ΘΕΜΑ 2 (1003)

Ένα κουτί περιέχει άσπρες, μαύρες, κόκκινες και πράσινες μπάλες. Οι άσπρες είναι 5, οι μαύρες είναι 9, ενώ οι κόκκινες και οι πράσινες μαζί είναι 16. Επιλέγουμε μια μπάλα στην τύχη. Δίνονται τα παρακάτω ενδεχόμενα:

Α: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΑΣΠΡΗ

Κ: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΚΟΚΚΙΝΗ

Π: η μπάλα που επιλέγουμε είναι ΠΡΑΣΙΝΗ

α) Χρησιμοποιώντας τα *Α*, *Κ* και *Π* να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων τα ενδεχόμενα:

i) Η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι άσπρη,

ii) Η μπάλα που επιλέγουμε είναι κόκκινη ή πράσινη.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης καθενός από τα δύο ενδεχόμενα του ερωτήματος (α). (Μονάδες 12)

Λύση: Όλες οι μπάλες είναι $\overset{A}{5}+\overset{M}{9}+\overset{K+\Pi}{16}=30$

α) i) $E_1 =$ " η μπάλα που επιλέγουμε δεν είναι Α "

οπότε $E_1 = A'$ ✓

ii) $E_2 =$ " η μπάλα είναι Κ ή Π "

οπότε $E_2 = K \cup \Pi$ ✓

β) Ζητάμε $P(E_1) = ;$ $P(E_2) = ;$

$P(E_1) = \dfrac{\text{πλήθος ευνοϊκών}}{\text{πλήθος δυνατών}} = \dfrac{N(E_1)}{N(\Omega)} = \dfrac{30-5}{30} = \dfrac{25}{30} = \dfrac{5}{6}$ ✓

$P(E_2) = \dfrac{\text{πληθ. ευν.}}{\text{πληθ. δυν.}} = \dfrac{N(E_2)}{N(\Omega)} = \dfrac{16}{30} = \dfrac{8}{15}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1005)

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{1+x}{x-1}$ και $B=\dfrac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις *Α, Β* πρέπει:

$x \neq 1$ *και* $x \neq 0$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A=B$. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq 1}$ και $x^2-x \neq 0 \Leftrightarrow x\cdot(x-1) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x \neq 0$ και $x-1 \neq 0)$

$\Leftrightarrow (x \neq 0$ και $x \neq 1)$

Τελικά $(x \neq 0$ και $x \neq 1)$ ✓

β) $A=B \Leftrightarrow \dfrac{1+x}{x-1} = \dfrac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x-1} = \dfrac{2}{x\cdot(x-1)}$

$\Leftrightarrow \dfrac{x\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)} = \dfrac{2}{x\cdot(x-1)} \Leftrightarrow x\cdot(x+1) = 2 \Leftrightarrow$

$x^2+x-2=0$, $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=-2$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=$

$= 1^2-4\cdot1\cdot(-2) = 1+8 = 9$

άρα $x_{1,2} = \dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2\cdot1} = \dfrac{-1\pm3}{2} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{cases}$

η ρίζα $x_1 = 1$ απορρίπτεται

" " $x_2 = -2$ δεκτή. ✓

ΘΕΜΑ 2 (1007)

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης: $-2x^2+10x=12$. (Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$ (Μονάδες 10)

Λύση:

α) $-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow 0=2x^2-10x+12 \Leftrightarrow$

$0=x^2-5x+6$, $\left.\begin{array}{l} P=6=2\cdot 3 \\ S=5=2+3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1=2 \\ x_2=3 \end{pmatrix}$

β) Περιορισμός : $x-2 \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq 2}$

Έχουμε λοιπόν $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow$

$-2x^2+10x-12=0 \leftarrow$ την λύσαμε στο (α).

άρα $x_1=2$ απορρίπτεται και $x_2=3$ δεκτή ✓

Οπότε το ζητούμενο x είναι το 3.

ΘΕΜΑ 2 (1009)

Δίνεται η παράσταση: $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι

i) για κάθε $x \geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$. (Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$$ (Μονάδες 13)

Λύση:

α) i) $x \geqslant 2$ άρα $3x \geqslant 6 \Leftrightarrow 3x-6 \geqslant 0$

οπότε $|3x-6| = 3x-6$.

Τελικά $A = |3x-6|+2 = 3x-6+2 = 3x-4$ ✓

ii) $x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0$

οπότε $|3x-6| = -3x+6$

Τελικά $A = |3x-6|+2 = -3x+6+2 = -3x+8$ ✓

β) $$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{(3x)^2-4^2}{3x-4} = \frac{\cancel{(3x-4)}\cdot(3x+4)}{\cancel{(3x-4)}} =$$

$= 3x+4$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1015)

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$.

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο *ν-οστός* όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$, και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_1 + (2-1)\omega = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 + \omega = 0$

$\alpha_4 = 4 \Rightarrow \alpha_1 + (4-1)\omega = 4 \Leftrightarrow \alpha_1 + 3\omega = 4$

αφαιρούμε κατά μέλη $\Rightarrow 3\omega - \omega = 4 - 0 \Leftrightarrow$

$2\omega = 4 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 2}$ ✓

οπότε και $\alpha_1 + \omega = 0 \Rightarrow \alpha_1 + 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_1 = -2}$ ✓

β) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = -2 + (\nu-1)\cdot 2 = -2 + 2\nu - 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_\nu = 2\nu - 4$ ✓

$\alpha_\nu = 98 \Rightarrow 2\nu - 4 = 98 \Leftrightarrow 2\nu = 98 + 4 \Leftrightarrow$

$2\nu = 102 \Leftrightarrow \nu = \frac{102}{2} \Leftrightarrow \boxed{\nu = 51}$

άρα ο 51ος είναι ίσος με 98. ✓

ΘΕΜΑ 2 (1024)

Δίνεται η συνάρτηση *f(x) = αx+β*, όπου *α, β* πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης *f* διέρχεται από τα σημεία *A(1, 6), B(-1, 4)*, να βρείτε τις τιμές των *α, β*. (Μονάδες 13)

β) Αν *α=1* και *β=5*, να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης *f* με τους άξονες x΄x και y΄y. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Οι συντεταγμένες των A και B σημείων επαληθεύουν την εξίσωση $y = \alpha x + \beta$.

Άρα $\begin{pmatrix} 6 = \alpha \cdot 1 + \beta \\ 4 = \alpha \cdot (-1) + \beta \end{pmatrix}$ ← σύστημα με 2 αγνώστους τους α, β.

$\left.\begin{array}{r} \alpha + \beta = 6 \\ -\alpha + \beta = 4 \end{array}\right\}$ Πρόσθεση κατά μέλη ⇒

$2\beta = 10 \Leftrightarrow \boxed{\beta = 5}$ ✓ άρα $\alpha + 5 = 6 \Leftrightarrow \boxed{\alpha = 1}$ ✓

β) $f(x) = x + 5$ ή $y = x + 5$.

- για $x = 0 \Rightarrow y = 5$ οπότε το $M(0, 5) \in y'y$
- για $y = 0 \Rightarrow 0 = x + 5 \Leftrightarrow x = -5$ οπότε το $N(-5, 0) \in x'x$

Άρα M και N τα ζητούμενα σημεία.

ΘΕΜΑ 2 (1032)

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό *x* ώστε οι αριθμοί: *x*, *2x+1*, *5x+4*, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε το λόγο *λ* της παραπάνω γεωμετρικής προόδου, όταν:

i) *x=1*

ii) *x= -1*

(Μονάδες 12)

Λύση:

α) εφόσον είναι διαδοχικοί γεωμ. πρ. τότε

$(2x+1)^2 = x\cdot(5x+4) \Leftrightarrow 4x^2+\cancel{4x}+1 = 5x^2+\cancel{4x} \Leftrightarrow$

$1 = 5x^2-4x^2 \Leftrightarrow 1 = x^2 \Leftrightarrow \boxed{x=1 \text{ ή } x=-1}$

- για $x=1$ έχουμε $1, 3, 9$ ως διαδ. ορ. γ.π. και το $\lambda = 3$

- για $x=-1$ έχουμε $-1, -1, -1$ εδώ το $\lambda = 1$.

σταθερή ακολουθία, όλοι οι όροι είναι ίσοι με -1.

β) i) $\lambda = 3$ λόγω του (α).

ii) $\lambda = 1$ " " (α).

ΘΕΜΑ 2 (1039)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-1| \geq 5$. (Μονάδες 8)

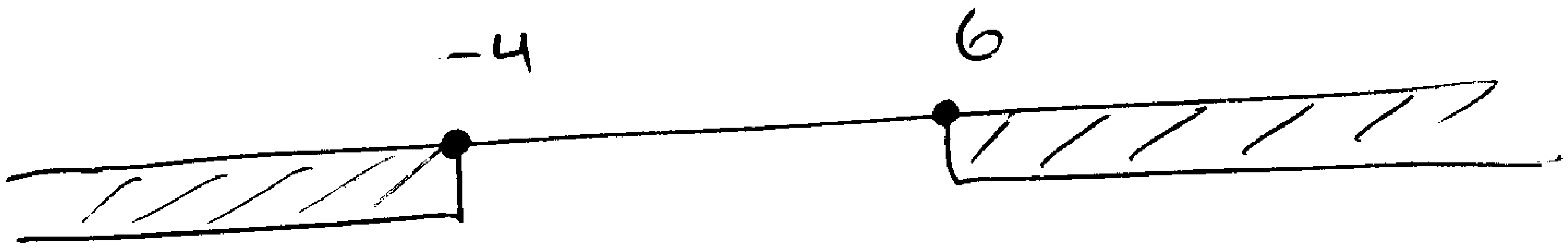
β) Να βρείτε τους αριθμούς x που απέχουν από το 5 απόσταση μικρότερη του 3. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των (α) και (β). (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $|x-1| \geq 5 \Leftrightarrow (x-1 \geq 5$ ή $-x+1 \geq 5) \Leftrightarrow$

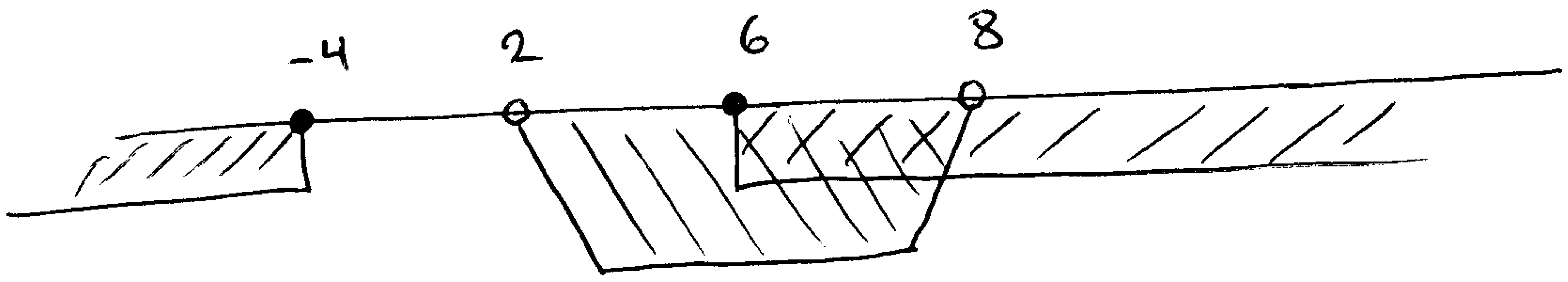
$(x \geq 6$ ή $1-5 \geq x) \Leftrightarrow (x \geq 6$ ή $x \leq -4)$



β) δηλ. ζητάμε την λύση της $|x-5| < 3 \Leftrightarrow$

$-3 < x-5 < 3 \Leftrightarrow -3+5 < x < 3+5 \Leftrightarrow \boxed{2 < x < 8}$

γ)



άρα συναληθεύουν στο διάστημα $[6, 8)$

δηλ. $x \in [6, 8)$.

ΘΕΜΑ 2 (1042)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\begin{cases}2x+4, & x<0\\ x-1, & x\geq 0\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι *f(-1)= f(3)* (Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του x∈ℝ, ώστε: *f(x)=0* (Μονάδες 12)

Λύση:

α) $f(-1) = 2\cdot(-1)+4 = -2+4 = 2$ ✓

$f(3) = 3-1 = 2$ ✓

$\Rightarrow f(-1)=f(3)$

β) $2x+4=0 \Leftrightarrow 2x=-4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=-2}$ δεκτή.

$x-1=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$ δεκτή.

άρα $f(x)=0$ όταν $x=-2$ ή $x=1$ ✓