ΘΕΜΑ 2 (1091)

Δίνεται η παράσταση: $A=|x-1|-|x-2|$

α) Για $1<x<2$, να δείξετε ότι: $A=2x-3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x<1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

Λύση:

α) $1<x \Leftrightarrow 0<x-1 \Leftrightarrow \boxed{x-1>0}$ άρα $|x-1|=x-1$

$x<2 \Leftrightarrow \boxed{x-2<0}$ άρα $|x-2|=-(x-2)$

Οπότε: $A=|x-1|-|x-2|=(x-1)-[-(x-2)]=x-1+x-2 \Rightarrow$

$\boxed{A=2x-3}$ ✓

β) για $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$ δηλ. $|x-1|=-x+1$

εφόσον $x-1<0$ τότε και $x-2<0$ δηλ. $|x-2|=-x+2$

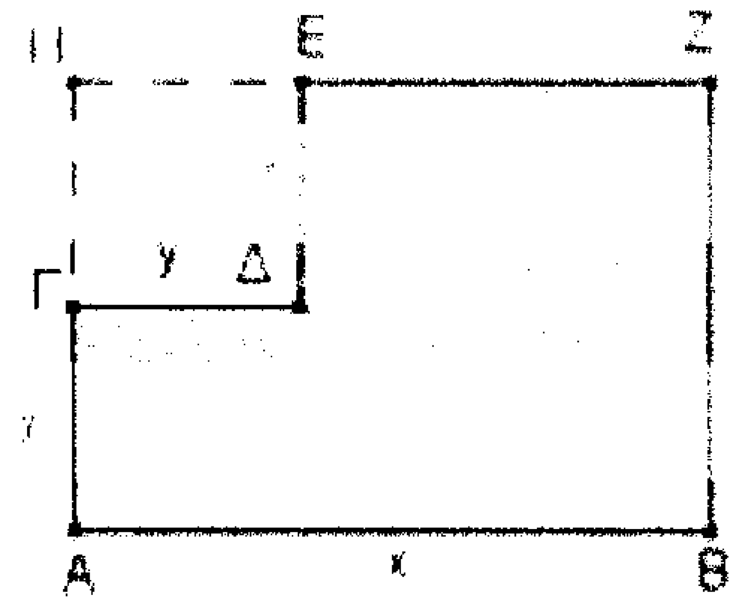
Οπότε: $A=|x-1|-|x-2|=-x+1-(-x+2)=$

$=-x+1+x-2 \Rightarrow \boxed{A=-1}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1092)

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5<x<8$ και $1<y<2$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος. (Μονάδες 15)

Λύση:

α) Περίμετρος του ΑΒΖΕΔΓ $=$ ΑΒ $+$ ΒΖ $+$ ΖΕ $+$ ΕΔ $+$ ΔΓ $+$ ΓΑ

ΑΒ $= x$, ΒΖ $= 2y$, ΖΕ $= x-y$, ΕΔ $= y$, ΔΓ $= y$, ΓΑ $= y$

άρα περίμετρος $= x + 2y + x - \cancel{y} + \cancel{y} + y + y \Rightarrow$

$\boxed{\Pi = 2x + 4y}$ ✓

β) $5 < x < 8 \Leftrightarrow 10 < 2x < 16$
$1 < y < 2 \Leftrightarrow 4 < 4y < 8$ } Πρόσθεση κατά

μέλη $\Rightarrow 14 < 2x + 4y < 24 \Leftrightarrow \boxed{14 < \Pi < 24}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1093)

Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

Λύση:

α) i) $A+B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{(5+\sqrt{5})\cdot(5-\sqrt{5})}=\frac{10}{5^2-5}=\frac{10}{20}$

δηλ. $\boxed{A+B=\frac{1}{2}}$ ✓

ii) $A\cdot B=\frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5-\sqrt{5}}=\frac{1}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})}=\frac{1}{20}\Rightarrow$

$\boxed{A\cdot B=\frac{1}{20}}$ ✓

β) $x^2-S\cdot x+P=0$, $S=x_1+x_2=A+B=\frac{1}{2}$

$P=x_1\cdot x_2=A\cdot B=\frac{1}{20}$

άρα η ζητούμενη είναι $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}=0$

ή $\boxed{20x^2-10x+1=0}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1096)

Η απόσταση *y (σε χιλιόμετρα)* ενός αυτοκινήτου από μια πόλη Α, μετά από *x λεπτά*, δίνεται από τη σχέση: $y=35+0,8x$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) για $x=25 \Rightarrow y=35+0,8\cdot 25 = 35+\frac{8}{10}\cdot 25 =$

$= 35+\frac{20\cancel{0}}{1\cancel{0}} = 35+20=55 \Rightarrow \boxed{y=55}$ (km)

β) το 75 είναι το y δηλ. για $y=75 \Rightarrow$

$35+0,8x=75 \Leftrightarrow 0,8x=75-35 \Leftrightarrow 0,8x=40$

$\frac{8}{10}x=40 \Leftrightarrow 8x=400 \Leftrightarrow x=\frac{400}{8} \Leftrightarrow$

$\boxed{x=50}$ (min.)

ΘΕΜΑ 2 (1097)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+\lambda x-5$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Αν μια ρίζα του τριωνύμου είναι ο αριθμός $x_0=1$, να προσδιορίσετε την τιμή του λ.

(Μονάδες 12)

β) Για $\lambda=3$, να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $x_0=1$ ρίζα $\Rightarrow 2\cdot 1^2+\lambda\cdot 1-5=0 \Leftrightarrow 2+\lambda-5=0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda=3}$ ✓

β) $2x^2+3x-5 = \alpha\cdot(x-\rho_1)\cdot(x-\rho_2)$

$S=\rho_1+\rho_2=-\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \rho_1+\rho_2=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_0+\rho_2=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow$

$1+\rho_2=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \rho_2=-\frac{3}{2}-1 \Leftrightarrow \boxed{\rho_2=-\frac{5}{2}}$

οπότε $2x^2+3x-5 = 2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1100)

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ (1), με παράμετρο $\beta > 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = 2\beta$ και $x_2 = \frac{\beta}{2}$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) $2x^2 - 5\beta x + 2\beta^2 = 0$ ή $x^2 - \frac{5\beta}{2}x + \beta^2 = 0$, $(x^2 - Sx + P = 0)$

$S = x_1 + x_2 = 2\beta + \frac{\beta}{2} = \frac{4\beta + \beta}{2} = \frac{5\beta}{2}$ ✓

$P = x_1 \cdot x_2 = 2\beta \cdot \frac{\beta}{2} = \beta^2$ ✓

$\Rightarrow x_1, x_2$ ρίζες.

β) αρκεί $x_1 \cdot x_2 = \beta^2$ που ισχύει από το (α) ερώτημα.

ΘΕΜΑ 2 (1101)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2-2\beta x+(\beta^2-4)=0$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1=\beta-2$ και $x_2=\beta+2$

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

(Μονάδες 13)

Λύση: $x^2-\underline{2\beta}x+\underline{(\beta^2-4)}=0$, $(x^2-S\cdot x+P=0)$

α) $S=x_1+x_2=(\beta-2)+(\beta+2)=\beta-2+\beta+2=\underline{2\beta}$

$P=x_1\cdot x_2=(\beta-2)\cdot(\beta+2)=\underline{\beta^2-4}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x_1, x_2 ρίζες της (1).

β) αρκεί $x_1+x_2=2\beta$ που ισχύει λόγω (α).

ΘΕΜΑ 2 (1102)

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω και οι πιθανότητες:

$$P(A)=\frac{3}{4},\ P(A-B)=\frac{5}{8} \text{ και } P(B)=\frac{1}{4}.$$

α) Να υπολογίσετε την $P(A\cap B)$ (Μονάδες 9)

β) i) Να παραστήσετε με διάγραμμα Venn και να γράψετε στη γλώσσα των συνόλων το ενδεχόμενο: «Α ή Β». (Μονάδες 7)

ii) Να υπολογίσετε την πιθανότητα πραγματοποίησης του παραπάνω ενδεχομένου.

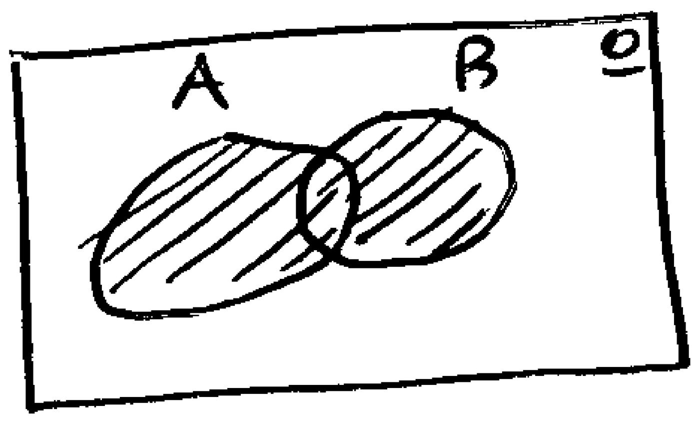
(Μονάδες 9)

Λύση:

α) από το τύπο 5 σελ. 34 του σχολικού βιβλίου έχουμε: $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B) \Leftrightarrow$

$$\frac{5}{8}=\frac{3}{4}-P(A\cap B) \Leftrightarrow P(A\cap B)=\overset{2}{\frac{3}{4}}-\overset{1}{\frac{5}{8}}=\frac{6-5}{8}=\frac{1}{8} \checkmark$$

β) i) "Α ή Β" $\longrightarrow$ $(A\cup B)$



ii) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (τύπος 3 σελ. 33)

$$P(A\cup B)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{4}{4}-\frac{1}{8}=1-\frac{1}{8}=\frac{8-1}{8}=\frac{7}{8} \checkmark$$

ΘΕΜΑ 2 (1273)

Δίνονται δύο τμήματα με μήκη *x* και *y*, για τα οποία ισχύουν: $|x-3|\leq 2$ και $|y-6|\leq 4$.

α) Να δείξετε ότι: $1\leq x\leq 5$ και $2\leq y\leq 10$. (Μονάδες 12)

β) Να βρεθεί η μικρότερη και η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y

(Μονάδες 13)

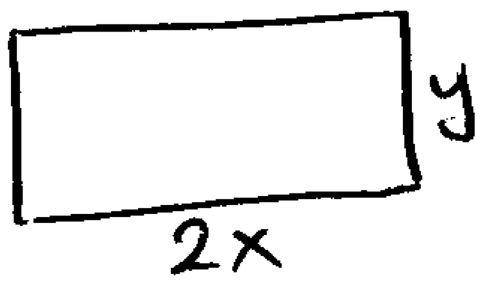
Λύση:

α) $|x-3| \leq 2 \iff -2 \leq x-3 \leq 2 \iff$

$-2+3 \leq x \leq 2+3 \iff \boxed{1 \leq x \leq 5}$ ✓ (1)

$|y-6| \leq 4 \iff -4 \leq y-6 \leq 4 \iff -4+6 \leq y \leq 4+6$

$\iff \boxed{2 \leq y \leq 10}$ ✓ (2)

β) 

$\Pi = 2x+2x+y+y = 4x+2y$

$$\left.\begin{array}{l} (1) \Rightarrow \quad 4 \leq 4x \leq 20 \\ (2) \Rightarrow \quad 4 \leq 2y \leq 20 \end{array}\right\} \text{Προσθέτου κατά μέλη} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 8 \leq 4x+2y \leq 40 \Rightarrow \boxed{8 \leq \Pi \leq 40}$ ✓

μικρότερη τιμή = 8 , μεγαλ. τιμή = 40 ✓

ΘΕΜΑ 2 (1275)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, x_1 και x_2. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: x_1+x_2, $x_1 \cdot x_2$ και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ (Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\alpha = 2,\ \beta = 5,\ \gamma = -1,\ \Delta = 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 25 + 8 = 33$

$\Delta > 0 \Rightarrow$ υπάρχουν 2 λύσεις άνισες.

β) $x_1 + x_2 = S = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{5}{2}$

$x_1 \cdot x_2 = P = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{-\frac{5}{2}}{-\frac{1}{2}} = 5$

γ) $\rho_1 = \frac{1}{x_1},\ \rho_2 = \frac{1}{x_2}$

η ζητούμενη εξισ.: $\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$, $S = \rho_1 + \rho_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$

$P = \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$

άρα $\boxed{x^2 - 5x - 2 = 0}$

ΘΕΜΑ 2 (1276)

Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού. (Μονάδες 12)

β) Αν $-2<x<3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

Λύση: α) πρέπει $x+2 \neq 0$ και $x-3 \neq 0$

και $x^2+4x+4 \geq 0$ και $x^2-6x+9 \geq 0$.

δηλ. $\boxed{x \neq -2}$ ή $\boxed{x \neq 3}$, από $x^2+4x+4 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ από $x^2-6x+9 \geq 0 \Leftrightarrow$

$(x-3)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Τελικά $x \in (\mathbb{R} - \{-2, 3\})$ ✓

β) έστω $-2 < x < 3$

$$K = \frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3} = \frac{|x+2|}{x+2} - \frac{|x-3|}{x-3} =$$

$$= \frac{x+2}{x+2} - \frac{-(x-3)}{(x-3)} = 1 - (-1) = 2 \Rightarrow \boxed{K=2}$$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1277)

Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2+5x-6<0$ (1) και $x^2-16\leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων.

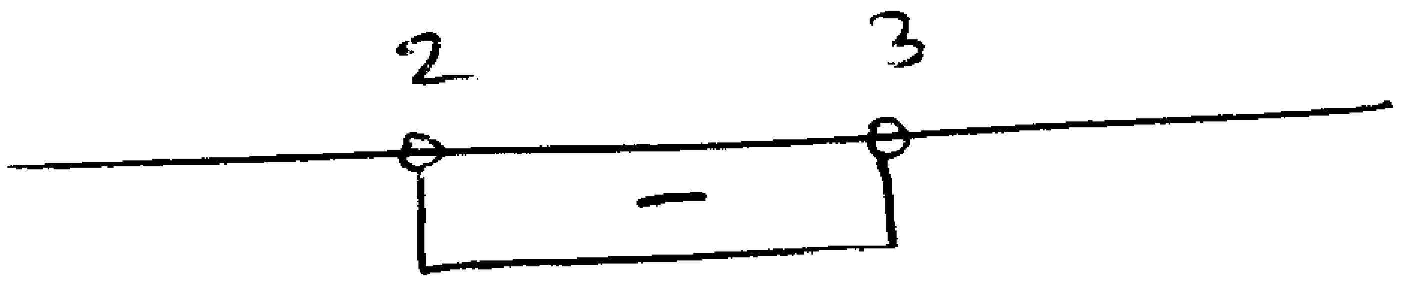
(Μονάδες 13)

Λύση:

α) $-x^2+5x-6<0 \iff x^2-5x+6<0$

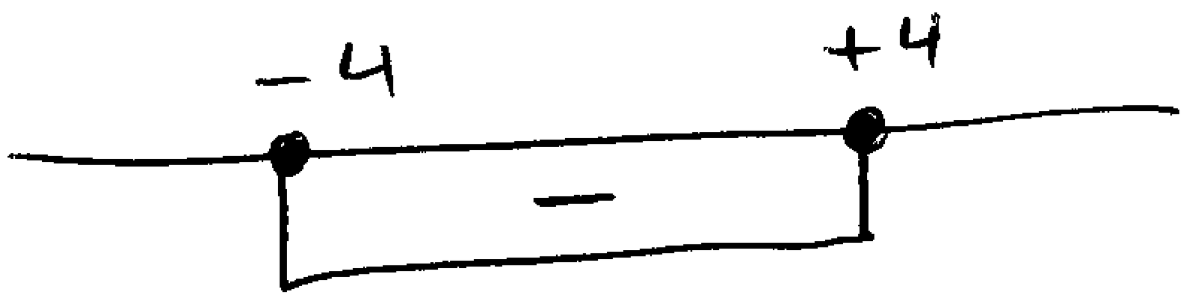
$P=6=2\cdot 3$, $S=5=2+3$ άρα $x_1=2$, $x_2=3$

οπότε $x^2-5x+6<0 \iff (x-2)\cdot(x-3)<0$



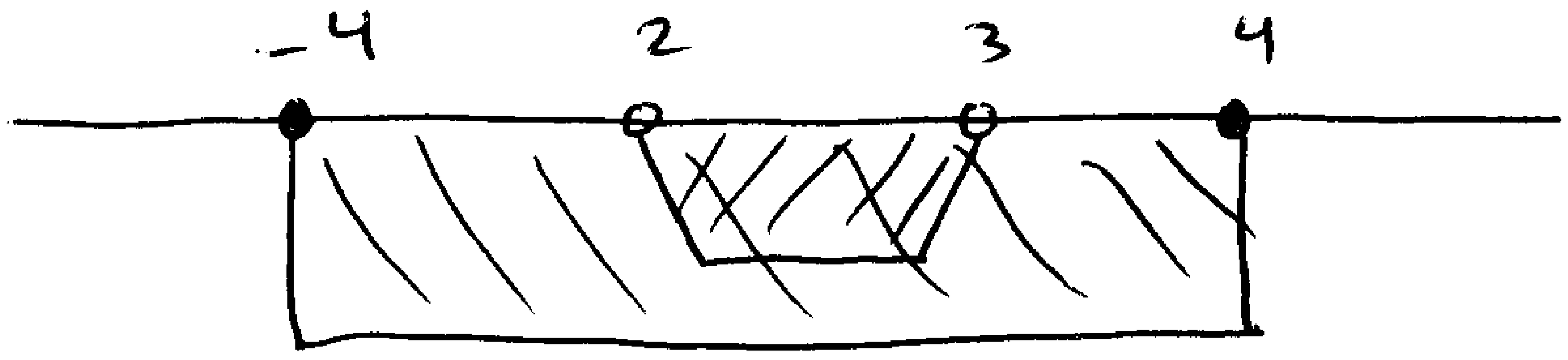
$x\in(2,3)$ ✓

$x^2-16\leq 0 \iff (x-4)(x+4)\leq 0$



$x\in[-4,4]$

β)



άρα $x\in(2,3)$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (1278)

Δίνεται πραγματικός αριθμός x, για τον οποίο ισχύει: $d(x,-2)<1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3<x<-1$. (Μονάδες 10)

β) $x^2+4x+3<0$. (Μονάδες 15)

<u>Λύση:</u> α) $d(x,-2) < 1 \Leftrightarrow |x-(-2)| < 1$

δηλ. $|x+2| < 1$ ή $-1 < x+2 < 1$

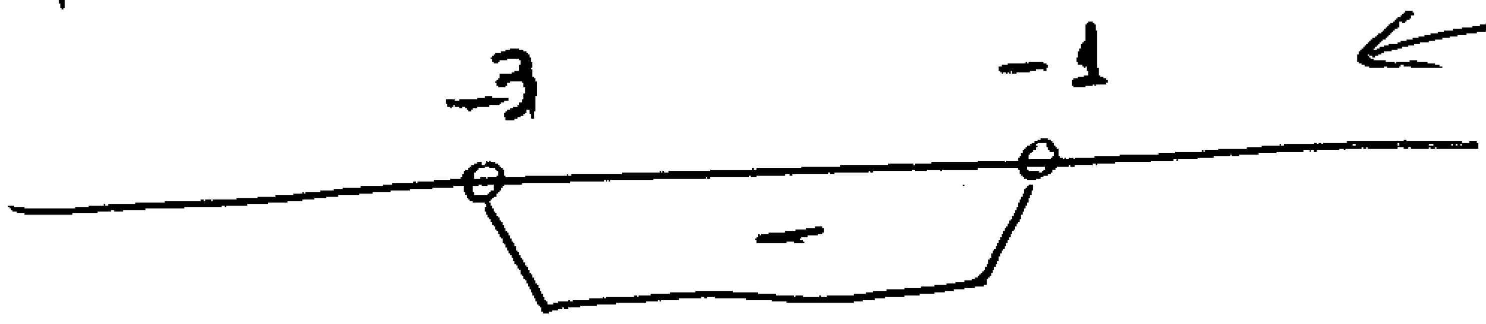
ή $-1-2 < x < 1-2 \Leftrightarrow \boxed{-3 < x < -1}$ ✓

β) $x^2+4x+3 < 0 \Leftrightarrow x^2-\underset{S}{(-4)}\cdot x+\underset{P}{3} < 0$

$P = (-1)\cdot(-3) = 3$

$S = (-1)+(-3) = -4$

άρα $x_1=-1$, $x_2=-3$ οπότε $(x+1)\cdot(x+3)<0$



← αυτό αληθεύει λόγω του (α).

Οπότε αποδείχθη και το (β).