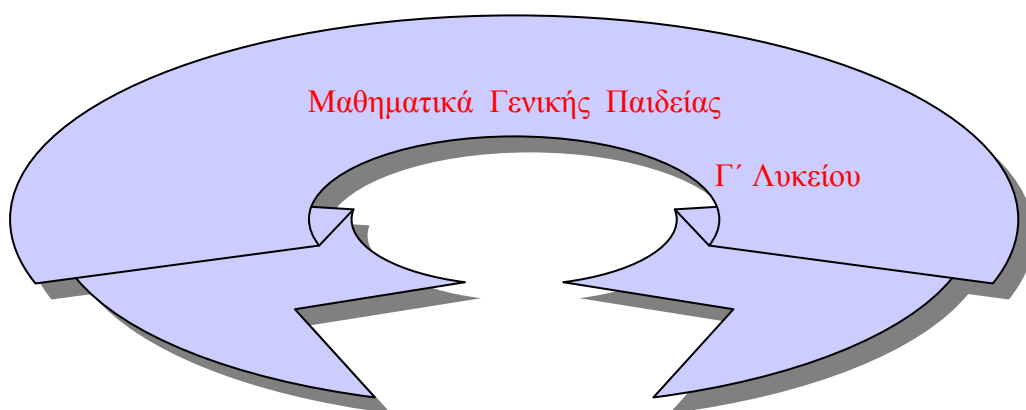


Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ



ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ**ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x+9}, \quad g(x) = \frac{x-2}{e^x-1}, \quad h(x) = \frac{2x-5}{x^2+1}, \quad k(x) = \frac{e^x+1}{\sqrt{x-2}}$$

2) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}, \quad g(x) = \sqrt{e^x-1}, \quad h(x) = \frac{2x}{\sqrt{9-x^2}}, \quad k(x) = \frac{\sqrt{e^x-1}}{\sqrt{2-x}}$$

3) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + \ln(x-2), \quad g(x) = \sqrt{\ln x - 1}, \quad h(x) = \frac{\ln(e^x-1)}{\sqrt{9-x^2}}, \quad k(x) = \frac{2x}{\ln^2 x - \ln x}$$

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1-e^x}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii) Αποδείξτε ότι $f(x) + f(-x) = \sin x$, για κάθε $x \in A_f$.

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-1}{\ln x}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

ii) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x^2 - 1$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

ii) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f , διέρχεται από τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(-1, -1)$.

iii) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

iv) Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της f , βρίσκεται κάτω από τον άξονα των x ;

Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

7) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2e^x - 2 \ln x) = 2e$$

$$\text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 5x + 2}{x^3 - x} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) + 2}{x+2} = 1$$

$$\text{vi)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6} = -5$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x} = 2$$

$$\text{vii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - e^x - x + 1}{e^x - 1} = -1$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{3x^2 - 12} = -1$$

$$\text{viii)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3 - 2x^2 - 7x - 2}{x^2 + x} = -6$$

8) Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{iv)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2x}}{x^2 - x} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{2 - \sqrt{3x} - 2} = -\frac{8}{3}$$

$$\text{v)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-3x} + 2x}{x^2 - 1} = -\frac{5}{8}$$

$$\text{vi)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x$. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9} = \frac{1}{2} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{2 - \sqrt{x+4}} = 12 \quad \text{iii)} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2) - f(2)}{h} = 1$$

10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 1$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $x_0 = \frac{1}{2}$ και διέρχεται από το σημείο $A(-1, -6)$.

i) Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ii) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -5$, να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{2x^2 + x - 1} = -\frac{7}{6}$.

11) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^2 - 3x - 2}{x - 1} & , x \neq 1 \\ 7 & , x = 1 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{3x - 2}}{x - 1} & , x > 1 \\ 2\alpha + 1 & , x = 1 \end{cases}$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

13) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x - \ln x^2}{x^2 - 4} & , 0 < x \neq 2 \\ \frac{1}{4} & , x = 2 \end{cases}$

i) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

14) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x-1)}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ , ώστε το σημείο $A(2, \kappa)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

iii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)f(x)}{x^2-4} = \frac{1}{4}$.

iv) Να αποδείξετε ότι $f(e^{2x-x^2} + 1) = x - 1$.

15) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x-1)}{x^2-3x+2} = -2 \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(x^2-x)}{2-\sqrt{x+3}} = -8 \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-2f(x)}{f^2(x)-3f(x)+2} = 2$$

Παράγωγος συνάρτησης

16) Στη πρώτη στήλη είναι ο τύπος της συνάρτησης f . Με την προϋπόθεση ότι ορίζεται να βρείτε τη παράγωγό της. (η απάντηση βρίσκεται στη δεύτερη στήλη).

Στήλη Α	Στήλη Β
1) $f(x) = x^3 - 2x + 4$	1) $f'(x) = 3x^2 - 2$
2) $f(x) = x^{-3} + x$	2) $f'(x) = -3x^{-4} + 1$
3) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$	3) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
4) $f(x) = x^{\frac{2}{3}} + \sqrt[5]{x}$	4) $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$
5) $f(x) = \eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$	5) $f'(x) = \sigma\upsilon\nu x + 2\eta\mu x$

6) $f(x) = \sqrt{x} - x^3 - \sigma\upsilon\nu x$	6) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 3x^2 + \eta\mu x$
7) $f(x) = xe^x + \ln x$	7) $f'(x) = e^x + xe^x + \frac{1}{x}$
8) $f(x) = x^2\eta\mu x - 5$	8) $f'(x) = 2x\eta\mu x + x^2\sigma\upsilon\nu x$
9) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$	9) $f'(x) = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2}$
10) $f(x) = \frac{e^x}{x + 1}$	10) $f'(x) = \frac{xe^x}{(x + 1)^2}$
11) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x + 1}$	11) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(e^x + 1) - e^x \ln x}{(e^x + 1)^2}$
12) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{e^x}$	12) $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{e^x}$
13) $f(x) = \frac{xe^x}{\ln x}$	13) $f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)\ln x - e^x}{\ln^2 x}$
14) $f(x) = \frac{x - \ln x}{x + \ln x}$	14) $f'(x) = \frac{2\ln x - 2}{(x + \ln x)^2}$
15) $f(x) = \frac{2\eta\mu x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}$	15) $f'(x) = \frac{2}{(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2}$
16) $f(x) = 2^x x^3$	16) $f'(x) = 2^x x^2 (x \ln 2 + 3)$
17) $f(x) = 2^x + 3^x$	17) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3$
18) $f(x) = \varepsilon\phi x - \sigma\phi x$	18) $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x \eta\mu^2 x}$
19) $f(x) = (1 - e^x)(\ln x + 1)$	19) $f'(x) = -e^x(\ln x + 1) + \frac{1}{x}(1 - e^x)$
20) $f(x) = xe^x \ln x$	20) $f'(x) = e^x(\ln x + 1 + x \ln x)$

21) $f(x) = x^{-3} + e^{-x}$	21) $f'(x) = -3x^{-4} - e^{-x}$
22) $f(x) = (x^3 + 1)^5$	22) $f'(x) = 15x^2(x^3 + 1)^4$
23) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$	23) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$
24) $f(x) = \ln(x^4 + 1)$	24) $f'(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1}$
25) $f(x) = \eta\mu(x^3 + \frac{\pi}{6})$	25) $f'(x) = 3x^2 \sigma\upsilon\nu(x^3 + \frac{\pi}{6})$
26) $f(x) = \eta\mu^5 x$	26) $f'(x) = 5\eta\mu^4 x \sigma\upsilon\nu x$
27) $f(x) = \eta\mu x^5$	27) $f'(x) = 5x^4 \sigma\upsilon\nu x^5$
28) $f(x) = e^{x^2+1}$	28) $f'(x) = 2xe^{x^2+1}$
29) $f(x) = \ln(\ln x)$	29) $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$
30) $f(x) = \ln(\sigma\upsilon\nu x)$	30) $f'(x) = -\varepsilon\phi x$
31) $f(x) = \eta\mu(\ln x)$	31) $f'(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu(\ln x)}{x}$
32) $f(x) = \sqrt{\ln x}$	32) $f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$
33) $f(x) = e^{\sqrt{x}+1}$	33) $f'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{2\sqrt{x}}$
34) $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}}$	34) $f'(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
35) $f(x) = \eta\mu^2 \sqrt{x}$	35) $f'(x) = \frac{\eta\mu 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

17) Αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $g(x) = f(\eta\mu x)$ **ii)** $h(x) = f(1 + 3^{\sqrt{x}})$ **iii)** $\phi(x) = e^{f(x)} + \eta\mu(f(x))$

18) i) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$, όπου f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ και $f'(6) = 8$, να αποδείξετε ότι $h'(3) = 32$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$, όπου f, g συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. Αν είναι $g(2) = 3$, $g'(2) = 4$ και $f'(3) = 5$, να αποδείξετε ότι $h'(2) = 20$.

iii) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f'(2) = 5$. Αν είναι $g(x) = f(x^3 + 3x + 2)$, να αποδείξετε ότι $g'(0) = 15$.

19) i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 $f(x) + 2f'(x) + f''(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 $f''(x) - f(x) + 2 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 $(f''(x))^2 + (2f(x))^2 = 4e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

iv) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι:
 $f(f'(x)) + f(x) = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

20) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 $(1-x)f''(x) + f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

21) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

22) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \eta\mu(\ln x)$, $x > 0$. Να αποδείξετε ότι:
 $x^2 f''(x) - x f'(x) + 2f(x) = 0$ για κάθε $x > 0$.

23) i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} \eta\mu 2x$, $x \in R$. Να αποδείξετε ότι:
 $f''(x) + 2f'(x) + 5f(x) = 0$ για κάθε $x \in R$.

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$, $x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{4}$, $\kappa \in Z$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $f'(x) + f^2(x) + 1 = 0$

β) Αν $f''(x) = 0$, τότε $f(x) = 0$.

24) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\lambda x} + x$, $x \in R$. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ ώστε να ισχύει $f''(x) - 2f'(x) + 2 = 0$ για κάθε $x \in R$.

25) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x + a)e^{x+\beta}$, $x \in R$ και α, β τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(\kappa)$, $f'(\kappa)$, $f''(\kappa)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό κ .

Εξίσωση εφαπτομένης

26) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

i) $f(x) = 2\sqrt{x}$ στο σημείο $A(4, f(4))$.

ii) $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$ στο σημείο $A(2, f(2))$.

iii) $f(x) = e^{-x}$ στο σημείο με τεταγμένη e .

iv) $f(x) = x(x^2 + 1)$ στο σημείο με τετμημένη 3 .

27) Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = (x + 2)(x^2 + x)$ στο σημείο με τετμημένη -1 .

28) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + 2$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία

i) έχει συντελεστή διεύθυνσης 2 .

ii) σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45° .

iii) είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $3x + y - 1 = 0$

iv) είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

- 29) i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax + \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = 3x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη ίση με 2.
- ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = -ax^2 + \beta x - 1$, $a, \beta \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα $a, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία με εξίσωση $y = -2x - 1$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(-1, 1)$.
- 30) i) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στη διχοτόμο της γωνίας $x'Oy$.
- ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 5$
- iii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x}(x^2 + 5)$. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f , η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- 31) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f , οι οποίες διέρχονται από το σημείο $A(-1, -3)$.

Μονοτονία συνάρτησης

- 32) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} f(x) = x^2 - 2x + 5 & \text{ii)} f(x) = -x^3 + 3x - 12 & \text{iii)} f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 1 \\ \text{iv)} f(x) = x^3 e^{2x} & \text{v)} f(x) = \frac{\ln x}{x} & \text{vi)} f(x) = e^x (x-1)^2 \quad \text{vii)} f(x) = e^{x^2-4x+3} \end{array}$$

33) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα.

i) $f(x) = x^3 + 2x + 5$ **ii)** $f(x) = -x^3 - 3x - 12$ **iii)** $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{4}{3}x^3 + 1$

iv) $f(x) = e^{x^3+4x+3}$ **v)** $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln x$ **vi)** $f(x) = e^x + (x-1)^3$

vii) $f(x) = \sqrt{x^5 + x}$, $x > 0$ **viii)** $f(x) = 2\eta\mu x - x\sigma\upsilon\nu x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

34) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 4\ln x - 2$, $x > 0$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδείξετε ότι $x^2 - 1 \geq 2\ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

35) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (1-a)x^2 + a(1-x)^2$, $a \in R$

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = a$.

ii) Να βρείτε την τιμή του $a \in R$, για την οποία η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης γίνεται μέγιστη.

36) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x^3 + 2$. Να βρείτε το σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη έχει την ελάχιστη κλίση.

Ρυθμός Μεταβολής

37) Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με εμβαδόν 100 m^2 , να βρείτε εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο.

38) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$. Να βρείτε πότε ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης f γίνεται ελάχιστος και ποιά είναι η ελάχιστη τιμή του.

39) Δίνονται τα σημεία $A(0, x+1)$ και $B(\sqrt{x}, 0)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής

i) της απόστασης των σημείων A και B ως προς x , όταν είναι $x=1$.

ii) του εμβαδού του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων, ως προς x , όταν είναι $x=1$.

- 40) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$ και το σημείο της γραφικής της παράστασης $M(a, f(a))$. Να βρείτε:
- i) Την εξίσωση (ως συνάρτηση του a) της εφαπτομένης της C_f στο M .
 - ii) Τα σημεία τομής A, B της εφαπτομένης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 - iii) Το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OAB , όπου O η αρχή των αξόνων, ως προς a , όταν $a = e$

Θέματα σε όλο το κεφάλαιο

- 41) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x$
- i) Να αποδείξετε ότι $f(x) + f''(x) = 0$
 - ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,1)$.
 - iii) Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , για την οποία ισχύει
- $$\lambda f'\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2. \quad (\text{Θέμα 2001})$$

- 42) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta \mu x}{1 + \sigma \upsilon \nu x}$.

- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{1}{1 + \sigma \upsilon \nu x}$
- iii) Να αποδείξετε $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) + f''(0) = 1$
- iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.
- v) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

43) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f , ώστε η εφαπτομένη σε αυτό να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iii) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής της f για $x = 2$ είναι $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

iv) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x) - \sqrt{3}}{x - 2}$. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2} h(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

44) Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = f(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της g διέρχεται από το σημείο $B(0,2)$.

ii) Να βρείτε την $g'(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $g''(x) = 4x^2 f''(x^2 + 1) + \frac{g'(x)}{x}$, $x \neq 0$.

iv) Αν η γραφική παράσταση της f , έχει στο σημείο A εφαπτομένη παράλληλη προς την ευθεία $2y = x + 5$, να βρεθεί το $g''(0)$.

45) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha e^x - \beta x + 5$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,7)$.

A) Αν η εφαπτομένη της C_f στο A είναι κάθετη στην ευθεία με εξίσωση $y = 1 - x$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β .

B) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 1$

i) Να αποδείξετε ότι $f''(x) - f'(x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα σημείο της γραφικής παράστασης της f , στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - 2e^x}{x^2 - 25} = -\frac{1}{10}$.

- 46) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^x)$
- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
 - ii) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.
 - iii) Να αποδείξετε ότι $(f'(x))^2 + e^x f''(x) = 0$.
- 47) Ένα κατάστημα ανοίγει στις 8 π.μ. και παραμένει ανοικτό συνεχώς μέχρι τις 6 μ.μ. Οι εισπράξεις του καταστήματος σε εκατοντάδες € δίνονται από τις τιμές της συνάρτησης $f(t) = \frac{20t}{t^2 + 36}$, όπου ο χρόνος t μετριέται σε ώρες και η μέτρηση αρχίζει αμέσως με το άνοιγμα του καταστήματος.
- i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - ii) Να αποδείξετε ότι οι εισπράξεις του καταστήματος στις 10 π.μ. είναι 100 €.
 - iii) Να βρείτε ποια ώρα το κατάστημα πραγματοποιεί τις περισσότερες εισπράξεις και πόσες είναι αυτές.
 - iv) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής των εισπράξεων του καταστήματος στις 4 μ.μ.
- 48) Η τιμή ενός προϊόντος είναι $\left(1000 - \frac{x}{4}\right)$ € ανά τόνο. Το κόστος παραγωγής είναι 500 € ανά τόνο και τα έξοδα ασφάλισης του προϊόντος είναι συνολικά 12000 € για όλη τη παραγωγή.
- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση που δίνει το κέρδος από την πώληση x τόνων του προϊόντος έχει τύπο $P(x) = -\frac{x^2}{4} + 500x - 12000$.
 - ii) Να βρείτε την παραγωγή που πρέπει να έχουμε, ώστε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους να είναι 200 ευρώ.
 - iii) Να βρείτε την ποσότητα που πρέπει να παράγουμε, ώστε να επιτύχουμε το μέγιστο κέρδος.
 - iv) Να βρείτε το μέγιστο κέρδος.

49) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \ln \frac{1}{x}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

iii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 135° .

iv) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

v) Να αποδείξετε ότι:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \ln x}{x - 1} = 0 \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f''(x) + 2 \ln x + x}{x^2 - 9} = \frac{1}{6}.$$

vi) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(e, f(e))$.

50) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο R , για την οποία ισχύει $2f(x) - f(2-x) = x^3 - 1$ για κάθε $x \in R$.

i) Να αποδείξετε ότι $f'(1) = 1$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

iii) Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)}{h} \qquad \beta) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(1+h) - 1}{h}$$

51) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} + 3$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 5}{x^2 - 36} = \frac{1}{48}$.

iii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(6, f(6))$.

v) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η εφαπτομένη με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ - ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ

- $A_f = R - \{3\}$ $A_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ $A_f = (2, +\infty)$
1) $A_g = R^*$ **2)** $A_g = [0, +\infty)$ **3)** $A_g = [e, +\infty)$
 $A_h = R$ $A_h = (-3, 3)$ $A_h = (0, 3)$
 $A_k = (2, +\infty)$ $A_k = [0, 2)$ $A_k = (0, 1) \cup (1, e) \cup (e, +\infty)$
- 4)** $A_f = R^*$
- 5) i)** $A_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ **ii)** Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in A_f$.
- 6) i)** $D_f = R^*$, **iii)** $M(\sqrt{e}, 0)$, $N(-\sqrt{e}, 0)$, **iv)** $x \in (-\sqrt{e}, 0) \cup (0, \sqrt{e})$
- 12)** $\alpha = -5/4$
- 13) i)** $\frac{\ln 2}{4}$, **ii)** όχι
- 14) i)** $D_f = (1, e+1]$, **ii)** $\kappa = 1$.
- 17) i)** $g'(x) = f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x$ **ii)** $h'(x) = f'(1+3^{\sqrt{x}})\frac{3^{\sqrt{x}}\ln 3}{2\sqrt{x}}$ **iii)** $\phi'(x) = f'(x)e^{f(x)} + \sigma\upsilon\nu(f(x))f'(x)$
- 24)** $\lambda=0$ ή $\lambda=2$.
- 26) i)** $y = \frac{1}{2}x + 2$ **ii)** $y = 13x - 19$ **iii)** $y = -ex$ **iv)** $y = 28x - 54$
- 27)** $\frac{3\pi}{4}$
- 28) i)** $y = 2x - \frac{5}{2}$ **ii)** $y = x$ **iii)** $y = -3x$ **iv)** $y = \frac{3}{2}$
- 29) i)** $\alpha = 5$, $\beta = 7$. **ii)** $\alpha = 0$, $\beta = -2$.
- 30) i)** $y = -x + \frac{3}{e^2}$
- 31)** $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$, $\varepsilon_2 : y = -6x - 9$
- 32) i)** γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$, έχει ελάχιστο το $f(1) = 4$.
- ii)** γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$, έχει ελάχιστο το $f(-1) = -14$ και μέγιστο το $f(1) = -10$.
- iii)** γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2, 2]$, γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -2]$ και $[2, +\infty)$, έχει ελάχιστο το $f(2)$ και μέγιστο το $f(-2)$.
- vi)** γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-\frac{3}{2}, +\infty)$, έχει μέγιστο το $f(-\frac{3}{2}) = -\frac{27}{8e^3}$.

- v)** γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, e]$, έχει μέγιστο το $f(e) = \frac{1}{e}$.
- vi)** γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, έχει μέγιστο το $f(-1) = \frac{4}{e}$ και ελάχιστο το $f(1) = 0$.
- vii)** γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[2, +\infty)$, έχει ελάχιστο το $f(2) = e^{-1}$
- 33)** Η συνάρτηση (ii) είναι γνησίως φθίνουσα, οι άλλες είναι γνησίως αύξουσες
- 34)** ελάχιστο στο 1.
- 35)** ii) $\alpha = 1/2$
- 36)** στο $(0, 2)$
- 37)** Το τετράγωνο
- 38)** A $(-1, 3)$
- 39)** i) $d'(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ii) $E'(1) = 1$
- 40)** i) $y = (\ln a + 1)x - a$ ii) $A(\frac{a}{\ln a + 1}, 0)$, $B(0, -a)$ iii) $\frac{3e}{8}$
- 41)** ii) $y = x + 1$, iii) $\lambda = -4$
- 42)** i) $x \neq 2k\pi \pm \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. iv) $y = x + 1 - \frac{\pi}{2}$, v) $E = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)^2$
- 43)** i) $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, ii) όχι
- 44)** iv) $g''(0) = 1$.
- 45)** ελάχιστο στο $x_0 = -\ln 2$
- 46)** i) $(-\infty, 0)$
- 47)** i) $t \in (0, 10)$, ii) $f(2) = 1$, iii) $t = 6$ άρα στις 2 μ.μ., iv) $f'(8)$
- 48)** ii) $x = 600$ τόνοι, iii) $x = 1000$ τόνοι, iv) $P(1000)$
- 49)** i) $(0, +\infty)$, iii) $f'(1) = -1$, iv) μέγιστο στο $x_0 = \frac{1}{\sqrt{e}}$, vi) $y = -3ex + 2e^2$
- 50)** ii) $y = x - 1$, iii) $\dots = f'(1) = 1$, $\dots = f''(1) = 6$
- 51)** iii) γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$, iv) $y = \frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$, v) $E = \frac{49}{2}$ τ. μ.