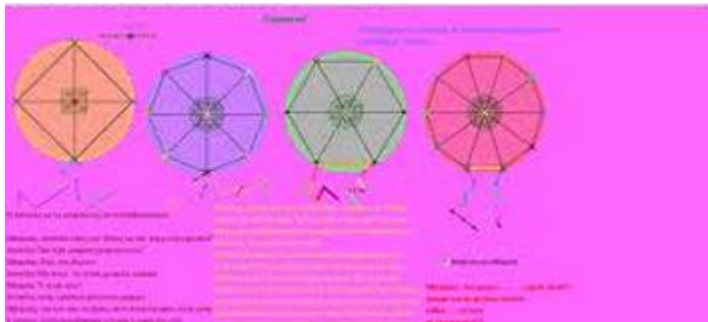


# *Κανονικά πολύγωνα*

*Τουρναβίτης Στέργιος*



*Κανονικά πολύγωνα  
στη φύση, τέχνη, ανθρώπινες κατασκευές, Μαθηματικά ...*





# Κανονικά πολύγωνα στη φύση...

## Η κηρήθρα είναι ένα φυσικό θαύμα αρχιτεκτονικής

Οι μέλισσες έχουν εφεύρει τον καλύτερο τρόπο για να κάνουν οικονομία πρώτης ύλης, δηλαδή κεριού, αλλά και χώρου μέσα στην κυψέλη.

Απ' όλα τα γεωμετρικά σχήματα που έχουν ίση περίμετρο, το μικρότερο όγκο κατά σειρά καταλαμβάνει ο κύκλος, ενώ ακολουθούν τα πολύγωνα με το μικρότερο αριθμό πλευρών. Για παράδειγμα, το εξάγωνο καταλαμβάνει μικρότερο όγκο από το επτάγωνο, το επτάγωνο μικρότερο από το οκτάγωνο κ.ο.κ. Αν οι μέλισσες έφτιαχναν μεμονωμένα κελιά, το ιδανικότερο σχήμα θα ήταν ο κύκλος, γιατί με την ίδια ποσότητα κεριού θα εξοικονομούσαν περισσότερο χώρο. Όμως, κάθε κυψέλη αποτελείται από πολυάριθμα κελιά, τα οποία βρίσκονται το ένα δίπλα στο άλλο. Αν τα κελιά ήταν κυκλικά στο σημείο όπου οι κύκλοι δε θα εφάπτονταν, θα έμενε ανεκμετάλλευτος χώρος. Το εξάγωνο είναι η χρυσή τομή για τις μέλισσες. Απαιτεί ελάχιστο κερύ, αφού οι πλευρές κάθε κελιού είναι κοινές και για το γειτονικό τους. Επιπλέον, καταλαμβάνει το μικρότερο δυνατό όγκο σε σχέση με άλλα πολύγωνα, γιατί έχει άριστη αναλογία μεταξύ περιμέτρου και επιφάνειας. Επομένως με το ελάχιστο υλικό (κερύ) καλύπτουν την μέγιστη επιφάνεια.







Ακόμα κανονικά πολύγωνα συναντάμε και στους ιστούς που υφαίνει η αράχνη για να πιάσει τα θύματά της.



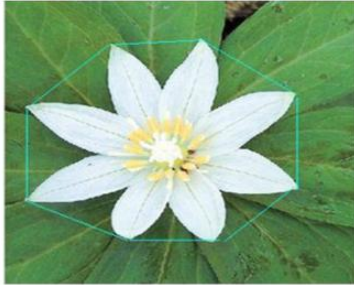




Στο σώμα του κροταλία, βρίσκουμε επίσης κανονικά πολύγωνα.

# Κανονικά πολύγωνα στην θάλασσα

## ΝΟΥΦΑΡΑ



Τα άνθη του νούφαρου είναι ακτινωτά και εξέρχονται από το κεντρικό μίσχο του φυτού.



Στα φυτά όπως στα νούφαρα και στις λειχήνες παρατηρούμε διαφόρων ειδών κανονικά πολύγωνα. Στους αστερίες αλλά και στο σώμα του κάβουρα σχηματίζονται επίσης κανονικά πολύγωνα.



# ΑΣΤΕΡΙΕΣ

Οι αστερίες αποτελούνται από έναν κεντρικό κυκλικό δίσκο, ο οποίος φέρει βραχίονες σε πεντάκτινη συμμετρία.





# Αρχιτεκτονική-διάκοσμιση

## ΑΛΑΜΠΡΑ

Το παλάτι της Αλάμπρα στη Γρανάδα της Ισπανίας είναι, ίσως, το εξοχότερο δείγμα χρήσης κανονικών πολυγώνων στην Τέχνη. Έχει φτιαχτεί όλο με ψηφιδωτά πάνω σε σχέδια που περιλαμβάνουν επαναλήψεις από συνθέσεις κανονικών πολυγώνων.





www.shutterstock.com - 69679471



Βλέπουμε ένα πλήθος κανονικών πολυγώνων να χρησιμοποιούνται για να σχηματίσουν πολυσύνθετα διακοσμητικά μοτίβα...





### **Six Harmonies Pagoda Κίνα**

Η σκεπή του κάθε ορόφου είναι κανονικό εξάγωνο



Πυργί της Χίου



Οι Μυκονιάτες έχουν μια ιδιαίτερη σχέση με τα πολύγωνα, καθώς τα χρησιμοποιούσαν και συνεχίζουν να τα χρησιμοποιούν μέχρι σήμερα στην καθημερινή τους ζωή.

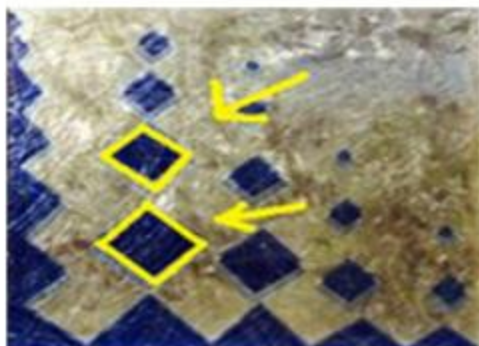




## Ψηφιδωτά:



## Βιτρώ:



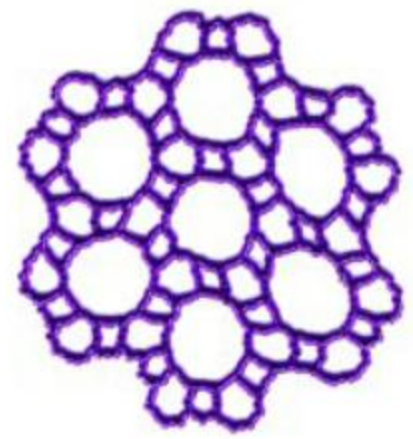
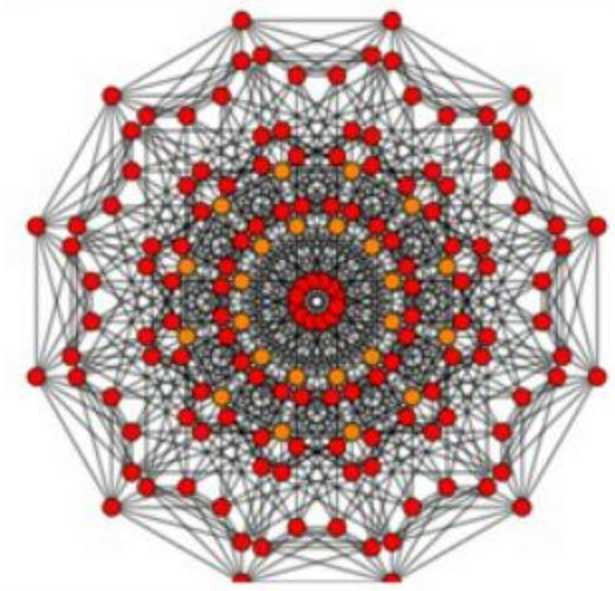
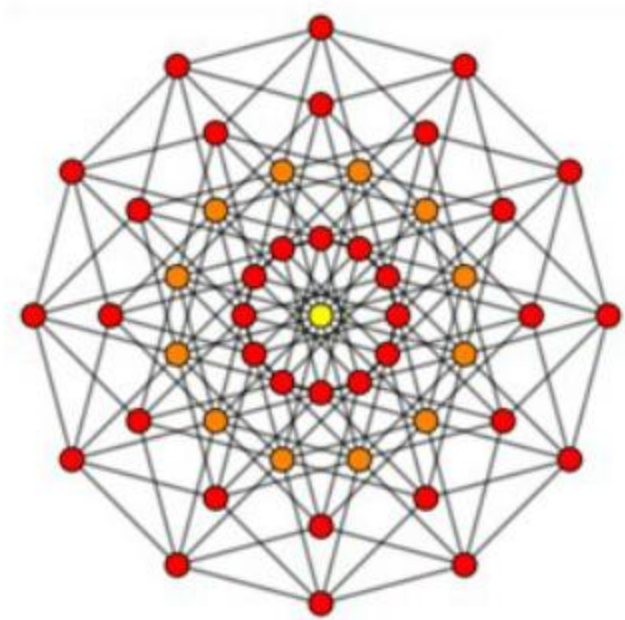


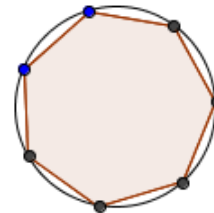
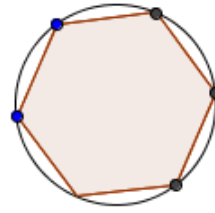
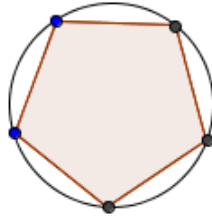
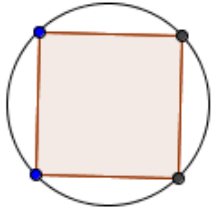
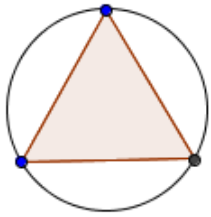
# ΝΑΝΟΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ



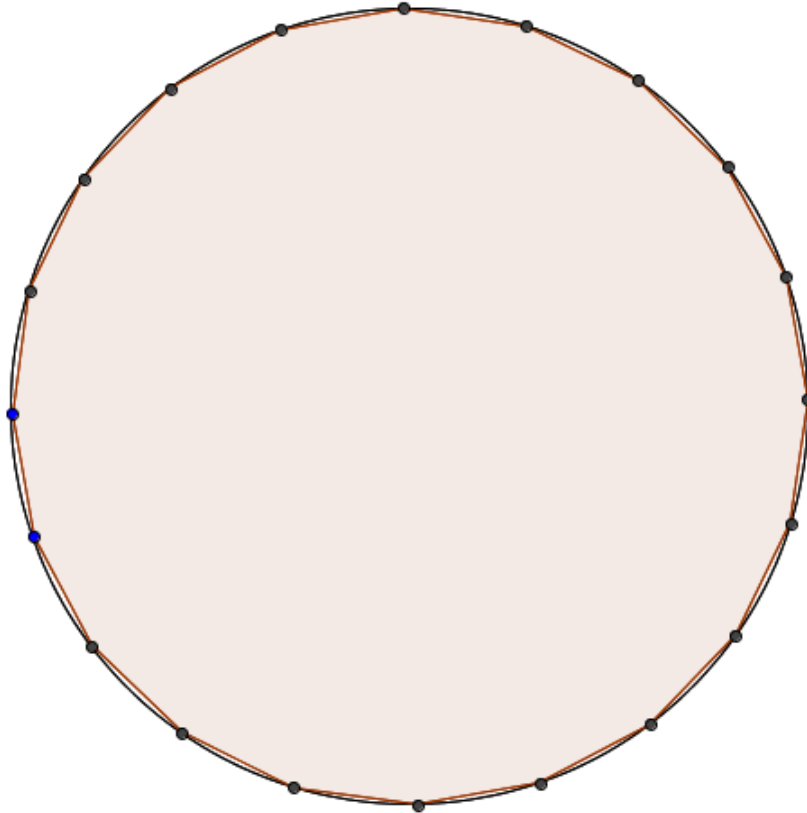
Με τη νανοτεχνολογία καταφέραμε να ανακαλύψουμε πως υπάρχουν κανονικά πολύγωνα ακόμα και στο δέρμα μας που βέβαια δεν διακρίνονται με γυμνό μάτι.

# Γεωμετρικές καλλιτεχνίες με κανονικά πολύγωνα:

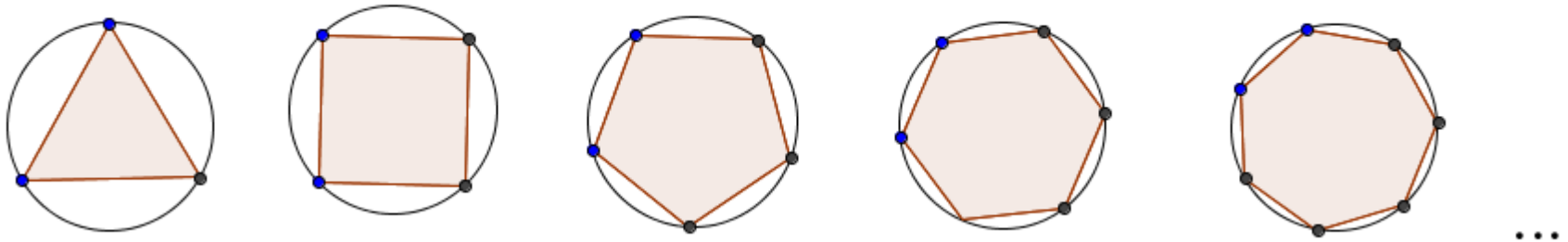




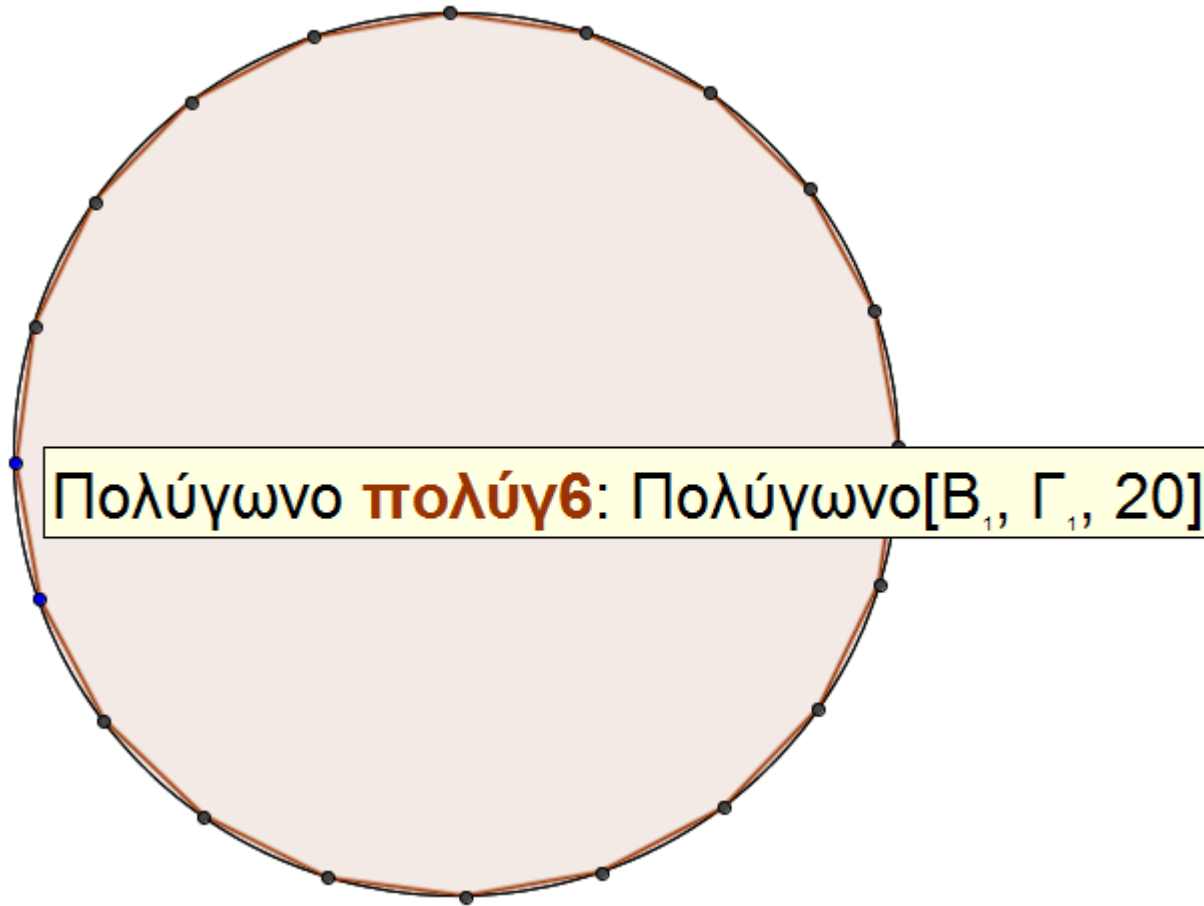
...



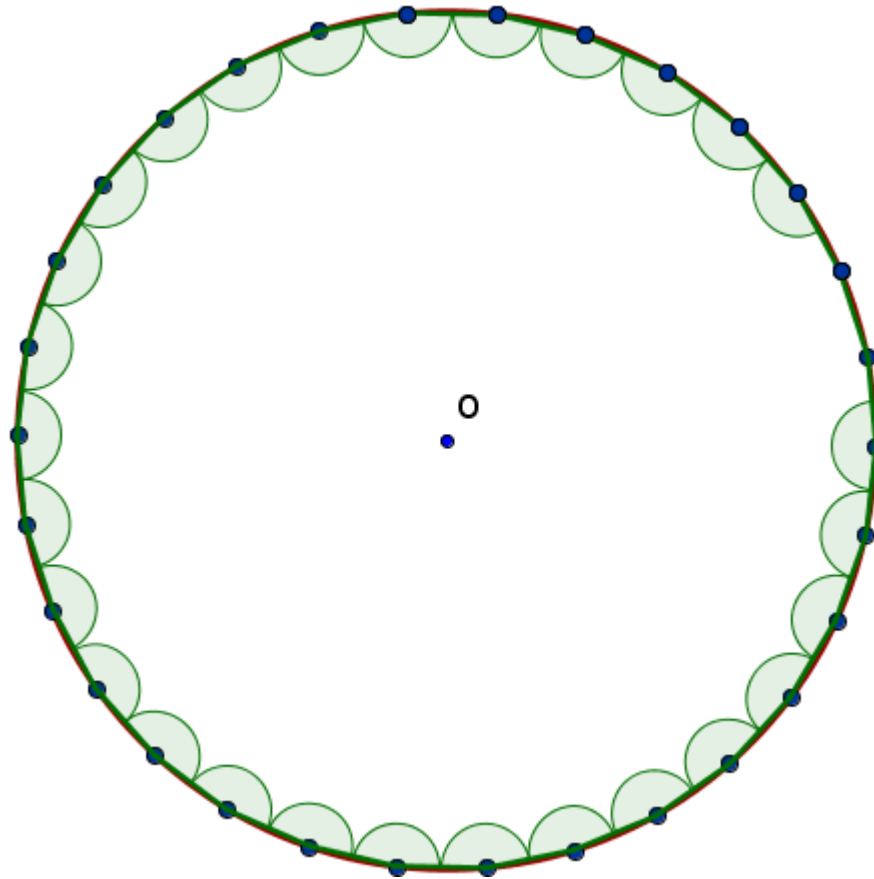




Σε κύκλους με τυχαία ακτίνα εγγράφουμε (οι κορυφές τους είναι σημεία του κύκλου και τα τόξα που ορίζονται από δύο διαδοχικές κορυφές είναι ίσα μεταξύ τους) διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο, ένα κανονικό 5γωνο, ένα κανονικό εξάγωνο, ένα κανονικό 7γωνο, αυξάνοντας κατά 1 τον αριθμό των πλευρών...



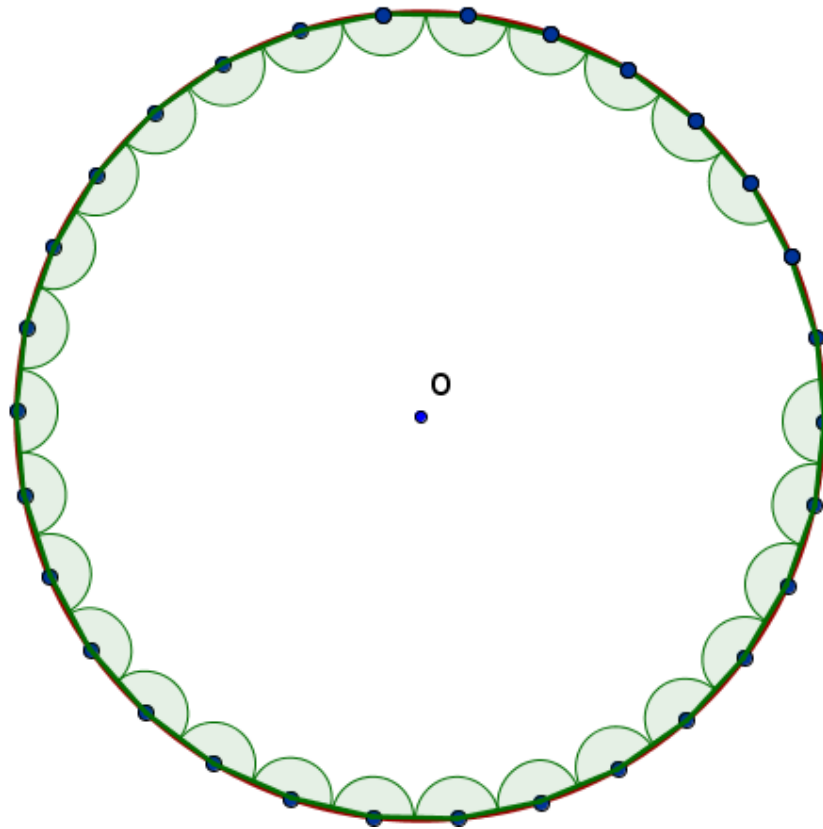
Στην περίπτωση του κανονικού 20γώνου, δυσκολευτήκαμε να ξεχωρίσουμε την κόκκινη γραμμή του κανονικού 20γώνου από την μαύρη του κύκλου, γι' αυτό μεγαλώσαμε τον κύκλο για να φανεί η διαφορά.



Στην περίπτωση του κανονικού 30-γώνου, τα πράγματα γίνονται ακόμη πιο δυσδιάκριτα.

Με πιο σχήμα τείνει να συμπέσει το κανονικό  $n$ -γωνο όπου το  $n$  είναι ένας πολύ μεγάλος αριθμός;

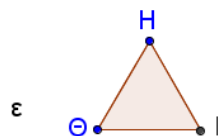
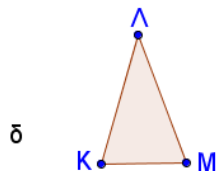
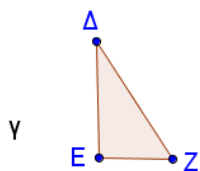
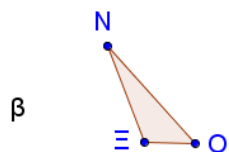
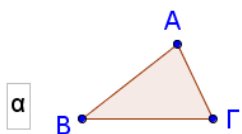




Αυξάνοντας ολοένα τον αριθμό των πλευρών και υπολογίζοντας την περίμετρο του κανονικού  $n$ -γώνου όπου  $n$  πολύ μεγάλος αριθμός, έχουμε μία μέθοδο για να προσεγγίσουμε το μήκος του ..... στον οποίο το κανονικό  $n$ -γωνο είναι εγγεγραμμένο.

Ας σταματήσουμε όμως εδώ κάποιες από τις χρησιμότητες των κανονικών πολυγώνων στη φύση, τέχνη, γεωμετρία γιατί υπεισέρχονται κάποιες ανώτερες έννοιες των μαθηματικών, όπως αυτή του ορίου και είναι υπόθεση μεγαλύτερων τάξεων...

Στην α΄ γυμνασίου μελετήσαμε τα τρίγωνα και διάφορα είδη τους, καθώς και διάφορα είδη τετραπλεύρων. Μπορείτε να αντιστοιχίσετε τα παρακάτω τρίγωνα με τις ονομασίες τους;



1. Οξυγώνιο

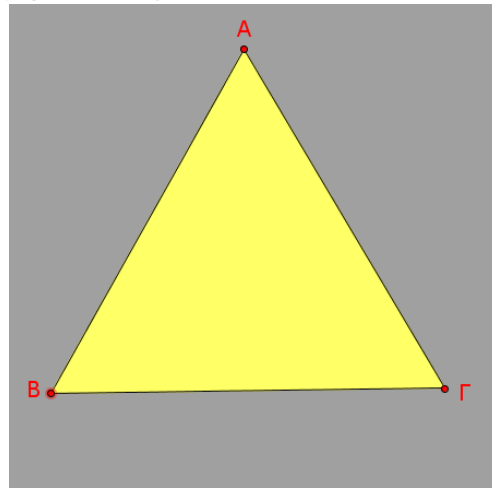
2. Ορθογώνιο

3. Ισοσκελές

4. Αμβλυγώνιο

5. Ισόπλευρο

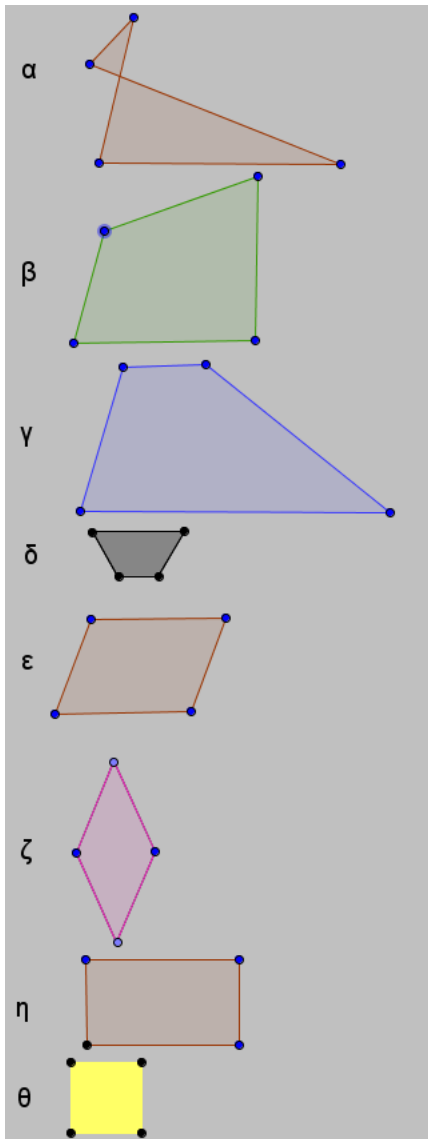
Απ' όλα τα προηγούμενα θα  
μας απασχολήσει το...



..... τρίγωνο που έχει όλες τις  
πλευρές του μεταξύ τους ..... και όλες  
τις γωνίες μεταξύ τους .....

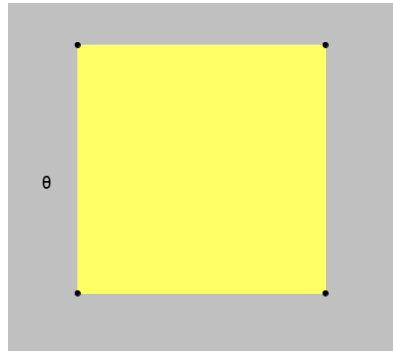


Μπορείτε να αντιστοιχίσετε τα παρακάτω τετράπλευρα με τις ονομασίες τους;



1. Μη κυρτό τετράπλευρο
2. Ορθογώνιο  
παραλληλόγραμμο
3. Τραπέζιο
4. Ρόμβος
5. Ισοσκελές τραπέζιο
6. Κυρτό τετράπλευρο
7. Παραλληλόγραμμο
8. τετράγωνο

Απ' όλα τα προηγούμενα  
θα μας απασχολήσει το...

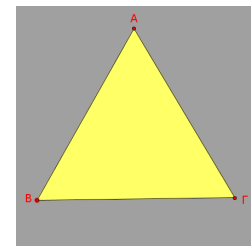


..... που έχει όλες τις πλευρές του  
μεταξύ τους ..... και όλες τις γωνίες  
μεταξύ τους .....

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους ίσες και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους ίσες.

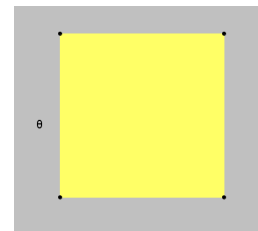
Από την Α' Γυμνασίου γνωρίζουμε ήδη δύο κανονικά πολύγωνα.

ΤΟ .....



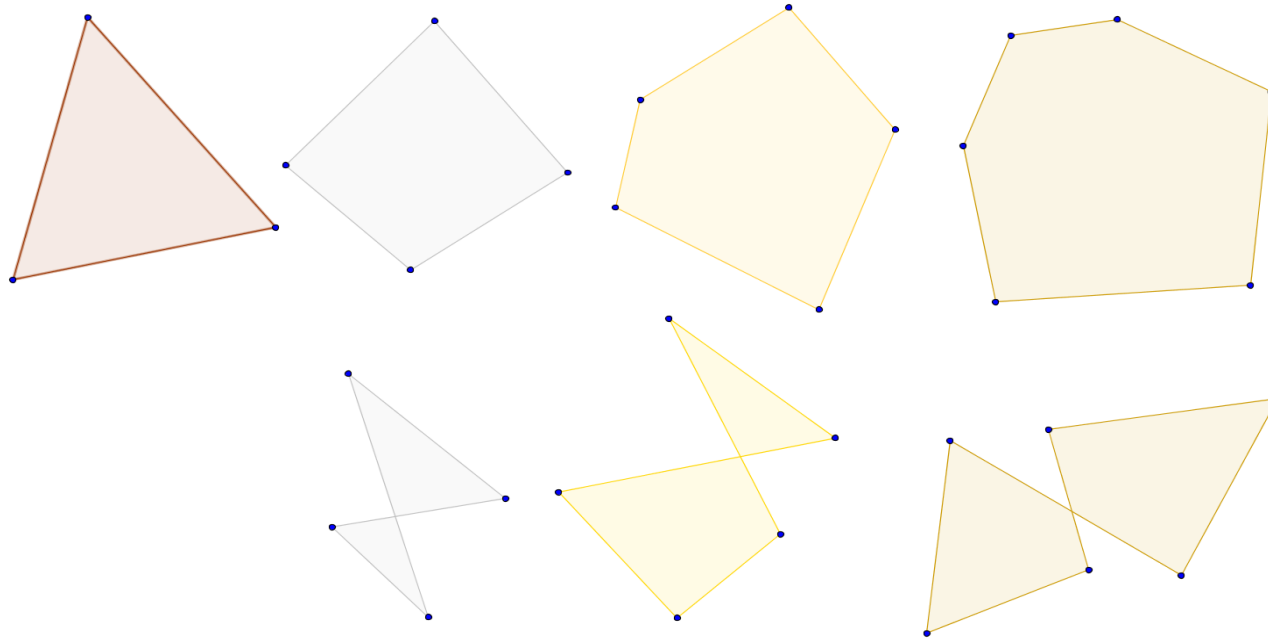
και το

.....





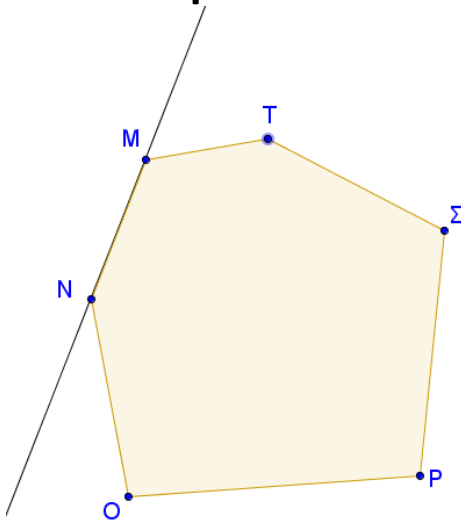
# Λίγα λόγια και για τα Κυρτά πολύγωνα



Στην πρώτη σειρά της εικόνας βλέπουμε ένα τρίγωνο και κάποια πολύγωνα που τα λέμε όλα κυρτά πολύγωνα, ενώ στην δεύτερη σειρά τα χαρακτηρίζουμε μη κυρτά πολύγωνα.

## Ποια είναι η διαφορά;

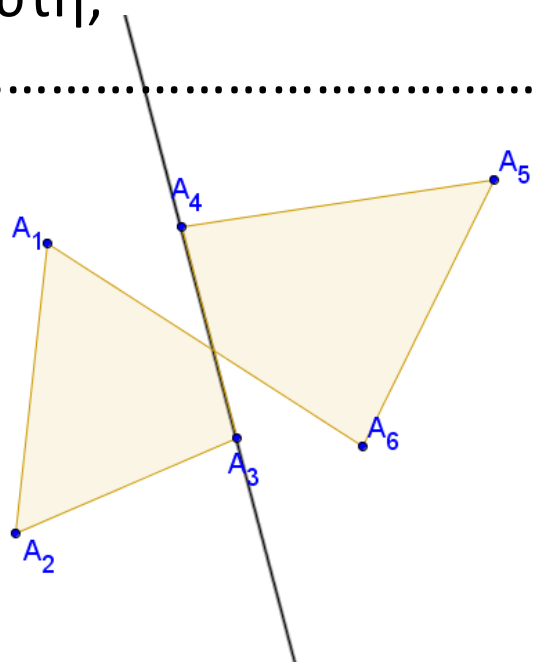
Αν πάρουμε οποιοδήποτε κυρτό πολύγωνο της 1<sup>ης</sup> σειράς, **οποιαδήποτε ευθεία** που είναι ο φορέας κάθε πλευράς του, **αφήνει τις υπόλοιπες κορυφές προς το ίδιο μέρος**, όπως στο παρακάτω κυρτό εξάγωνο.



Ενώ στο μη κυρτό εξάγωνο **υπάρχει μία τουλάχιστον ευθεία** που διέρχεται από τις κορυφές ....., ..... και **δεν αφήνει τις υπόλοιπες κορυφές προς το ίδιο μέρος.**

Για το πολύγωνο αυτό υπάρχει και μία άλλη ευθεία με την ίδια ιδιότητα. Από ποιες κορυφές διέρχεται αυτή;

.....

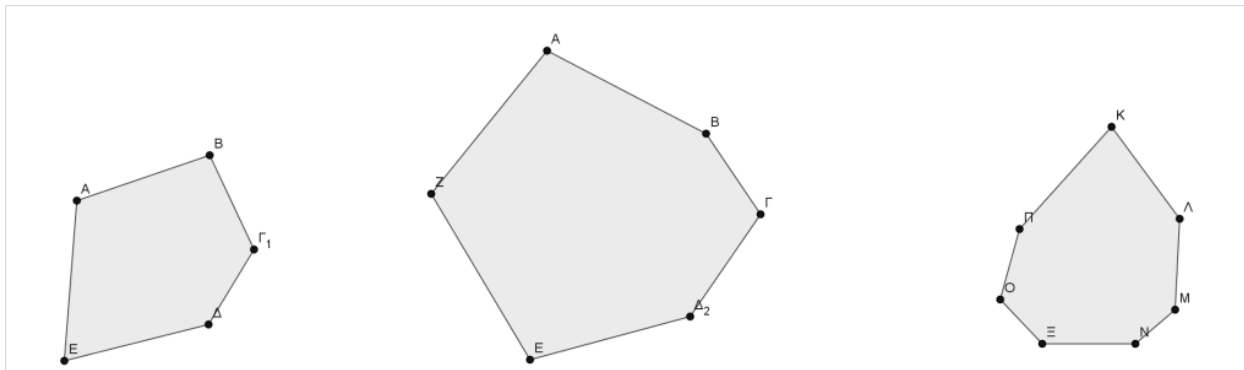




# ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

1. Ένα πολύγωνο με  $n$  κορυφές θα το λέμε .....  
Εξαίρεση αποτελεί το πολύγωνο με 4 κορυφές, που λέγεται  
.....

2. Να χαρακτηρίσετε τα παρακάτω πολύγωνα:



.....

.....

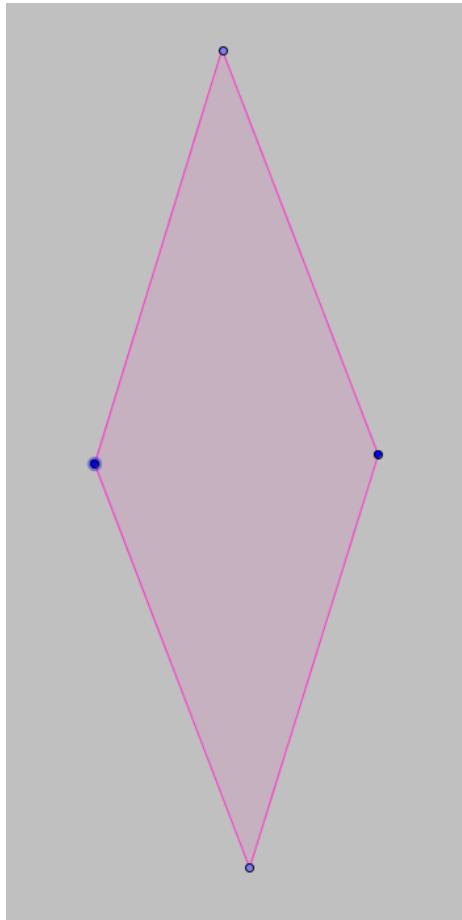
.....

Συμπλήρωση των κενών του ορισμού με την λέξη που λείπει.

## ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, αν όλες οι πλευρές του είναι μεταξύ τους .....και όλες οι γωνίες του είναι μεταξύ τους .....

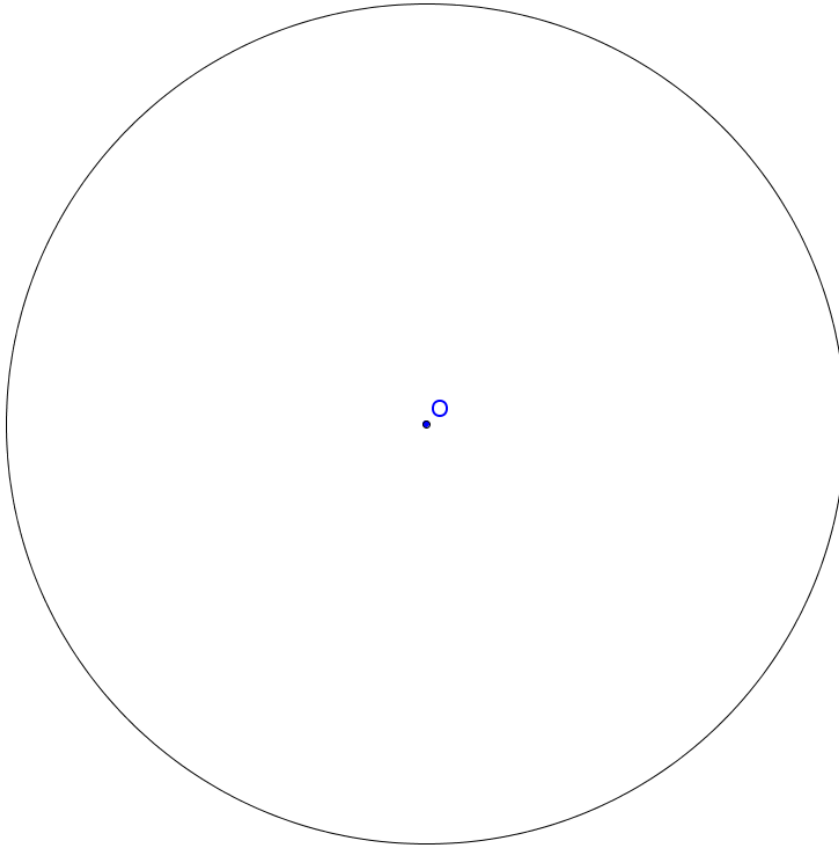
3. Είναι ο ρόμβος κανονικό πολύγωνο;  
(Δικαιολογήστε την απάντησή σας)



## Δραστηριότητα

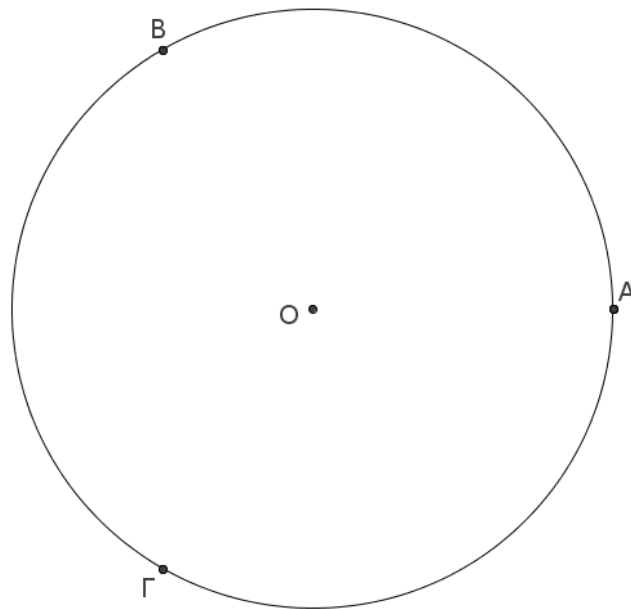
**4. Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου.**

α) Να χωρίσετε τον παρακάτω κύκλο σε 3 ίσα και διαδοχικά τόξα.





Όλος ο κύκλος έχει μέτρο .....,  
για να τον χωρίσουμε σε 3 ίσα  
τόξα, κάθε τόξο θα έχει μέτρο  
.....



Σχηματίζουμε διαδοχικά 3 ίσες επίκεντρες γωνίες,

$$\omega = \dots\dots\dots,$$

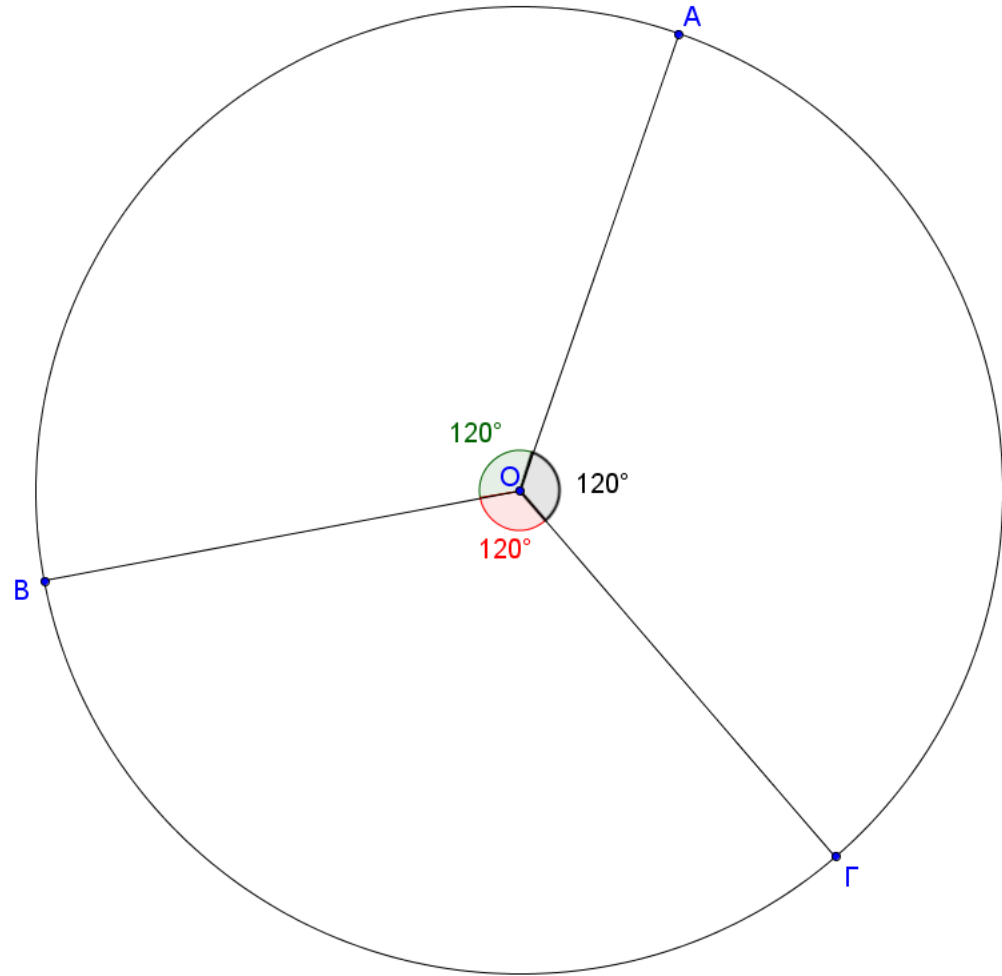
οι οποίες χωρίζουν τον κύκλο σε 3 ίσα και διαδοχικά τόξα.

☑ Κεντρική γωνία  $\omega$

$$\omega = \frac{360^0}{3}$$

☑ υπολογισμός κεντρικής γωνίας  $\omega$

$$\omega = 120^0$$

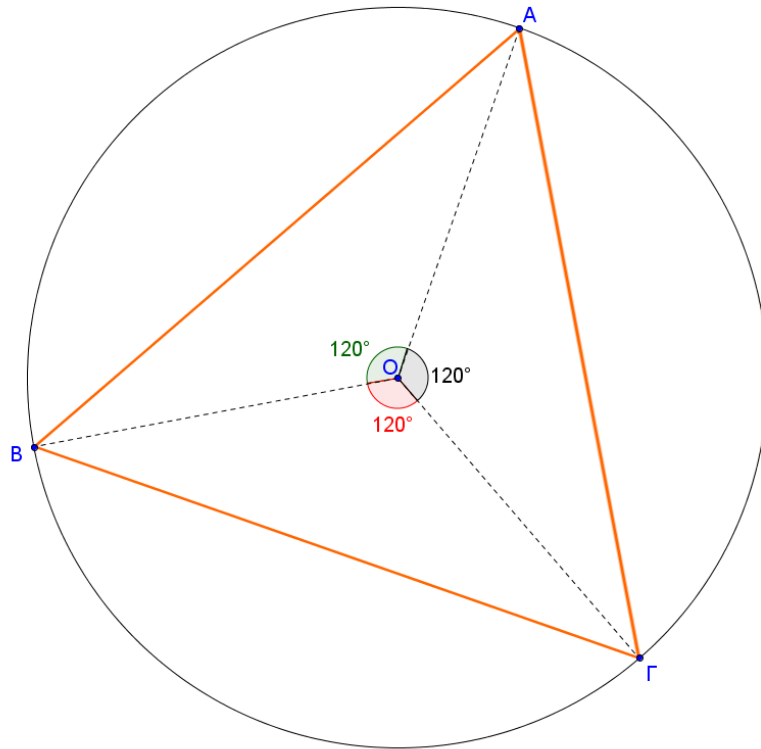


β) Ενώστε τα σημεία που προκύπτουν πάνω στον κύκλο.  
Τι παρατηρείτε για τα ευθύγραμμα τμήματα – χορδές του κύκλου;

.....

.....

.....





γ) Τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΒΓ και γιατί;

Λύση: Το τρίγωνο ΑΒΓ έχει όλες τις πλευρές μεταξύ τους ..... γιατί

όπως μάθαμε στην Α΄ Γυμνασίου, ίσα τόξα στον ίδιο κύκλο αντιστοιχούν

σε ..... χορδές. Επομένως  $AB = \dots = \dots$

Η γωνία  $\hat{\phi} = \widehat{B\hat{A}\Gamma}$  είναι ..... γωνία του κύκλου και βαίνει σε τόξο μέτρου,

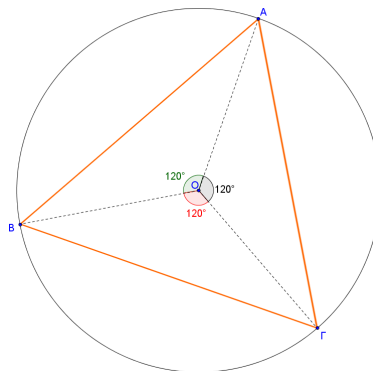
$$\widehat{B\hat{\Gamma}} = \dots$$

Επομένως  $\hat{\phi} = \dots$

Το ίδιο συμβαίνει και για τις άλλες δύο γωνίες του τριγώνου.  
Το τρίγωνο ΑΒΓ, έχει όλες τις πλευρές ..... μεταξύ τους  
και όλες τις γωνίες ..... μεταξύ τους, οπότε είναι  
.....

Με την παραπάνω διαδικασία κατασκευάσαμε ένα  
**ισόπλευρο τρίγωνο**, του οποίου οι κορυφές είναι σημεία  
ενός κύκλου.

Ο κύκλος αυτός λέγεται **περιγεγραμμένος** του ισοπλεύρου  
τριγώνου και το ισόπλευρο τρίγωνο είναι **εγγεγραμμένο** στον  
κύκλο αυτό.



5. Συμπληρώστε την σχέση που συνδέει την κεντρική γωνία ενός ισοπλεύρου τριγώνου με το πλήθος  $n$  των πλευρών του.

$\omega = \dots\dots\dots$

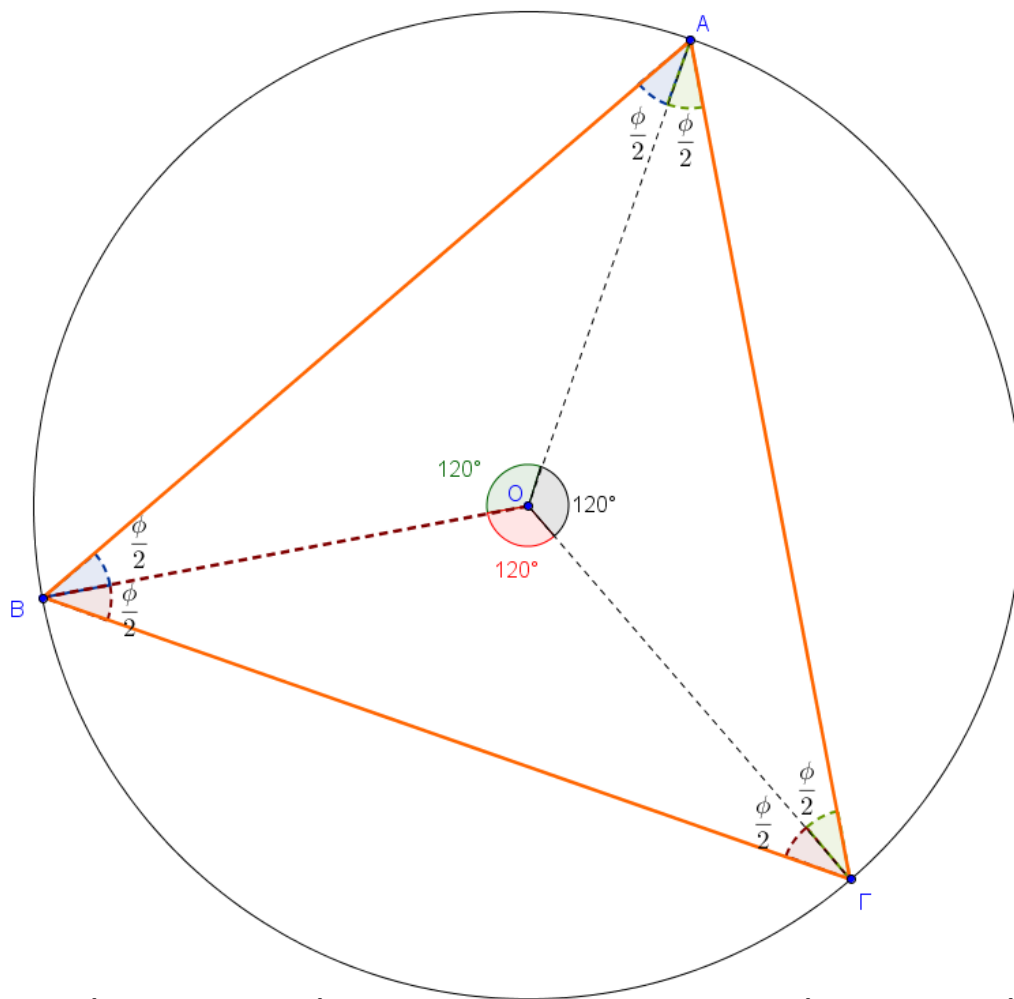
6. Ποια είναι η σχέση που συνδέει την κεντρική  $\omega$  και την γωνία  $\varphi$  του ισοπλεύρου τριγώνου;

Απάντηση:

Στο **ισόπλευρο τρίγωνο**  $AB\Gamma$ , καθεμιά από τις γωνίες του  $\widehat{B\hat{A}\Gamma}, \widehat{A\hat{B}\Gamma}, \widehat{B\hat{\Gamma}A}$

είναι **ίσες**, αφού είναι **εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα** και τις συμβολίζουμε με  $\varphi$

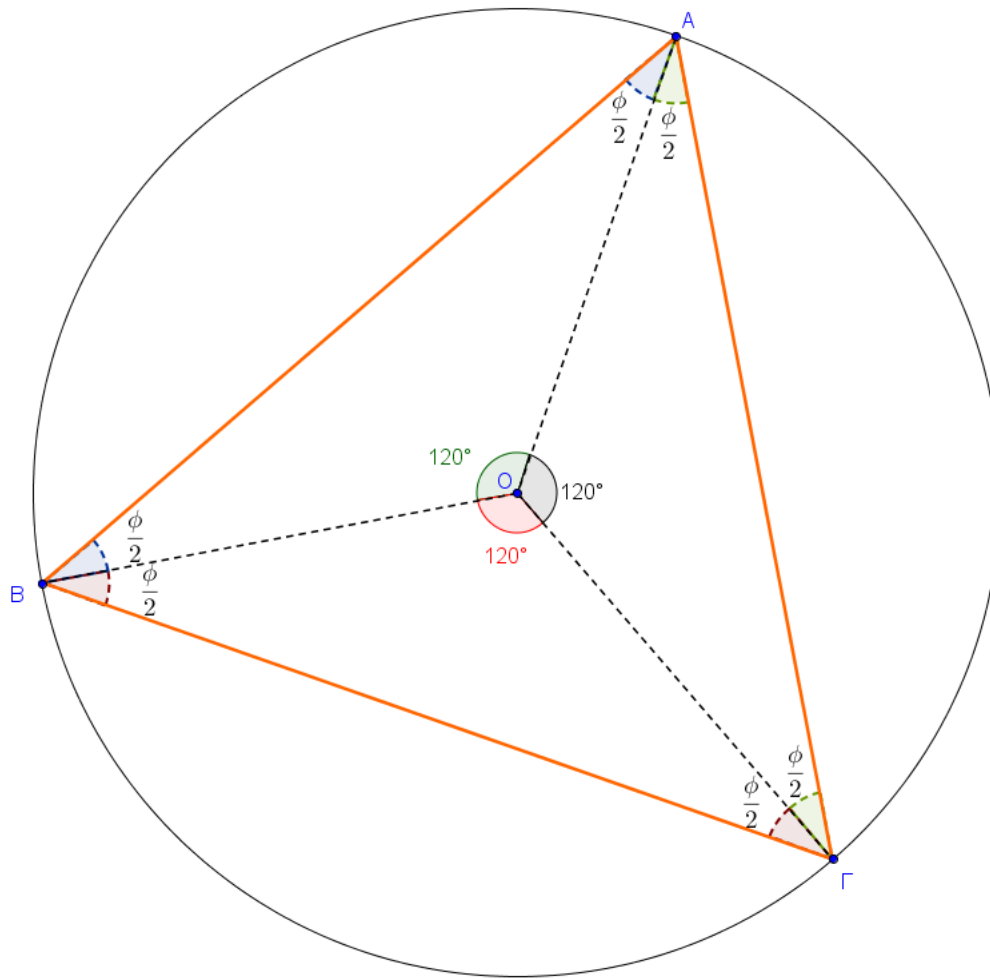
Η γωνία  $\varphi$  ονομάζεται γωνία του ισοπλεύρου τριγώνου.



Αν ενώσουμε το κέντρο του κύκλου με τις τρεις κορυφές, σχηματίζονται τρία ίσα ισοσκελή τρίγωνα.

Σε καθένα από τα τρίγωνα αυτά οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες με  $\frac{\varphi}{2}$





Σ' ένα από αυτά τα τρία ίσα ισοσκελή τρίγωνα, έστω στο  $AOB$ , έχουμε ότι:

$$\omega + \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = 180^0 \quad \text{ή} \quad \omega + \varphi = 180^0 \quad \text{ή} \quad \boxed{\varphi = 180^0 - \omega}$$

$$\varphi = 180^\circ - \omega \quad (2)$$

Άρα,

Η γωνία  $\varphi$  του ισοπλεύρου τριγώνου, είναι παραπληρωματική της κεντρικής γωνίας  $\omega$  του ισοπλεύρου τριγώνου.

Η παραπάνω σχέση μαζί με την

$$\omega = \frac{360^\circ}{n} \quad (1)$$

που αναφερθήκαμε προηγουμένως θα μας χρησιμεύσουν στις ασκήσεις που ακολουθούν...

**Ο τύπος (2) εφαρμόζεται σε όλα τα κανονικά πολύγωνα, γιατί:**

οι διαδικασίες εύρεσης του τύπου (2) όπως περιγράψαμε παραπάνω, είναι κοινές για όλα τα κανονικά  $n$ -γωνα (π.χ. στην περίπτωση του **τετραγώνου** θα έχουμε **τέσσερα ίσα και ισοσκελή τρίγωνα με κοινή κορυφή το κέντρο του κύκλου**, στην περίπτωση του κανονικού πενταγώνου πέντε ίσα και ισοσκελή τρίγωνα με κοινή κορυφή το κέντρο του κύκλου κ.ο.κ.ε) και ισχύει για οποιοδήποτε κανονικό πολύγωνο.

Ο τύπος (1) **διαφοροποιείται ανάλογα με τον αριθμό των πλευρών του κανονικού  $n$ -γώνου** π.χ. για  $n = 4$  στην περίπτωση του τετραγώνου, για  $n=5$  στην περίπτωση του κανονικού πενταγώνου κ.ο.κ.ε



2. Μπορείτε να εξετάσετε αν υπάρχει κανονικό πολύγωνο με γωνία  $140^\circ$ ;

Λύση:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3.

α) Μπορείτε να υπολογίσετε την κεντρική γωνία  $\omega$  του κανονικού εξαγώνου;

β) Μπορείτε να χαρακτηρίσετε το είδος των έξι ίσων τριγώνων που έχουν κοινή κορυφή το κέντρο του κύκλου και βάσεις τις πλευρές του κανονικού εξαγώνου;

γ) Με την βοήθεια των προηγουμένων ερωτημάτων να κατασκευάσετε ένα κανονικό εξάγωνο με κανόνα και διαβήτη και κατόπιν στον ίδιο κύκλο να κατασκευάσετε ένα κανονικό δωδεκάγωνο.

Λύση:

α)

.....  
.....



$\beta)$

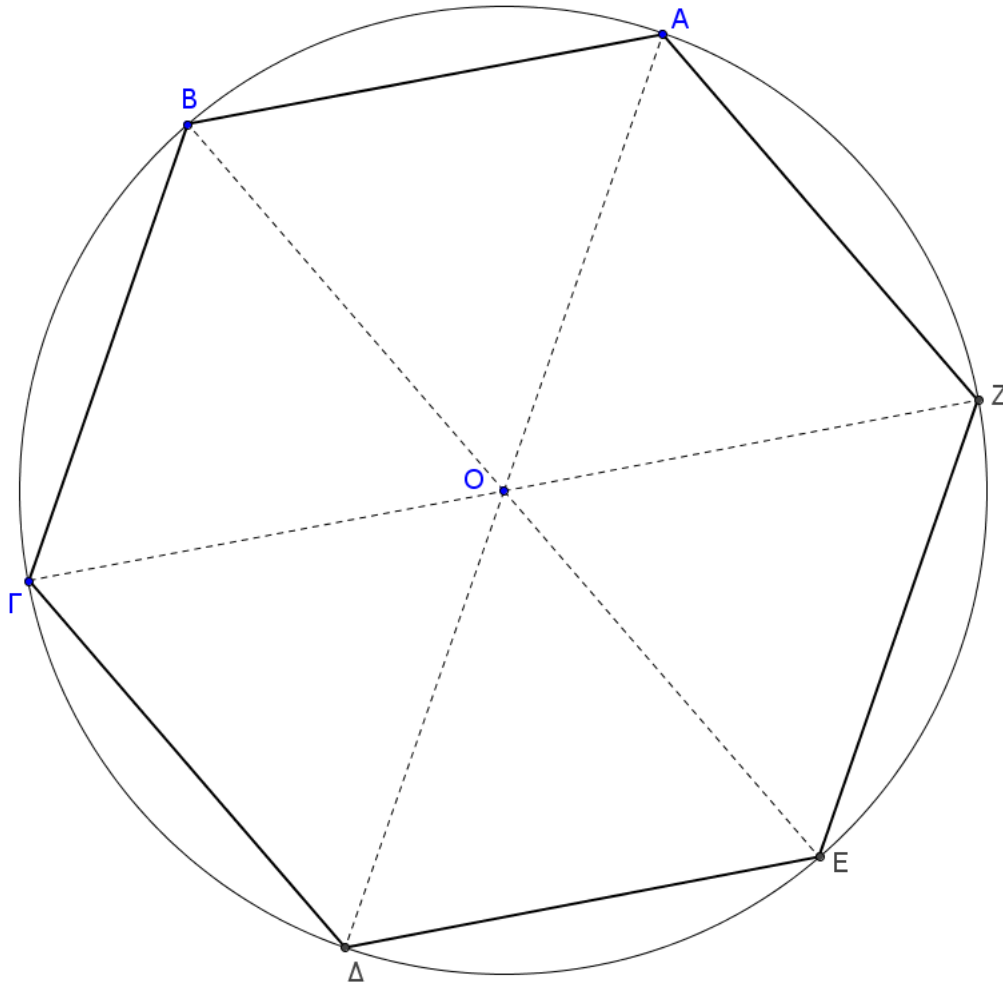
.....

.....

.....

.....

$\gamma)$



Όσοι δημιουργήσατε την κατασκευή, δεν θα έχετε δυσκολία να κατασκευάσετε το κεφάλι του χαρταετού για την Καθαρή Δευτέρα του ερχόμενου έτους 2014...