ΘΕΜΑ 2 (1050)

α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό *x* ώστε οι αριθμοί : $x+2,\ (x+1)^2,\ 3x+2$ με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου, όταν

i) $x=1$

ii) $x=-1$.

(Μονάδες 12)

Λύση:

α) πρέπει $2(x+1)^2=(x+2)+(3x+2) \Leftrightarrow$

$2(x^2+2x+1) = x+2+3x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+\underbrace{4x}+\cancel{2}\underbrace{-x}-\cancel{2}\underbrace{-3x}-2=0 \Leftrightarrow 2x^2-2=0 \Leftrightarrow$

$2\cdot(x^2-1)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow \boxed{x=\pm 1}$

β) i) για $x=1$ έχουμε 3, 4, 5 άρα $\boxed{\omega=1}$

ii) για $x=-1$ » 1, 0, −1 άρα $\boxed{\omega=-1}$

ΘΕΜΑ 2 (1055)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=1$ και για $\lambda=-1$. (Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

λύση:

α) για $\lambda=1$ έχουμε: $(1^2-1)\cdot x = (1+1)\cdot(1+2) \Leftrightarrow$

$0\cdot x = 2\cdot 3 \Leftrightarrow 0x = 6 \Rightarrow$ ΑΔΥΝΑΤΗ. ✓

για $\lambda=-1$ έχουμε $((-1)^2-1)x = (-1+1)\cdot(-1+2) \Leftrightarrow$

$0\cdot x = 0\cdot 1 \Leftrightarrow 0x=0 \Rightarrow$ ΑΟΡΙΣΤΗ ✓

β) $(\lambda^2-1)x = (\lambda+1)\cdot(\lambda+2) \Leftrightarrow x = \dfrac{(\lambda+1)\cdot(\lambda+2)}{\lambda^2-1}$

εφόσον $\lambda^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \neq 1 \Leftrightarrow \boxed{\lambda \neq \pm 1}$ ✓

άρα υπάρχει μοναδική λύση όταν $\lambda \in (\mathbb{R} - \{-1, 1\})$

ΘΕΜΑ 2 (1057)

Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της.

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της *ν-οστής* σειράς.

(Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; **(Μονάδες 8)**

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

Λύση:

10η: $120 + 9\cdot 20 = 120 + 180 = 300$ καθ.

9η

8η

⋮

3η: $120 + 2\cdot 20 = 120 + 40 = 160$ καθ.

2η: $120 + 20 = 140$ καθ.

1η: 120 καθίσματα

Έχουμε μια αρ. πρ. με $\alpha_1 = 120$ και $\omega = 20$.

α) $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega \Rightarrow \alpha_\nu = 120 + (\nu-1)\cdot 20 \Leftrightarrow$

$\alpha_\nu = 120 + \nu\cdot 20 - 20 \Leftrightarrow \boxed{\alpha_\nu = 100 + 20\nu}$ ✓

β) $\alpha_{10} = 100 + 20\cdot 10 = 100 + 200 = 300 \Rightarrow$

$\boxed{\alpha_{10} = 300}$ ✓ καθίσματα

γ) $S_{10} = \frac{10}{2}\left(2\cdot 120 + (10-1)\cdot 20\right) = 5\cdot\left(240 + 9\cdot 20\right) \Rightarrow$

$S_{10} = 5\cdot(240 + 180) = 5\cdot 420 = 2100$ καθίσματα ✓

ΘΕΜΑ 2 (1062)

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow$

$-1+3<y<1+3 \Leftrightarrow \boxed{2<y<4}$ ✓

β) είναι γνωστό ότι $E=(\text{μήκος})\times(\text{πλάτος})$

δηλ $E=x\cdot y$

$\left.\begin{array}{l}1<x<3\\2<y<4\end{array}\right\} \Rightarrow$ Πολ/ζουμε κατά μέλη και

προκύπτει $1\cdot 2<xy<3\cdot 4 \Leftrightarrow \boxed{2<E<12}$ ✓

→ σημείωση: Πολ/ζουμε κατά μέλη επειδή τα πάντα στις ανισώσεις <u>είναι θετικά.</u> και η φορά διατηρείται.

ΘΕΜΑ 2 (1064)

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$.

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $\alpha_1 = 19$, $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$

$\alpha_{10} = \alpha_1 + (10-1)\cdot\omega \Rightarrow \alpha_{10} = 19 + 9\omega$

$\alpha_6 = \alpha_1 + (6-1)\cdot\omega \Rightarrow \alpha_6 = 19 + 5\cdot\omega$

Αφαιρούμε κατά μέλη $\Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha_{10} - \alpha_6 = 4\omega \Rightarrow 24 = 4\omega \Leftrightarrow \boxed{\omega = 6}$

β) $\alpha_{20} = \alpha_1 + (20-1)\cdot\omega = 19 + 19\cdot 6 = 19\cdot(1+6) \Rightarrow$

$\alpha_{20} = 19\cdot 7 \Rightarrow \boxed{\alpha_{20} = 133}$ ✓

γ) $S_{20} = \frac{20}{2}\left[2\cdot 19 + (19-1)\cdot 6\right] \Rightarrow$

$S_{20} = 10\cdot(38 + 17\cdot 6) \Rightarrow$

$S_{20} = 10\cdot 140 \Rightarrow \boxed{S_{20} = 1400}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1067)

Δίνεται η παράσταση: $K = \dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-3x-2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $2x^2-3x-2 = \alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

$\alpha=2$, $\beta=-3$, $\gamma=-2$, $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma = 9-4\cdot2\cdot(-2) =$

$= 9+16 = 25 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \dfrac{3\pm\sqrt{25}}{2\cdot2} \Rightarrow$

$x_{1,2} = \dfrac{3\pm5}{4} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

άρα $2x^2-3x-2 = 2\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$. ✓

β) πρέπει $2x^2-3x-2 \neq 0 \Leftrightarrow 2\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right) \neq 0$

$\Leftrightarrow \left(x\neq 2 \text{ και } x \neq -\frac{1}{2}\right)$ ✓

γ) $K = \dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2} = \dfrac{(x-2)^2}{2\cdot(x-2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)} = \dfrac{x-2}{2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow$

$K = \dfrac{x-2}{2x+1}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1070)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν:

$$\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \text{ και } \frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4}$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=3\beta$ και $\delta=5\gamma$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$$ (Μονάδες 15)

Λύση:

α) $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow \alpha+\beta=4\beta \Leftrightarrow \alpha=4\beta-\beta \Leftrightarrow \boxed{\alpha=3\beta}$ ✓

$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow 4\gamma+\gamma=\delta \Leftrightarrow \boxed{5\gamma=\delta}$ ✓

β) $\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{\gamma\cdot(\alpha+\beta)}{\beta\cdot(\delta-\gamma)}$ (1)

από την $\alpha=3\beta \Rightarrow \alpha+\beta=3\beta+\beta \Rightarrow \boxed{\alpha+\beta=4\beta}$

» » $5\gamma=\delta \Rightarrow 5\gamma-\gamma=\delta-\gamma \Rightarrow \boxed{4\gamma=\delta-\gamma}$

Οπότε η (1) γίνεται $\Pi=\frac{\cancel{\gamma}\cdot\cancel{4\beta}}{\cancel{\beta}\cdot\cancel{4\gamma}}=1$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1074)

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει : $|y-3|<1$. (Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1<x<3$ και $2<y<4$, τότε να αποδείξετε ότι: $6<\Pi<14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $|y-3|<1 \Leftrightarrow -1<y-3<1 \Leftrightarrow$

$-1+3<y<1+3 \Leftrightarrow \boxed{2<y<4}$ ✓

β) $\Pi = x+x+y+y = 2(x+y)$

Θέλουμε ν.δ.ο. $6<2(x+y)<14$ (διαιρούμε με 2)

αρκεί $\boxed{3<x+y<7}$

$$\left.\begin{aligned} 1<x<3 \\ 2<y<4 \end{aligned}\right\} \text{Πρόσθεση κατά μέλη} \Rightarrow \boxed{3<x+y<7}$$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1077)

α) Να λύσετε την ανίσωση: |x-5|<4. (Μονάδες 10)

β) Αν κάποιος αριθμός *α* επαληθεύει την παραπάνω ανίσωση, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$$

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) $|x-5|<4 \Leftrightarrow -4<x-5<4 \Leftrightarrow -4+5<x<4+5$

$\Leftrightarrow \boxed{1<x<9}$ ✓

β) αφού α επαληθεύει την $|x-5|<4 \Rightarrow$

$1<\alpha<9$ (παρατηρούμε ότι α θετικός).

αντιστρέφουμε τα μέλη της $1<\alpha<9$ και

προκύπτει $1>\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{9}$ ή $\frac{1}{9}<\frac{1}{\alpha}<1$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1080)

Έστω *x*, *y* πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει: $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2$

α) Να αποδείξετε ότι: $y=2x$. (Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης;

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$$ (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2\cdot(x-4y) \Leftrightarrow$

$4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 4x+2x=8y-5y \Leftrightarrow$

$6x=3y \Leftrightarrow \boxed{2x=y}$ ✓

β) $A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$ (αντικαθιστώ το y με 2x)

$$A=\frac{2x^2+3\cdot(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=$$

$$=\frac{16x^2}{2x^2} \Rightarrow \boxed{A=8}$$

ΘΕΜΑ 2 (1082)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2 - x - 6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι: $f(2)+f(4)=0$. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) $x^2 - x - 6 \neq 0$. Παραγοντοποιούμε το τριώνυμο.

$\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = -6,\ \Delta = (-1)^2 - 4\cdot 1\cdot(-6) = 1 + 24 = 25$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{2} = 3 \\ x_2 = \frac{1-5}{2} = -2 \end{cases}$$

άρα $x^2 - x - 6 = 1\cdot(x-3)\cdot(x+2) = (x-3)\cdot(x+2)$.

και πρέπει $(x-3)\cdot(x+2) \neq 0 \Rightarrow (x \neq 3 \text{ ή } x \neq -2)$

άρα $D_f = (\mathbb{R} - \{-2, 3\})$

β) $f(2) + f(4) = \dfrac{2+2}{2^2 - 2 - 6} + \dfrac{4+2}{4^2 - 4 - 6} = \dfrac{4}{-4} + \dfrac{6}{6} =$

$= -1 + 1 = 0$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1086)

Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $Γ=x+8$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $(α_ν)$.

α) Να βρείτε τη τιμή του x. (Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου $(α_ν)$,

i) να υπολογίσετε τη διαφορά $ω$. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

Λύση:

α) $1,\ x+4,\ x+8$ διαδ. όροι αρ. πρ. $\Rightarrow$

$2(x+4) = 1+(x+8) \Leftrightarrow 2x+\cancel{8} = 1+x+\cancel{8} \Leftrightarrow$

$2x-x = 1 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$

β) για $x=1$ έχουμε $1,\ 5,\ 9$ διαδ. όροι αρ. πρ

i) $ω = 9-5 = 4 \Rightarrow \boxed{ω=4}$ ✓

ii) $α_{20} = α_1 + (20-1)ω = 1 + 19\cdot 4 \Rightarrow$

$\boxed{α_{20} = 77}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1088)

α) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

β) Αν οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να προσδιορίσετε τον αριθμό x. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθεί ο αριθμός x ώστε οι αριθμοί $4 - x$, x, 2 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής και γεωμετρικής προόδου. (Μονάδες 7)

Λύση:

α) $4-x, x, 2$ διαδ. όροι αρ. πρ. $\Rightarrow 2x = 4-x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x+x = 4+2 \Leftrightarrow 3x = 6 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$ ✓ $\rightarrow \underline{2, 2, 2}$ (διαδ. αρ. πρ. με $\omega = 0$)

β) $4-x, x, 2$ διαδ. όροι. γεωμ. πρ. $\Rightarrow x^2 = 2\cdot(4-x) \Leftrightarrow$

$x^2 = 8-2x \Leftrightarrow \boxed{x^2+2x-8=0}$ ή $\boxed{x^2-(-2)x+(-8)=0}$

$P = -8 = (-4)\cdot 2$ και $S = -2 = +2-4$

άρα $\boxed{x_1 = 2}$ ✓ και $\boxed{x_2 = -4}$ ✓ (οι ρίζες της εξίσωσης)

για $x=2$ η τριάδα είναι: $2, 2, 2$ με $\lambda = 1$

για $x=-4$ η τριάδα είναι: $8, -4, 2$ με $\lambda = -\frac{1}{2}$

γ) Δηλαδή ζητάμε την κοινή λύση των εξισώσεων στα ερωτήματα (α) κ (β) δηλ. $\boxed{x=2}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1089)

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$,

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$$

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) $5 < x \Leftrightarrow 0 < x-5$ οπότε $|x-5| = x-5$ ✓

$x < 10 \Leftrightarrow x-10 < 0$ οπότε $|x-10| = -x+10$ ✓

✓

β) $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10} = \frac{x-5}{x-5} + \frac{-(x-10)}{x-10} = 1+(-1)=0$

ΘΕΜΑ 2 (1090)

Δίνεται η συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x^2-1}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού α, ώστε το σημείο $M(\alpha,\frac{1}{8})$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)\neq 0 \Leftrightarrow (x\neq 1 \text{ και } x\neq -1)$

άρα $D_f = \left(\mathbb{R}-\{-1,+1\}\right)$

β) εφόσον $M \in C_f \Rightarrow \dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{a^2-1} \Leftrightarrow$

$a^2-1=8 \Leftrightarrow a^2=9 \Leftrightarrow \left(\boxed{a=3} \text{ ή } \boxed{a=-3}\right)$