ΘΕΜΑ 2 (495)

Σε γεωμετρική πρόοδο (α_ν) με θετικό λόγο λ, ισχύει: $\alpha_3=1$ και $\alpha_5=4$.

α) Να βρείτε το λόγο λ της προόδου και τον πρώτο όρο της. (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστός όρος της προόδου είναι:

$$\alpha_\nu=2^{\nu-3}.$$

(Μονάδες 12)

Λύση: α) $\lambda>0$, $\alpha_3=1$, $\alpha_5=4$

$\alpha_3=1 \Rightarrow$ με χρήση του τύπου $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}$

προκύπτει $\alpha_1\cdot\lambda^{3-1}=1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1\cdot\lambda^2=1}$ (1)

$\alpha_5=4 \Rightarrow \alpha_1\cdot\lambda^{5-1}=4 \Rightarrow \boxed{\alpha_1\cdot\lambda^4=4}$ (2)

Διαιρώ κατά μέλη τις (1) και (2) $\Rightarrow \dfrac{\alpha_1\cdot\lambda^4}{\alpha_1\cdot\lambda^2}=\dfrac{4}{1} \Rightarrow$

$\lambda^2=4 \Rightarrow \lambda=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \lambda=\pm 2$ το $\lambda=-2$ απορρίπτεται

λόγω υπόθεσης άρα $\boxed{\lambda=2}$ ✓

Τώρα από (1) $\Rightarrow \alpha_1\cdot 2^2=1 \Rightarrow \boxed{\alpha_1=\frac{1}{4}}$ ✓

β) $\alpha_\nu=\alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1}=\frac{1}{4}\cdot 2^{\nu-1}=\dfrac{2^{\nu-1}}{4}=\dfrac{2^{\nu-1}}{2^2}=2^{\nu-1-2}=2^{\nu-3}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (4961)

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$$ (Μονάδες 9)

Λύση: $x^2 + 2\lambda x + 4(\lambda-1) = 0 \ , \ \lambda \in \mathbb{R}$

α) $\alpha = 1, \ \beta = 2\lambda, \ \gamma = 4(\lambda - 1) \ , \ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma =$

$= (2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4 \cdot (\lambda^2 - 4\lambda + 4) =$

$= 4 \cdot (\lambda - 2)^2 \geq 0$ ✓

β) Επειδή από το (α) προέκυψε $\Delta \geq 0 \Rightarrow$ υπάρχουν 2 ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) $(x_1+x_2)^2 + x_1 \cdot x_2 + 5 = 0$, όμως $x_1 + x_2 = S$ όπου

$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{2\lambda}{1} = -2\lambda$ και $x_1 \cdot x_2 = P$ όπου

$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4(\lambda-1)}{1} = 4(\lambda-1)$. Άρα η εξίσωση

γίνεται $(-2\lambda)^2 + 4(\lambda-1) + 5 = 0 \Rightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda - 4 + 5 = 0$

$\Rightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$

$\lambda_{1,2} = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{4}{2 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (497)

Ένα τηλεοπτικό παιχνίδι παίζεται με ζεύγη αντιπάλων των δυο φύλων. Στο παιχνίδι συμμετέχουν 3 άντρες: ο Δημήτρης (Δ), ο Κώστας (Κ), ο Μιχάλης (Μ) και 2 γυναίκες: η Ειρήνη (Ε) και η Ζωή (Ζ). Επιλέγονται στην τύχη ένας άντρας και μια γυναίκα για να διαγωνιστούν και καταγράφονται τα ονόματά τους.

α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων

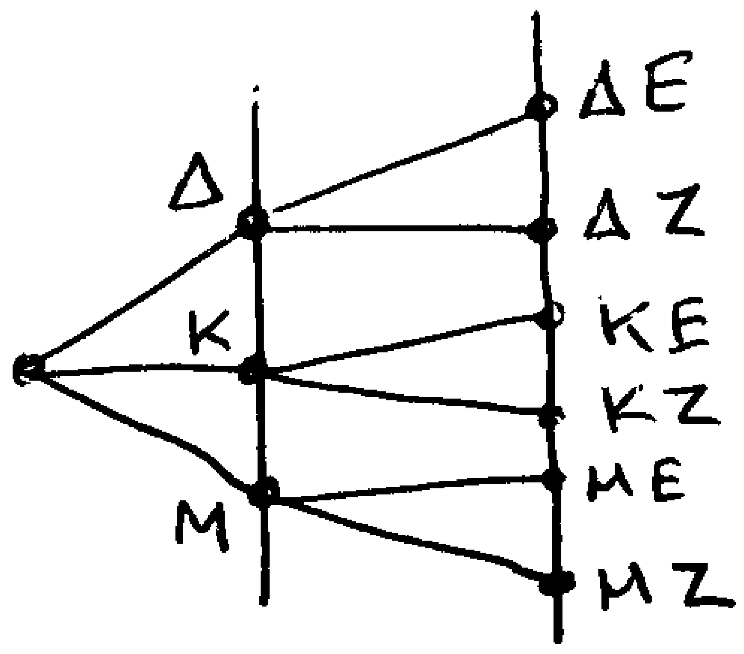
Α : Να διαγωνίστηκαν ο Κώστας ή ο Μιχάλης .

Β : Να διαγωνίστηκε η Ζωή.

Γ: Να μη διαγωνίστηκε ούτε ο Κώστας ούτε ο Δημήτρης.

(Μονάδες 15)

<u>Λύση:</u> α)



άρα $\Omega = \{ ΔΕ, ΔΖ, ΚΕ, ΚΖ, ΜΕ, ΜΖ \}$

β) $P(A) = \dfrac{\text{Πλήθος Ευνοϊκών Περιπτ.}}{\text{Πλήθος Δυνατών Περιπτ.}} = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ ✓

$P(B) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$ ✓

$P(\Gamma) = P(\text{διαγωνίστηκε ο Μιχάλης}) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ ✓

<u>Σημείωση:</u> Λύνεται και με την χρήση του κανόνα Λογισμού των Πιθανοτήτων Σελ. με τους τύπους στην σελ. 33 του Σχολ. Βιβλίου.

ΘΕΜΑ 2 (498)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x+1|}{3}-\frac{|x+1|+4}{5}=\frac{2}{3}$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2+2x+3\le 0$ (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος. (Μονάδες7)

Λύση: α) 1η περίπτωση: έστω $\boxed{x+1\geq 0}$ άρα

$$\frac{x+1}{3}-\frac{x+1+4}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow \frac{x+1}{3}-\frac{x+5}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$15\cdot\frac{x+1}{3}-15\cdot\frac{x+5}{5}=15\cdot\frac{2}{3}\Leftrightarrow 5(x+1)-3(x+5)=5\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow 5x+5-3x-15=10 \Leftrightarrow 2x=20\Leftrightarrow \boxed{x=10}$$

δεκτή η λύση διότι από το $x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ και το $10\geq -1$.

2η περίπτωση: έστω $\boxed{x+1<0}$ άρα

$$\frac{-(x+1)}{3}-\frac{-(x+1)+4}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

$$-\frac{x+1}{3}-\frac{-x-1+4}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow -\frac{x+1}{3}-\frac{-x+3}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow$$

πολ/ζω με το ΕΚΠ = 15 $\Rightarrow -5(x+1)-3(-x+3)=5\cdot 2$

$$\Leftrightarrow -5x-5+3x-9=10\Leftrightarrow -2x=24\Leftrightarrow \boxed{x=-12}$$

δεκτή η λύση διότι από το $x+1<0\Leftrightarrow x<-1$ και το $-12<-1$. Τελικά $(x_1=10,\ x_2=-12)$

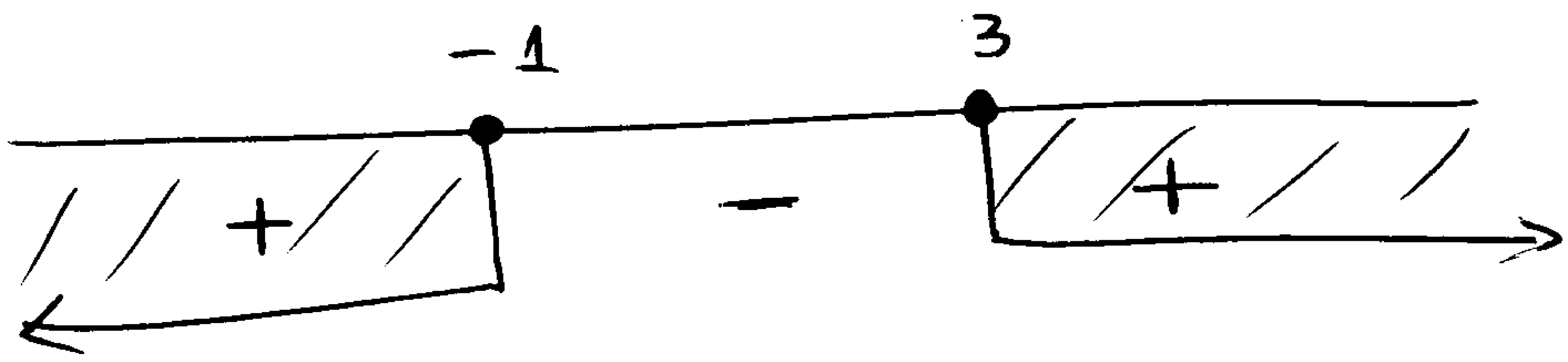
β) συνεχίζεται στην επόμενη σελίδα ⟶

β) $-x^2+2x+3 \leq 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \geq 0$

$\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=-3,\ \Delta=(-2)^2-4\cdot1\cdot(-3)=$

$=4+12=16,\quad x_{1,2}=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\pm4}{2}=$

$$= \begin{cases} x_1=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \end{cases}$$



άρα $x \in (-\infty,-1] \cup [3,+\infty)$ ✓

γ) το $10 \geq 3$ άρα είναι λύση της ανίσωσης.

το $-12 \leq -1$ " " " " " .

ΘΕΜΑ 2 (499)

Από τους μαθητές ενός Λυκείου, το 25% συμμετέχει στη θεατρική ομάδα, το 30% συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου και το 15% των μαθητών συμμετέχει και στις δύο ομάδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Αν ονομάσουμε τα ενδεχόμενα:

Α: «ο μαθητής να συμμετέχει στη θεατρική ομάδα» και

Β: «ο μαθητής να συμμετέχει στην ομάδα ποδοσφαίρου»,

α) να εκφράσετε λεκτικά τα ενδεχόμενα:

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) Β-Α iv) Α΄ (Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τις πιθανότητες πραγματοποίησης των ενδεχομένων

i) ο μαθητής που επιλέχθηκε να συμμετέχει μόνο στην ομάδα ποδοσφαίρου

ii) ο μαθητής που επιλέχθηκε να μη συμμετέχει σε καμία ομάδα.

(Μονάδες 13)

Λύση: α) i) $A \cup B$ = { Ο μαθητής συμμετέχει στην θεατρική ομάδα ή ο μαθητής συμμετέχει στην ποδοσφαιρική ομάδα }

ii) $A \cap B$ = { Ο μαθητής συμμετέχει και στην θεατρική και στην Ποδοσφαιρική ομάδα }

iii) Β-Α = { Ο μαθητής συμμετέχει στην Ποδοσφαιρική αλλά όχι στην θεατρική }

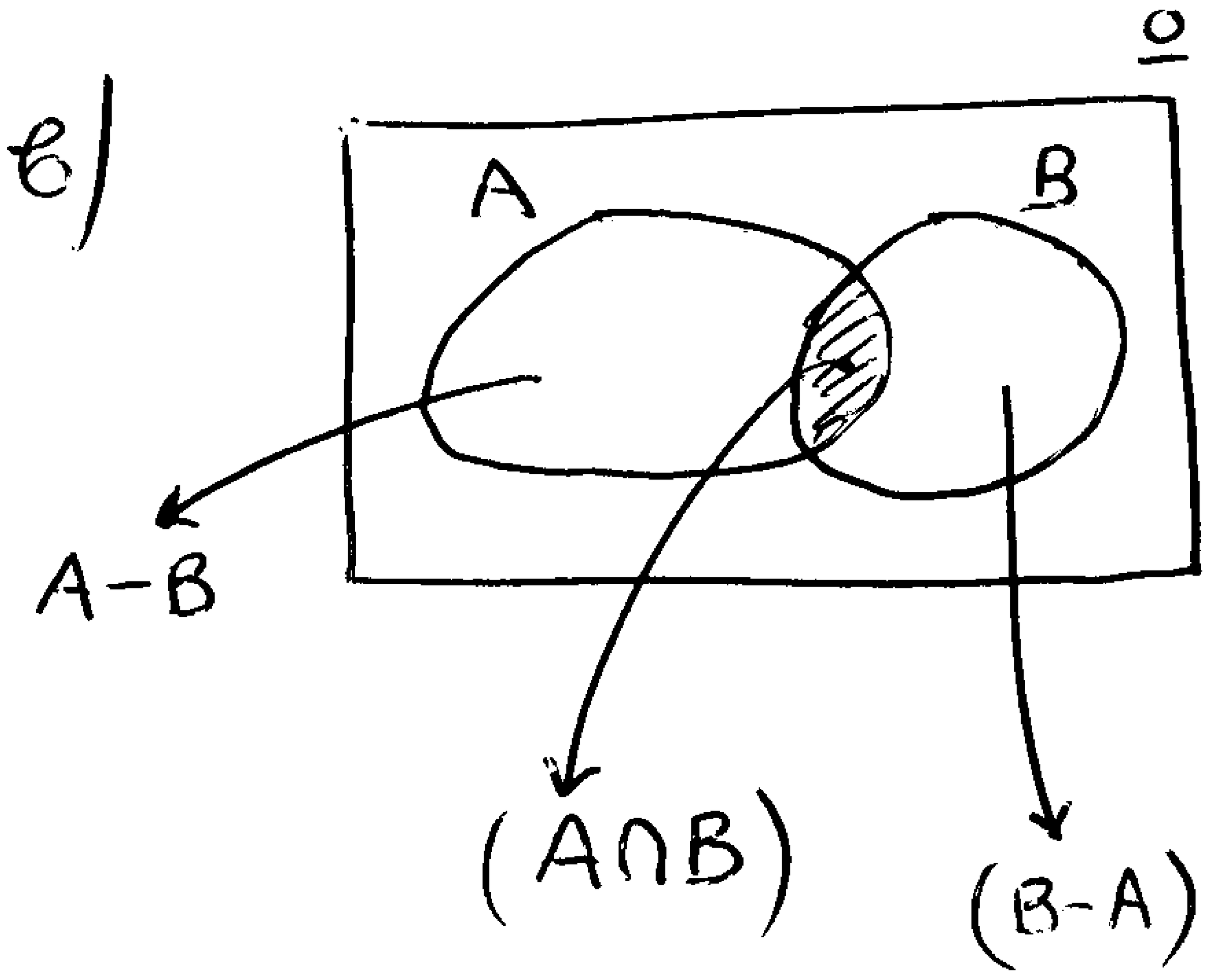
iv) A' = { Ο μαθητής δεν συμμετέχει στην θεατρική }

β) $P(A) = 25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $P(B) = 30\% = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

$P(A \cap B) = 15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$

η συνέχεια στην επόμενη σελίδα →

β)



Στο (i) ζητάμε την πιθανότητα

$P(B-(A\cap B))$ ή $\underline{P(B-A)}$ ή

$P(B\cap A')$

Υπολογίζουμε το $P(B-A)$ σύμφωνα με τον τύπο 5 του σχολ. βιβλίου σελ. 34.

δηλ. $P(B-A) = P(B) - P(B\cap A) = \frac{30}{100} - \frac{15}{100} = \frac{15}{100}$ ✓

ή <u>Άλλη σκέψη:</u> το $P(A\cap B) = \frac{15}{100}$ και $P(B) = \frac{30}{100}$ οπότε

το $P(B-A) = \frac{30}{100} - \frac{15}{100} = \frac{15}{100}$ ✓ (η σκέψη αυτή είναι προφανής όταν χρησιμοποιούμε το παραπάνω σχήμα, ενώ όταν χρησιμοποιούμε το τύπο 5 της σελ. 34 δεν μας χρειάζεται το σχήμα)

Στο (ii) ζητάμε $P((A\cup B)') = P(\Omega) - P(A\cup B) =$

$= P(\Omega) - [P(A) + P(B) - P(A\cap B)] =$

$= 1 - [\frac{25}{100} + \frac{30}{100} - \frac{15}{100}] = 1 - \frac{40}{100} = \frac{100}{100} - \frac{40}{100} = \frac{60}{100}$ ✓

<u>Σημείωση:</u> καλό είναι να κάνετε πάντα ένα σχήμα εάν το παραπάνω γιατί θα βοηθάει τη σκέψη σας. Επίσης να γνωρίζετε καλά τις σελίδες 33 κ 34 του σχολικού.

ΘΕΜΑ 2 (503)

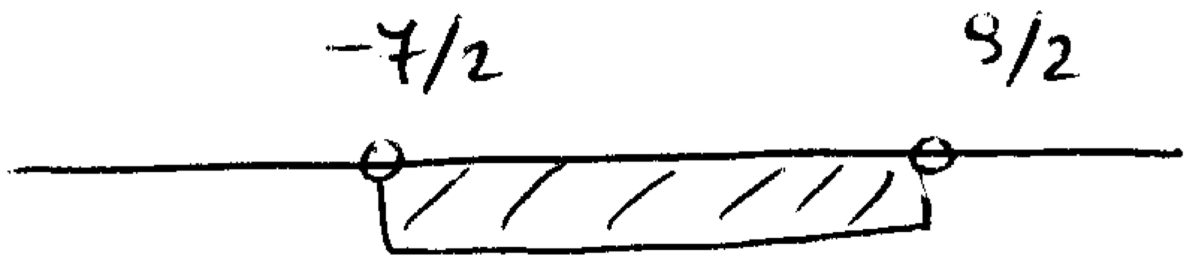
α) Να λύσετε την ανίσωση: $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x+5|\geq 3$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων των ερωτημάτων (α) και (β) με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών και να τις γράψετε με τη μορφή διαστήματος. (Μονάδες 7)

Λύση: α) $\left|x-\frac{1}{2}\right|<4 \Leftrightarrow -4<x-\frac{1}{2}<4$

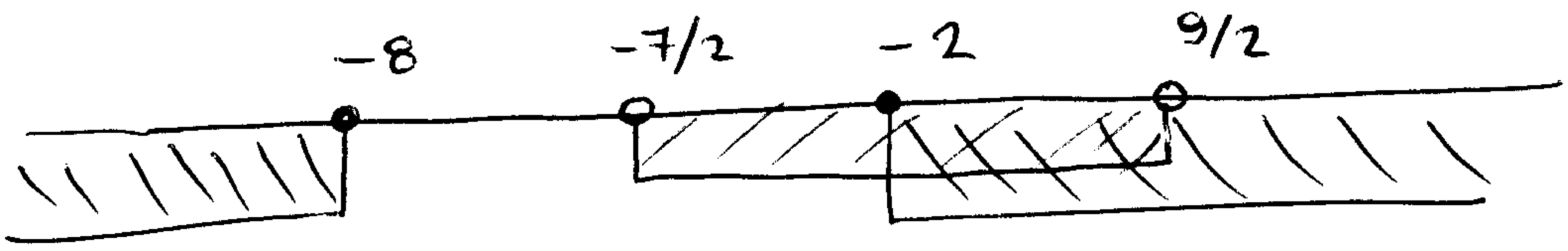
$\Leftrightarrow -4+\frac{1}{2}<x<4+\frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{7}{2}<x<\frac{9}{2}$ ✓



β) $|x+5|\geq 3 \Leftrightarrow (x+5\geq 3$ ή $-x-5\geq 3) \Leftrightarrow$

$(x\geq -2$ ή $-5-3\geq x) \Leftrightarrow (x\geq -2$ ή $x\leq -8)$

γ)



άρα $x\in\left[-2,\frac{9}{2}\right)$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (5041)

α) Αν $\alpha < 0$, να αποδειχθεί ότι: $\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2$. (Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι: $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \ge 2$. (Μονάδες 10)

<u>Λύση:</u> α) Θέλουμε ν.δ.ο $\alpha + \frac{1}{\alpha} \le -2$ πολ/ζουμε και τα δύο μέλη με τον <u>αρνητικό</u> **α** οπότε αλλάζει φορά η ανίσωση. Δηλ αρκεί ν.δ.ο

$\alpha \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geq -2 \cdot \alpha \iff \alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \iff$

$\iff \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \iff (\alpha+1)^2 \geq 0$ Προφανής ✓

β) $|\alpha| + \left|\frac{1}{\alpha}\right| \geq 2$ επειδή α αρνητικός η ανίσωση γίνεται $-\alpha + \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \geq 2 \iff$

$-\alpha - \frac{1}{\alpha} \geq 2 \iff \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2$ πολ/ζουμε πάλι με τον αρνητικό α κ τα δύο μέλη κ αλλάζει πάλι η φορά δηλ. $\alpha \cdot \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \geq -2\alpha \iff$

$\alpha^2 + 1 \geq -2\alpha \iff \alpha^2 + 2\alpha + 1 \geq 0 \iff (\alpha+1)^2 \geq 0$ ✓ Προφανής

ΘΕΜΑ 2 (SOS)

α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x-4| = 3|x-1|$ (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|3x-5| > 1$ (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του (α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του (β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

<u>Λύση:</u> α) $|2x-4| = 3|x-1| \iff$

$2x-4 = \pm 3(x-1)$ άρα έχω 2 εξισώσεις.

$2x-4 = 3(x-1)$ ή $2x-4 = -3(x-1)$

$2x-4 = 3x-3$

$-4+3 = 3x-2x$

$-1 = x$

$\boxed{x=-1}$

ή

$2x-4 = -3x+3$

$2x+3x = 3+4$

$5x = 7$

$\boxed{x = \frac{7}{5}}$

β) $|3x-5| > 1 \iff (3x-5>1$ ή $-(3x-5)>1) \iff$

$(3x > 1+5$ ή $-3x+5>1) \iff$

$(3x>6$ ή $5-1>3x) \iff (x>2$ ή $4>3x) \iff$

$\iff (x>2$ ή $x<\frac{4}{3})$ ✓

γ) το -1 είναι μικρότερο του $\frac{4}{3}$ άρα είναι λύση.

το $\frac{7}{5} > \frac{4}{3}$ κ $\frac{7}{5} < 2$ άρα δεν είναι λύση.

ΘΕΜΑ 2 (506)

Αν $2 \le x \le 3$ και $1 \le y \le 2$, να βρείτε μεταξύ ποιών ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$ (Μονάδες 5)

β) $2x-3y$ (Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

Λύση: α) $\left.\begin{matrix} 2 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{matrix}\right\}$ Πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow$

$3 \le x+y \le 5$ ✓

β) $2 \le x \le 3 \Leftrightarrow 4 \le 2x \le 6$ (1)

$1 \le y \le 2 \Leftrightarrow -3 \ge -3y \ge -6 \Leftrightarrow$

$-6 \le -3y \le -3$ (2)

Τις (1) και (2) πρόσθεση κατά μέλη $\Rightarrow -2 \le 2x-3y \le 3$ ✓

γ) $\left.\begin{matrix} 2 \le x \le 3 \\ 1 \le y \le 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \le x \le 3 \\ 1 \ge \frac{1}{y} \ge \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 \le x \le 3 \\ \frac{1}{2} \le \frac{1}{y} \le 1 \end{pmatrix}$

Επειδή όλοι οι αριθμοί είναι θετικοί μπορώ να πολ/σω κατά μέλη και $\Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} \le x \cdot \frac{1}{y} \le 3 \cdot 1 \Leftrightarrow$

$1 \le \frac{x}{y} \le 3$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (507)

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1)

α) Επιλέγοντας τρείς διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρείς εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) έστω $\lambda=0 \Rightarrow -9x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=0}$ ✓

έστω $\lambda=1 \Rightarrow (1^2-9)x=1^2-3\cdot 1 \Leftrightarrow -8x=-2 \Leftrightarrow$

$x=\frac{2}{8} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$ ✓

έστω $\lambda=-1 \Rightarrow ((-1)^2-9)x=(-1)^2-3\cdot(-1) \Leftrightarrow$

$(1-9)x=1+3 \Leftrightarrow -8x=4 \Leftrightarrow x=-\frac{4}{8} \Leftrightarrow$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ ✓

β) Θα πρέπει $\lambda^2-9\neq 0$ ώστε $x=\frac{\lambda^2-3\lambda}{\lambda^2-9}$

άρα $\lambda^2-9\neq 0 \Rightarrow \lambda^2\neq 9 \Leftrightarrow \lambda\neq\pm\sqrt{9} \Leftrightarrow \boxed{\lambda\neq\pm 3}$ ✓

γ) $x=\frac{\lambda^2-3\lambda}{\lambda^2-9} \Leftrightarrow 4=\frac{\lambda\cancel{(\lambda-3)}}{\cancel{(\lambda-3)}(\lambda+3)} \Leftrightarrow 4=\frac{\lambda}{\lambda+3} \Leftrightarrow$

$4(\lambda+3)=\lambda \Leftrightarrow 4\lambda+4-\lambda=0 \Leftrightarrow 3\lambda=-4 \Leftrightarrow \boxed{\lambda=-\frac{4}{3}}$ ✓