

Λύνοντας προβλήματα με εξισώσεις και γραφικές παραστάσεις ευθειών

Τουρναβίτης Στέργιος

Πολλά προβλήματα της καθημερινής ζωής, της πρακτικής αριθμητικής, φυσικής κ.ά. λύνονται αν «μεταφραστούν» από την φυσική μας γλώσσα, στη γλώσσα της άλγεβρας. Μία εξίσωση στην άλγεβρα, είναι το ισοδύναμο μιας πρότασης του προβλήματος ή ολόκληρου του προβλήματος. Περιέχει τον άγνωστο (συνήθως συμβολίζεται με x) τους γνωστούς αριθμούς που συνδέονται μεταξύ τους με τις τέσσερις πράξεις και μία ισότητα.

Η επίλυση μιας εξίσωσης βασίζεται στην εκμάθηση κάποιων συγκεκριμένων τεχνικών και καταλήγει (κατά τη γνώμη μας) σε ένα απλό ζήτημα. Το πιο δύσκολο είναι να καταστρώσουμε την εξίσωση. Ας δούμε μερικά προβλήματα που λύνονται με την βοήθεια της μετάφρασης στη γλώσσα της άλγεβρας και των εξισώσεων που τα εκφράζουν.

1. Σκέψου έναν αριθμό, τριπλασίασέ τον, πρόσθεσε 7 και θα βρεις 19. Ποιος είναι ο αριθμός;

Λύση:

Α' τρόπος:
Πίνακας 1

Σε κανονική γλώσσα:	Στη γλώσσα της άλγεβρας:
ένας αριθμός	x
ο τριπλάσιος του αριθμού	$3x$
στον τριπλάσιο του αριθμού προσθέτουμε 7	$3x + 7$
ο νέος αριθμός που προκύπτει είναι ο 19	$3x + 7 = 19$

Για να προσδιορίσουμε τον αριθμό αρκεί να λύσουμε την τελευταία εξίσωση.

Πίνακας 2

Εξίσωση-Περιγραφή τεχνικών επίλυσης	Εξίσωση-Ισοδύναμες εξισώσεις
η εξίσωση του προβλήματος	$3x + 7 = 19$
αφαιρούμε τον 7 από τα δύο μέλη της εξίσωσης	$3x + 7 - 7 = 19 - 7$
κάνουμε τις δυνατές πράξεις (αναγωγή ομοίων όρων)	$3x = 12$
διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου	$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$
η τελική ισοδύναμη εξίσωση-λύση	$x = 4$

Επαλήθευση: Ο αριθμός 4 μετασχηματίζεται και καταλήγει στον 19, σύμφωνα και με την 2^η στήλη του πίνακα 1.

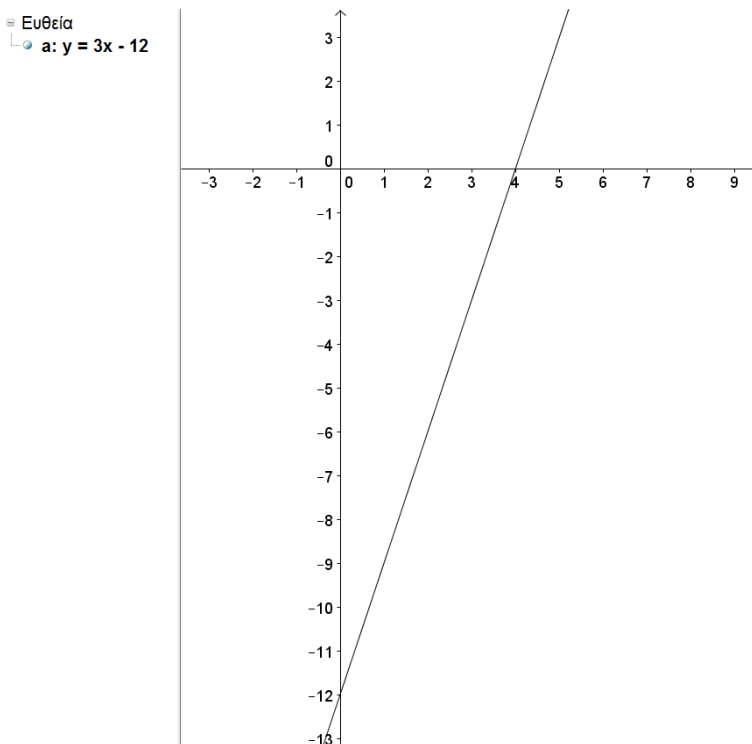
4
$3 \cdot 4$
$3 \cdot 4 + 7$
19

Ο αριθμός 4 επαληθεύει την εξίσωση του προβλήματος, επομένως και το πρόβλημα.

Β' τρόπος: Από την εξίσωση $3x + 7 = 19$ αν αφαιρέσουμε τον 19 έχουμε:

$$3x + 7 - 19 = 19 - 19 \text{ ή } 3x - 12 = 0.$$

Με την βοήθεια του διαδικτύου κατεβάζουμε και εγκαθιστούμε το “Geogebra”. Στη συνέχεια πληκτρολογούμε $y = 3x - 12$ στο πεδίο της εισαγωγής (κάτω αριστερά) και αν το



κάνουμε σωστά, θα πάρουμε την διπλανή εικόνα.

Παρατηρούμε ότι ο αριθμός 4 που βρήκαμε προηγουμένως ως λύση, είναι *εκεί που τέμνει η ευθεία που προέκυψε μετά την εισαγωγή του τύπου $y = 3x - 12$, τον οριζόντιο άξονα $x'x$.*

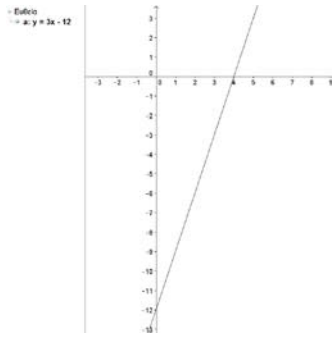
Για να το εξηγήσουμε αυτό χρειαζόμαστε λίγα λόγια από τη θεωρία του επόμενου κεφαλαίου των συναρτήσεων.

Ας ξεκινήσουμε από μία παρατήρηση. Οι εξισώσεις που θα μας απασχολήσουν στην Β΄ τάξη είναι α΄ βαθμού. Ο προηγούμενος τύπος $y = 3x - 12$ είναι και αυτός α΄ βαθμού ως προς x και y , *περιγράφει τη σχέση μεταξύ δύο μεταβαλλόμενων μεγεθών που τα παριστάνουμε με τα δύο τελευταία*

γράμματα x και y . Ανήκει σε μία γενικότερη κατηγορία τύπων της μορφής: $y = ax + \beta$ όπου a, β ρητοί αριθμοί. Θυμίζουμε ότι το σύνολο Q των ρητών αριθμών είναι το σύνολο των αριθμών που μπορούν να γραφούν σε μορφή κλάσματος με αριθμητή και παρονομαστή ακέραιους αριθμούς αλλά ο παρονομαστής να μην είναι μηδέν (π.χ. $\frac{4}{1}, -\frac{2}{5}$). Όταν

πληκτρολογήσαμε στο “Geogebra” $y = 3x - 12$ πήραμε μία συγκεκριμένη *ευθεία* που τέμνει τους δύο άξονες σε δύο συγκεκριμένα σημεία το (4, 0) και το (0, -12). Όπως διαισθανόμαστε από **2 σημεία** διέρχεται **μία μόνο ευθεία** που θα έχει κάποιον συγκεκριμένο **τύπο** όπως τον προηγούμενο. Ας ενώσουμε τώρα τα κομμάτια του «παζλ» με έναν μεγάλο πίνακα:

Πίνακας 3

<p><i>Αλγεβρικός Τύπος – εξίσωση ευθείας</i></p> <p>ή <i>αλγεβρική εξίσωση της σχέσης των δύο μεταβαλλόμενων ποσοτήτων x και y</i></p>	<p><i>Γραφική παράσταση ευθείας</i></p>	<p><i>Πίνακας τιμών δύο σημείων της ευθείας</i></p>						
<p>$y = 3x - 12$</p>		<table border="1" data-bbox="1054 1675 1422 1753"> <tr> <td>x</td> <td>4</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>y</td> <td>0</td> <td>-12</td> </tr> </table>	x	4	0	y	0	-12
x	4	0						
y	0	-12						

Η Γραφική παράσταση, πίνακας τιμών, είναι η έκφραση της ίδιας έννοιας, της **συνάρτησης με τύπο $y = 3x - 12$** . Αν γνωρίζουμε πώς να κάνουμε την γραφική παράσταση μιας τέτοιας **συνάρτησης**, βλέπουμε το σημείο που τέμνει τον οριζόντιο άξονα και επομένως έχουμε τη λύση του προβλήματος.

Παρατηρήσεις

1. Τις τρεις διαφορετικές αναπαραστάσεις του πίνακα 3 (αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση, πίνακας τιμών) ενοποιήσαμε με τον όρο **συνάρτηση**. Ας δούμε ένα πιο απλό παράδειγμα συνάρτησης από αυτήν που χρησιμοποιήσαμε, για να κατανοήσουμε την έννοια της **συνάρτησης**. Γι' αυτό θα επανέλθουμε στον πίνακα 1, ιδιαίτερα στην 3^η γραμμή του:

ο τριπλάσιος του αριθμού	$3x$
--------------------------	------

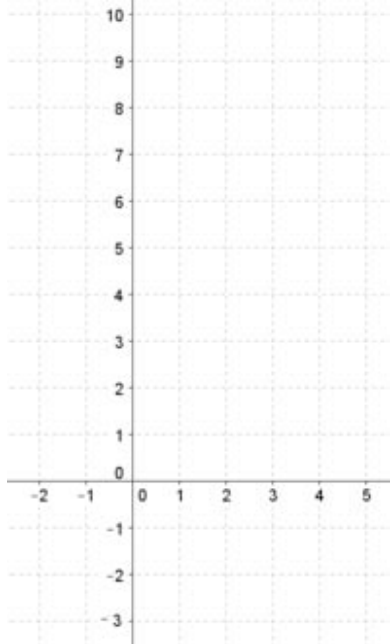
Ερωτήματα για την κατανόηση ενός παραδείγματος συνάρτησης $y = 3x$:

- α) Μπορείτε να συμπληρώσετε τα κενά του παρακάτω πίνακα;

ένας αριθμός	x	-1	0	1	2	3
ο τριπλάσιος του αριθμού	y					

- β) Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό και y τον τριπλάσιό του, μπορείτε να γράψετε μία σχέση ισότητας που να συνδέει τους δύο αριθμούς; $y = \dots\dots\dots$

Από την συμπλήρωση των κελιών και τον τύπο $y = 3x$ που διαισθάνομαι ότι καταλήξατε, καταλαβαίνουμε τη σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεγεθών που μεταβάλλονται. Μόνο που ο τριπλάσιος y (**εξαρτημένη μεταβλητή**) εξαρτάται από τον αριθμό x (**ανεξάρτητη μεταβλητή**) με τη σχέση: $y = 3x$.



- γ) Για κάθε διαφορετικό αριθμό πόσους τριπλάσιους αριθμούς μπορεί να έχουμε; ή εναλλακτικά: στον πίνακα τιμών που συμπληρώσατε σε κάθε τιμή της πάνω γραμμής (αριθμός x) πόσες τιμές στην κάτω γραμμή (ο τριπλάσιος του αριθμού y) αντιστοιχούν;

.....
Κάθε τέτοια σχέση μεταξύ δύο μεταβλητών ποσοτήτων όπου σε κάθε τιμή της μιας μεταβλητής (αριθμός x) αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης μεταβλητής (ο τριπλάσιος του αριθμού y) λέμε ότι η δεύτερη μεταβλητή εκφράζεται ως **συνάρτηση της πρώτης**.

- δ) Αν χρησιμοποιήσουμε ένα σύστημα αξόνων μπορείτε να παραστήσετε κάθε (διατεταγμένο) ζευγάρι τιμών του παραπάνω πίνακα με ένα σημείο; Προσπαθήστε στο διπλανό σχήμα με τους άξονες να παραστήσετε τα ζεύγη αριθμών με σημεία.

2. Υπάρχουν ευθείες που **δεν είναι συναρτήσεις**; Μπορείτε να παραστήσετε κάθε (διατεταγμένο) ζευγάρι τιμών του παρακάτω πίνακα με ένα σημείο; Ενώστε τα σημεία στο ίδιο ή άλλο σχήμα

και παρατηρήστε την μορφή της ευθείας που θα προκύψει.

x	3	3	3	3	3
y	-1	0	1	2	3

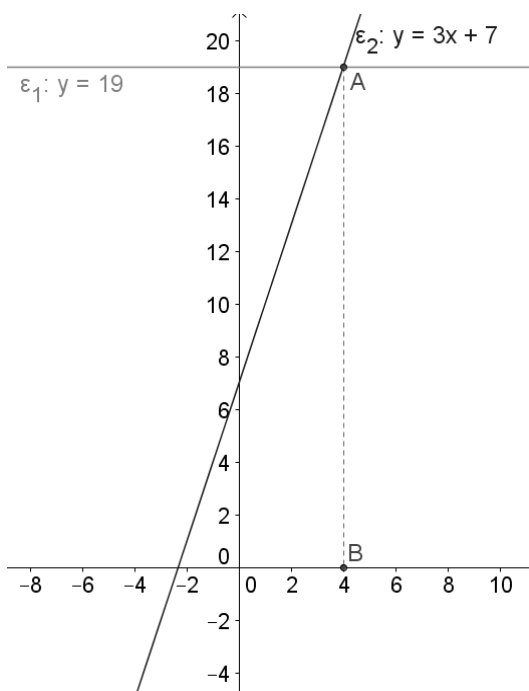
Η ευθεία αυτή είναι στον οριζόντιο άξονα $x'x$ και στον κατακόρυφο άξονα $y'y$. Αν προεκτείνουμε την ευθεία προς τις δύο διευθύνσεις (προς τα πάνω

και προς τα κάτω) μπορούμε να πούμε ότι η ευθεία έχει εξίσωση $x = \underline{\hspace{1cm}}$; Εδώ υπάρχουν **τουλάχιστον δύο** αριθμοί που αντιστοιχίζεται ο 3 και μία τέτοια σχέση που εκφράζεται με αυτή την γραφική παράσταση **δεν είναι συνάρτηση**.

3. Στο επόμενο κεφάλαιο θα μάθουμε και άλλες συναρτήσεις πιο σύνθετες που δεν είναι ευθείες, όπως την τετραγωνική συνάρτηση $y = x^2$ και χρειάζονται περισσότερα από δύο σημεία για να κατασκευάσουμε τη γραφική τους παράσταση. Παραμένει όμως το κοινό χαρακτηριστικό αυτών των συναρτήσεων με τις ευθείες (εκτός από τις κατακόρυφες), της μονοσήμαντης αντιστοίχισης: Σε κάθε τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x αντιστοιχεί **μία μόνο τιμή** της εξαρτημένης μεταβλητής y .

Έχοντας «εξοπλιστεί» με καινούρια θεωρητικά και χρήσιμα εργαλεία όπως αυτό της συνάρτησης, ας δούμε πως μπορούμε να ορίσουμε διαφορετικές συναρτήσεις για να λύσουμε το ίδιο πρόβλημα.

Γ' τρόπος: Ας δούμε ξανά την εξίσωση του προβλήματος $3x + 7 = 19$. Αντί να την μετασχηματίσουμε όπως κάναμε με τον προηγούμενο τρόπο, γράφουμε στο πεδίο εισαγωγής του



“Geogebra” διαδοχικά **τους τύπους των συναρτήσεων - ευθειών**:

$\varepsilon_1: y = 19, \varepsilon_2: y = 3x + 7.$

Ερωτήματα

1) Μπορείτε να βρείτε τις **συντεταγμένες του σημείου τομής A** των δύο ευθειών;

$A(\dots, \dots)$

2) Έχουν τα σημεία A και B ίσες τετμημένες;

.....
 Αν ναι, γιατί;

3) Τι είναι ο αριθμός 4 - λύση του προβλήματος- για τα σημεία A και B;

4) Μπορείτε και εσείς να κατασκευάσετε τις

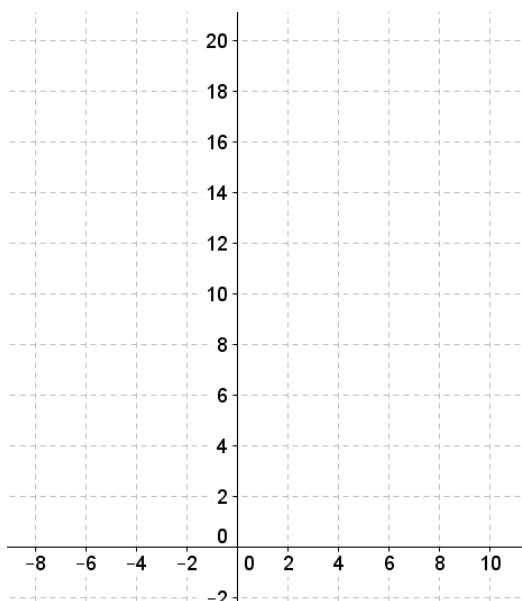
γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών συμπληρώνοντας πρώτα τους παρακάτω πίνακες και χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα;

Πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = 19$

x	1	2
y		

Πίνακας τιμών της συνάρτησης $y = 3x + 7$

x	0	1
y		



Παρατηρήστε ότι σε όλα τα σχήματα οι άξονες είναι ευθείες κάθετες και η μονάδα μέτρησης βρίσκεται στην ίδια απόσταση από το 0. Φυσικά ο 2 θα βρίσκεται στην διπλάσια απόσταση από το 0, ο 3 στην τριπλάσια κ.ο.κ. Σχηματίζουν όπως λέμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και κάθε σημείο του επιπέδου αντιστοιχεί σε ένα (διατεταγμένο) ζευγάρι αριθμών. Για παράδειγμα, διαφορετικό σημείο είναι το $A(1,2)$ από το $B(2,1)$. Στις σελίδες 88, 89 του βιβλίου της α' γυμνασίου μπορείτε να ανατρέξετε για να θυμηθείτε πώς παριστάνουμε σημεία στο επίπεδο.

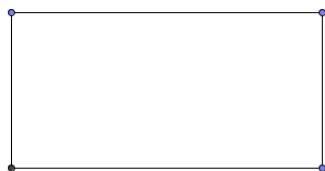
ΑΣΚΗΣΕΙΣ - ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ



1. Ένα κοτόπουλο για να ψηθεί στους 180° χρειάζεται, για κάθε κιλό που ζυγίζει, χρόνο 40 min (λεπτά της ώρας) και 20 min επιπλέον. Πόσο ζυγίζει ένα κοτόπουλο που χρειάστηκε για να ψηθεί σε χρόνο:

- α) 1h και 40min (1 ώρα και 40 λεπτά)
- β) $2\frac{1}{2}$ h (2,5 ώρες)

Απαντήσεις α) 2kg, β) 3,25kg



2. Το μήκος ενός ορθογωνίου είναι διπλάσιο του πλάτους του.

Μπορείτε να υπολογίσετε το μήκος του, αν η περίμετρος του ορθογωνίου είναι 18cm;

Απάντηση: 6cm

3. Σε 4 χρόνια ο Γιάννης θα έχει τριπλάσια ηλικία από αυτήν που έχει σήμερα. Ποια είναι η σημερινή ηλικία του Γιάννη;

Απάντηση: 2 χρονών

4. Πριν 2 χρόνια η Ελένη ήταν 5 φορές μεγαλύτερη από την μικρότερη αδερφή της που είναι σήμερα 4 χρονών. Πόσων χρονών είναι η Ελένη;

Απάντηση: 12 χρονών

5. Ένας χωρικός έχει πρόβατα και κότες. Ένα απόγευμα πριν οδηγήσει τα ζώα να κοιμηθούν, μέτρησε 20 κεφάλια και 66 πόδια. Πόσες είναι οι κότες και πόσα τα πρόβατα;

Απάντηση: 13

6. α) Ποιος είναι ο όγκος ενός κυβικού δοχείου ακμής 5cm;
 β) Αν προσθέσουμε σε έναν αριθμό, τον τριπλάσιό του, τον τριπλάσιο του αριθμού που είναι κατά 1 μεγαλύτερός του, και τον τριπλάσιο του αριθμού που είναι κατά 4 μεγαλύτερός του, παίρνουμε τον αριθμό που προκύπτει ως όγκος από το κυβικό δοχείο της προηγούμενης ερώτησης. Ποιος είναι ο αριθμός;

Απαντήσεις: $V = 5^3 \text{ cm}^3 = 125 \text{ cm}^3$, $x = 11$

γ) Μπορείτε να εντυπωσιάσετε τους φίλους σας ρωτώντας τους να υπολογίσουν το αποτέλεσμα: «Τρεις έντεκα, τρεις δώδεκα, τρεις δεκαπέντε κι' έντεκα».

Τη συσχέτιση του τελευταίου ερωτήματος με τα δύο προηγούμενα, αφήνουμε να την αποκαλύψετε μόνοι σας.

Σημείωση: Αγαπητοί συνάδελφοι, αν υπάρχει χώρος στο περιοδικό μπορείτε να βάλετε και αυτό το τελευταίο ερώτημα. Έκανα επίσης μία μικρή διόρθωση σ' ένα κενό που προέκυψε από το Equation Editor, στην 1^η γραμμή της 4^{ης} σελίδας.