ΘΕΜΑ 2 (474)

Θεωρούμε την ακολουθία *(α_ν)* των θετικών περιττών αριθμών: *1, 3, 5, 7, …*

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η *(α_ν)* είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τον εκατοστό όρο της. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των *ν* πρώτων περιττών θετικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους. (Μονάδες 10)

Λύση: α) παρατηρούμε ότι $a_\nu = a_{\nu-1} + \omega$ όπου $\omega = 2$.

άρα η (α_ν) αρ. πρ.

$a_{100} = a_1 + (100-1)\omega = 1 + 99 \cdot 2 = 1 + 198 = 199$

β) γνωρίζουμε ότι $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2a_1 + (\nu-1)\omega\right]$

άρα $S_\nu = \frac{\nu}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}a_1 + \frac{\nu}{2} \cdot (\nu-1)\omega = \nu \cdot 1 + \frac{\nu}{\cancel{2}} \cdot (\nu-1) \cdot \cancel{2} =$

$= \nu + \nu \cdot (\nu-1) = \nu + \nu^2 - \nu = \nu^2$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (477)

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 7)

β) Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

(Μονάδες 9)

Λύση:

α) $x-3\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\neq 3} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{3\}$

β) Παραγοντοποιούμε τον αριθμητή.

$x^2-5x+6=(x-2)\cdot(x-3)$ (διότι $S=2+3=5$ & $P=2\cdot 3=6$)

οπότε $f(x)=\dfrac{(x-2)\cdot\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}}=x-2$ ✓

γ) Ψάχνουμε τα $A(x,0)$ και $B(0,y)$.

A: $y=(x-2) \Rightarrow 0=x-2 \Rightarrow x=2 \Rightarrow A(2,0)$ ✓

B: $y=x-2 \Rightarrow y=0-2 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow B(0,-2)$ ✓

$A\in x'x$ και $B\in y'y$.

ΘΕΜΑ 2 (478)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό λ, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $S^2 - P - 2 \geq 0$, όπου S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1). (Μονάδες 13)

Λύση: $x^2 - \lambda x + (\lambda^2 + \lambda - 1) = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Συν. $\Delta \geq 0 \Rightarrow \beta^2 - 4\alpha\gamma \geq 0 \Rightarrow (-\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 + \lambda - 1) \geq 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0 \Leftrightarrow -3\lambda^2 - 4\lambda + 4 \geq 0$

$\Leftrightarrow 3\lambda^2 + 4\lambda - 4 \geq 0$

$\Delta' = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4) = 16 + 12 \cdot 4 = 16 + 48 = 64$

$\Delta' = 64 \qquad \lambda_{1,2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 3} = \dfrac{-4 \pm 8}{6}$

$\lambda_1 = \dfrac{-4+8}{6} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ και $\lambda_2 = \dfrac{-4-8}{6} = \dfrac{-12}{6} = -2$

άρα $3\lambda^2 + 4\lambda - 4 \geq 0 \Leftrightarrow 3 \cdot (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \geq 0$

$3 \cdot \left(\lambda - \frac{2}{3}\right) \cdot (\lambda + 2) \geq 0 \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{2}{3}\right) \cdot (\lambda + 2) \geq 0$

	-2		$2/3$	
$+$		$-$		$+$

άρα $\lambda \geq \frac{2}{3}$ ή $\lambda \leq -2$

ΘΕΜΑ 2 (480)

Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε σειρά έχει **α** καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η $7^η$ σειρά έχει 36 καθίσματα και το πλήθος των καθισμάτων του σταδίου είναι 300.

α) Αποτελούν τα καθίσματα του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 12)

β) Πόσα καθίσματα έχει κάθε σειρά; (Μονάδες 13)

Λύση: (α)

10η: $36+3α = a_{10}$

$36+2a$

$36+a$

7η: $\rightarrow 36$ καθίσματα $= a_7$

6η: $36-a$

5η: $36-2a = a_5$

4η: $36-3α = a_4$

3η: $36-4α = a_3$

2η: $36-5α = a_2$

1η: $36-6α = a_1$

$\Rightarrow \boxed{\text{Αρ. Πρ.}}$ διότι

$α_ν = α_{ν-1} + ω$, όπου $ω = α$

$α_ν = α_{ν-1} + α$

π.χ. $a_2 = a_1 + a$

$a_2 = 36-6α+α = 36-5α$ ✓

κ.ο.κ.

(β) αρκεί να βρούμε το α.

$S_{10} = \frac{10}{2}\cdot\left[2\cdot a_1 + (10-1)\cdot a\right]$

$300 = 5\cdot\left(2\cdot(36-6α)+9a\right)$

$60 = 72-12α+9α \Leftrightarrow 3a = 12 \Rightarrow α = \frac{12}{3} \Rightarrow \boxed{α=4}$

άρα $a_1 = 36-24 = 12$

$α_2 = 36-5\cdot4 = 36-20 = 16$

$a_2 = 16+4 = 20$

$a_3 = 20+4 = 24$ κ.ο.κ.

ΘΕΜΑ 2 (481)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$

α) **Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.** (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$ (Μονάδες 9)

Λύση: $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda-1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α) $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda - 1) =$
$= 4\lambda^2 - 16(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4)$
$= 4 \cdot (\lambda - 2)^2$

β) Επειδή $\Delta \geq 0 \Rightarrow \exists$ 2 ρίζες $\in \mathbb{R}$.

γ) $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow S = P \Rightarrow$
$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow -\beta = \gamma \Leftrightarrow 2\lambda = 4(\lambda-1) \Leftrightarrow$
$2\lambda = 4\lambda - 4 \Leftrightarrow 0 = 2\lambda - 4 \Leftrightarrow 4 = 2\lambda \Leftrightarrow$
$\boxed{\lambda = 2}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (483)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12)

β) Αν α, β με α< β είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha\cdot x^2+\beta\cdot x+3=0$ (Μονάδες 13)

Λύση: α) $|2x-1|=3 \Leftrightarrow 2x-1=\pm 3 \Leftrightarrow$

$(2x-1=3$ ή $2x-1=-3) \Leftrightarrow (2x=4$ ή $2x=-2)$

$\Leftrightarrow (x=2$ ή $x=-1)$

β) $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha=-1$ και $\beta=2$. οπότε

$-1\cdot x^2+2\cdot x+3=0 \Leftrightarrow \boxed{x^2-2x-3=0}$

$\Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases}\frac{2+4}{2}=3 \ \checkmark\\ \frac{2-4}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \ \checkmark\end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2 (484)

α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x-5| \le 3$ και $2x^2 - x - 1 \ge 0$ (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος α). (Μονάδες 9)

Λύση: α) $|2x-5| \le 3 \Rightarrow -3 \le 2x-5 \le 3 \Leftrightarrow$

$-3+5 \le 2x \le 3+5 \Leftrightarrow 2 \le 2x \le 8 \Leftrightarrow \boxed{1 \le x \le 4}$

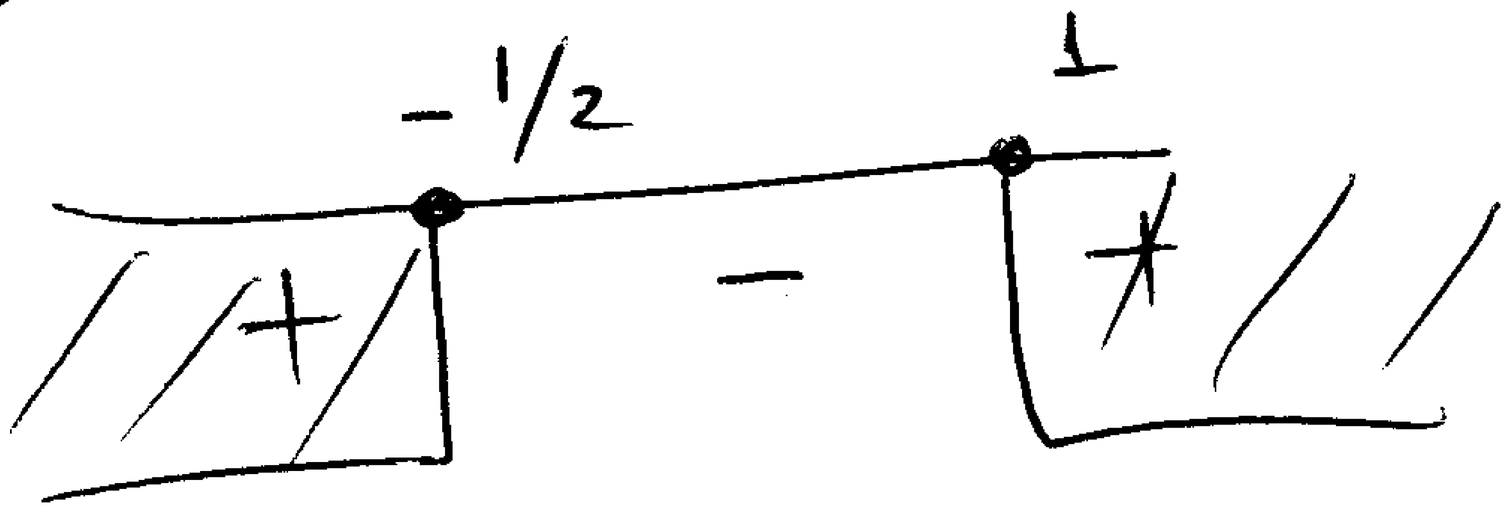
και $2x^2 - x - 1 \ge 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 2} = \dfrac{1 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{-2}{4} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$2 \cdot (x-1) \cdot (x + \frac{1}{2}) \ge 0$.

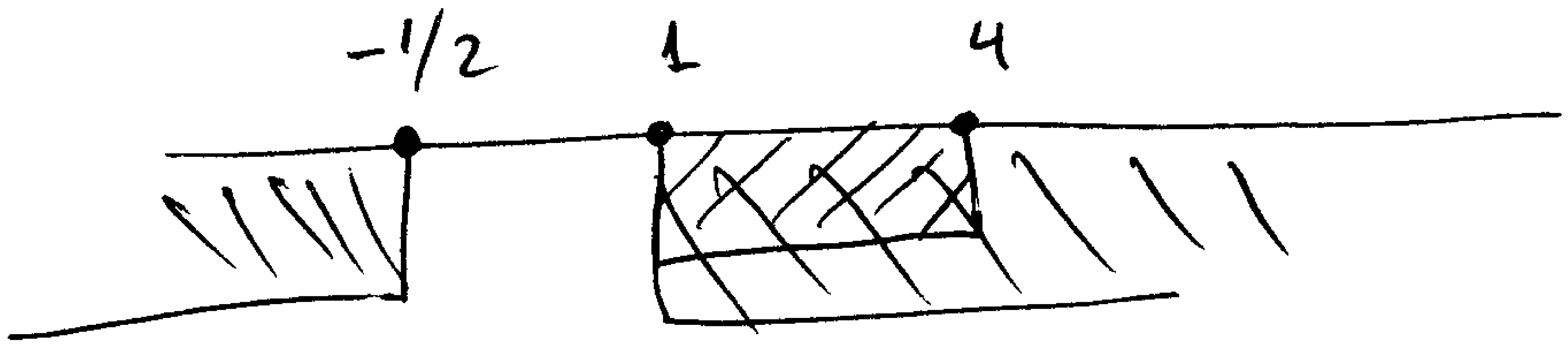
$(x-1) \cdot (x + \frac{1}{2}) \ge 0$



άρα $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$ ή $x \in [1, +\infty)$

ή $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$ ✓

κοινές λύσεις:



$x \in [1, 4]$ ✓ ΤΕΛΟΣ

ΘΕΜΑ 2 (485)

Δίνεται η εξίσωση $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1) \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε. (Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

Λύση: α) $\lambda \cdot x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow$

$x \cdot (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$ ✓

β) από την (α) για $\lambda \neq 1 \Rightarrow \boxed{x = \lambda + 1}$

γ) " " (α) για $\lambda = 1 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \cdot 2$

ταυτότητα ως προς x.

ΘΕΜΑ 2 (4861)

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε

α) να αποδείξετε ότι: $\alpha^3 < \alpha$ (Μονάδες 13)

β) να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \dfrac{1}{\alpha}$ (Μονάδες 12)

Λύση: α) Θέλουμε ν.δ.ο. $\alpha^3 < \alpha$ αρκεί ($\alpha^2 < 1$)

(διαιρέσαμε με τον θετικό αριθμό α και τα δύο μέλη)

Τώρα από τις $\begin{pmatrix} \alpha < 1 \\ \alpha < 1 \end{pmatrix}$ με πολ/σμό κατά μέλη

προκύπτει $\alpha^2 < 1$ ✓

β) Από την υπόθεση έχουμε $\alpha < 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha} > 1$ επίσης

$\alpha^2 < 1$ και $\alpha^3 < \alpha$ και $\alpha^3 < \alpha^2$

Οπότε $0 < \alpha^3 < \alpha^2 < \alpha < 1 < \dfrac{1}{\alpha}$

δηλ. $0 < \alpha^3 < \alpha < 1 < \dfrac{1}{\alpha}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (487)

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε: $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ (Μονάδες 13)

Λύση: α) $(x-1)^2+(y+3)^2 = x^2+y^2-2x+6y+10 \Leftrightarrow$

$x^2 - 2\cdot x\cdot 1 + 1^2 + y^2 + 2\cdot y\cdot 3 + 3^2 = x^2+y^2-2x+6y+10 \Leftrightarrow$

$0=0$ που ισχύει.

β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0$ άρα από το (α) προκύπτει $(x-1)^2+(y+3)^2=0$ όπως ένα άθροισμα τετραγώνων όταν ισούται με το μηδέν συμβαίνει ότι το κάθε τετράγωνο ισούται με το μηδέν δηλ. $(x-1)^2=0$ και $(y+3)^2=0$ δηλ. $x-1=0$ και $y+3=0$ δηλ. $\boxed{x=1}$ και $\boxed{y=-3}$

ΘΕΜΑ 2 (488)

Δίνεται η συνάρτηση *f*, με $f(x)=\dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της *A*. (Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-5x+3$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+1}$ (Μονάδες 10)

Λύση: α) $D_f = \mathbb{R} - \{$ρίζες του παρονομαστή$\}$

$x^2-1=0 \Rightarrow x=\pm 1$ άρα $D_f = \mathbb{R} - \{-1,+1\}$

β) $2x^2-5x+3 = \underbrace{2x^2-2x}\underbrace{-3x+3} = 2x(x-1)-3(x-1) =$

$= (x-1)\cdot(2x-1)$ ✓

γ) $f(x) = \dfrac{2x^2-5x+3}{x^2-1} = \dfrac{\cancel{(x-1)}\cdot(2x-1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x+1)} = \dfrac{2x-1}{x+1}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (489)

α) Να λύσετε την ανίσωση $|x-5|<2$ (Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2-3x|>5$ (Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

Λύση: α) $|x-5|<2 \Leftrightarrow -2<x-5<2 \Leftrightarrow$

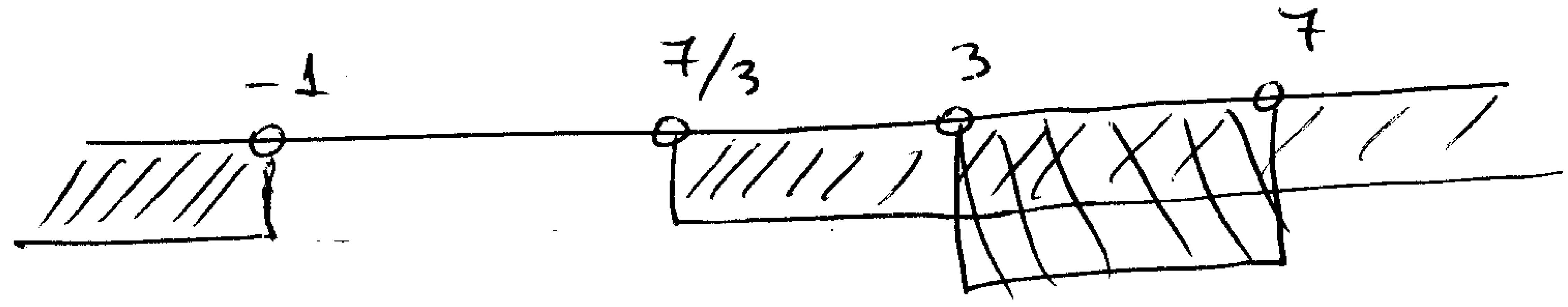
$-2+5<x<2+5 \Leftrightarrow \boxed{3<x<7}$ ✓

β) $|2-3x|>5 \Leftrightarrow (2-3x>5$ ή $-2+3x>5)$

$\Leftrightarrow (2-5>3x$ ή $3x>5+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-3>3x$ ή $3x>7) \Leftrightarrow (-1>x$ ή $x>7/3)$

γ) Σχ.



Κοινές λύσεις είναι: $3<x<7$

ή $x\in(3,7)$

ΘΕΜΑ 2 (4ο)

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-3x+1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες: $2x^2-3x+1<0$ (Μονάδες 5)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύσεις της ανίσωσης: $2x^2-3x+1<0$

(Μονάδες 10)

<u>Λύση:</u> α) $\alpha = 2,\ \beta = -3,\ \gamma = 1.$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2\cdot 2} = \frac{3\pm 1}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \\ x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

β)

x		$1/2$		1	
	ομόσημο του α		ετερόσημο του α		ομόσημο του α

το $\alpha = 2 > 0$

δηλ.

x		$1/2$		1	
	$+$		$-$		$+$

εμείς θέλουμε $2x^2 - 3x + 1 < 0 \Rightarrow x \in (1/2, 1)$

γ) $$2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 3\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 1 = 2\cdot\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + 1 = \frac{3-3\sqrt{3}}{2} + 1$$ ... δύσκολα έτσι.

<u>Άλλος τρόπος</u>: παρατηρώ ότι $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ δηλ. $\frac{\sqrt{3}}{2} \in (1/2, 1)$ άρα το καθιστά το τριώνυμο αρνητικό δηλ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ είναι λύση.

Επίσης το $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ ομοίως και το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ είναι λύση.

ΘΕΜΑ 2 (491)

Δίνονται οι ανισώσεις: $3x-1<x+9$ και $2-\frac{x}{2} \le x+\frac{1}{2}$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το σύνολο των κοινών τους λύσεων. (Μονάδες 10)

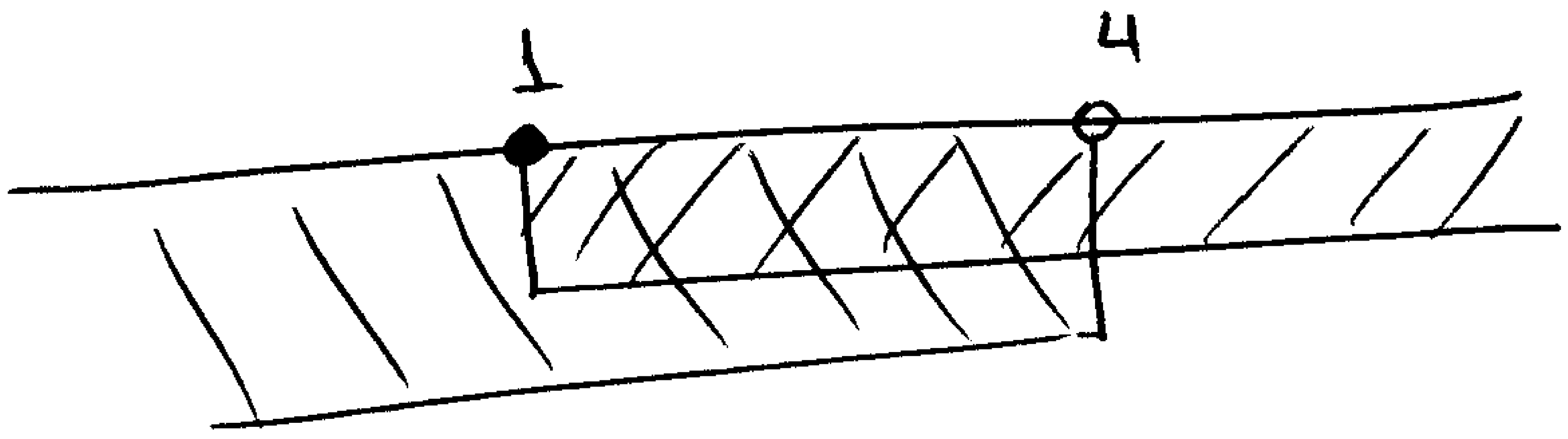
Λύση: α) $3x-1<x+9 \Leftrightarrow 3x-x<9+1 \Leftrightarrow 2x<8 \Leftrightarrow$

$\boxed{x<4}$ και $2-\frac{x}{2} \le x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4-x \le 2x+1 \Leftrightarrow 4-1 \le 2x+x \Leftrightarrow 3 \le 3x$

$\Leftrightarrow 1 \le x \Leftrightarrow \boxed{x \geq 1}$

β)



άρα $x \in [1, 4)$

ΘΕΜΑ 2 (492)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-15$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f(-1)+f(0)+f(1)$. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της f με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

Λύση:

α) $f(-1)+f(0)+f(1) = (-1)^2+2\cdot(-1)-15+0^2+2\cdot 0-15+1^2+2\cdot 1-15 = 1-\cancel{2}-15-15+1+\cancel{2}-15 = 2-45=-43$

β) $A(x,0)\in x'x$ και $B(0,y)\in y'y$

• για το A έχουμε: $0=x^2+2x-15$ η λύση της εξίσωσης θα μας δώσει τα σημεία τομής με τον $x'x$. $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=-15$, $\Delta=2^2-4\cdot 1\cdot(-15)=4+60=64$, $x_{1,2}=\dfrac{-2\pm\sqrt{64}}{2\cdot 1}=\dfrac{-2\pm 8}{2}=\begin{cases}x_1=3\\ x_2=-5\end{cases}$

άρα υπάρχουν δύο σημεία τομής με τον $x'x$. τα $A_1(-5,0)$ και $A_2(3,0)$.

• για το B έχουμε $y=0^2+2\cdot 0-15=-15$
Επομ. $B(0,-15)$ το σημείο τομής με τον $y'y$.

ΘΕΜΑ 2 (493)

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$. (Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

Λύση: α) $|x-2|=\sqrt{3} \Leftrightarrow x-2=\pm\sqrt{3} \Leftrightarrow$

$(x-2=\sqrt{3}$ ή $x-2=-\sqrt{3}) \Leftrightarrow$

$(x=\sqrt{3}+2$ ή $x=2-\sqrt{3})$ ✓

Δηλ. $x_1=2+\sqrt{3}$ και $x_2=2-\sqrt{3}$

β) $x^2-S\cdot x+P=0$, $S=x_1+x_2=4$

$P=x_1\cdot x_2=2^2-(\sqrt{3})^2=1$

άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι: $x^2-4x+1=0$ ✓