ΘΕΜΑ 2 (508)

α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων 1,2,3,…ν

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να πάρουμε άθροισμα τον αριθμό 45. (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $1, 2, 3, \dots \nu$ Έχουμε μια αριθμητική πρόοδο με $\omega = 1$.

Ζητάμε το $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\cdot 1 + (\nu-1)\cdot 1\right] =$

$= \frac{\nu}{2}\cdot\left[2 + \nu - 1\right] = \frac{\nu}{2}\cdot\left[\nu+1\right] = \frac{\nu\cdot(\nu+1)}{2}$ ✓

β) Έχουμε $S_\nu = 45 \Rightarrow \frac{\nu(\nu+1)}{2} = 45 \Leftrightarrow$

$\nu(\nu+1) = 90 \Leftrightarrow \boxed{\nu^2 + \nu - 90 = 0} \rightarrow$ 2ου βαθ. εξίσ.

$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = -90,\ \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 1^2 - 4\cdot 1\cdot(-90) =$

$= 1 + 360 = 361.$

άρα $\nu_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 19}{2} =$

$= \begin{cases} \nu_1 = \frac{-1+19}{2} = \frac{18}{2} = 9 & \text{δεκτή} \\ \nu_2 = \frac{-1-19}{2} = \frac{-20}{2} = -10 & \text{απορρίπτεται ως αρνητική.} \end{cases}$

ΘΕΜΑ 2 (509)

α) Αν α, $\beta \in \mathbb{R}$-{0}, να αποδειχθεί ότι: $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$ (1) (Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

Λύση:

α) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|} \geq 2 \Leftrightarrow$

$\frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha|\cdot|\beta|} \geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2 \geq 2|\alpha|\cdot|\beta| \Leftrightarrow$ ✓

$|\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha|\cdot|\beta| \geq 0 \Leftrightarrow (|\alpha|-|\beta|)^2 \geq 0$ προφανώς

β) $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right| = 2 \Leftrightarrow \cdots\cdots (|\alpha|-|\beta|)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$|\alpha|-|\beta| = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = |\beta|. \Leftrightarrow \alpha = \pm\beta$

δηλ. όταν $\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (≤ 10)

Δίνεται η συνάρτηση f, με: $f(x)=\begin{cases} 2x-5, & x\leq 3 \\ x^2, & 3<x<10 \end{cases}$

α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε τις τιμές $f(-1)$, $f(3)$ και $f(5)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 25$. (Μονάδες 9)

<u>Λύση:</u>

α) $D_f = (-\infty, 3] \cup (3, 10)$

β) $f(-1) = 2\cdot(-1)-5 = -2-5=-7$ ✓

$f(3) = 2\cdot 3-5 = 6-5 = 1$ ✓

$f(5) = 5^2 = 25$ ✓

γ) $f(x)=25$

1η περίπτωση: $2x-5=25$ με $x\leq 3$

τότε $2x=30 \Leftrightarrow x=15$ απορρίπτεται.

2η περίπτωση: $x^2=25 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{25} \Leftrightarrow x=5$

ή $x=-5$. Το $\boxed{x=5}$ δεκτή τιμή διότι

$3<5<10$ ενώ το $x=-5$ απορρίπτεται

διότι $-5 \notin (3,10)$.

ΘΕΜΑ 2 (936)

Δίνεται η παράσταση: $A=\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right)$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

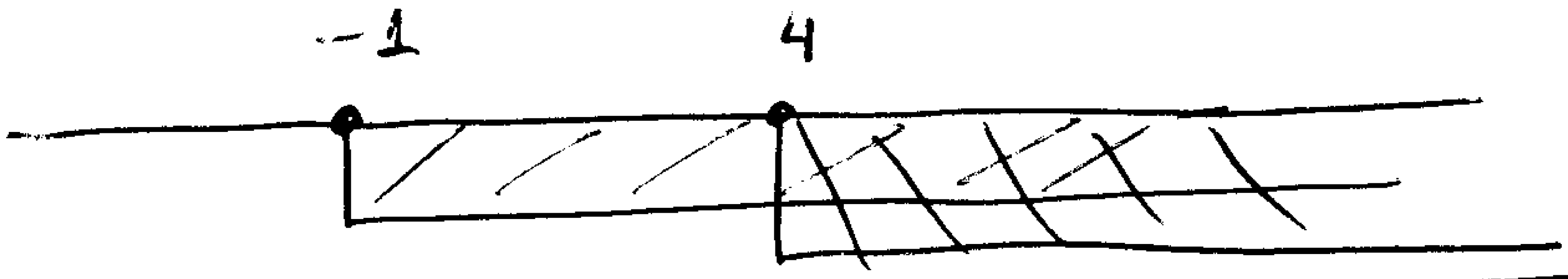
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση *A* είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του *x*.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 4}$, $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq -1}$



άρα ορίζεται η A όταν $\boxed{x \geq 4}$ ✓

β) $A = \left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right) =$

$= \left(\sqrt{x-4}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 = |x-4| - |x+1| =$

$= (x-4) - (x+1) = x-4-x-1 = -5$ ✓

ΘΕΜΑ 2 (938)

α) Να δείξετε ότι: $3<\sqrt[3]{30}<4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<(\sqrt[3]{30})^3<4^3 \Leftrightarrow$

$27<30<64$ προφανώς.

β) Στην τύχη ισχυρίζομαι ότι $\sqrt[3]{30}<6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{30}<6 \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30}<6 \Leftrightarrow$

$(2\cdot\sqrt[3]{30})^3<6^3 \Leftrightarrow 2^3\cdot 30<6^3 \Leftrightarrow$

$2^3\cdot 30<(2\cdot 3)^3 \Leftrightarrow \cancel{2^3}\cdot 30<\cancel{2^3}\cdot 3^3 \Leftrightarrow$

$30<27$ άτοπο.

Άρα το σωστό είναι $\boxed{\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30}}$ ✓

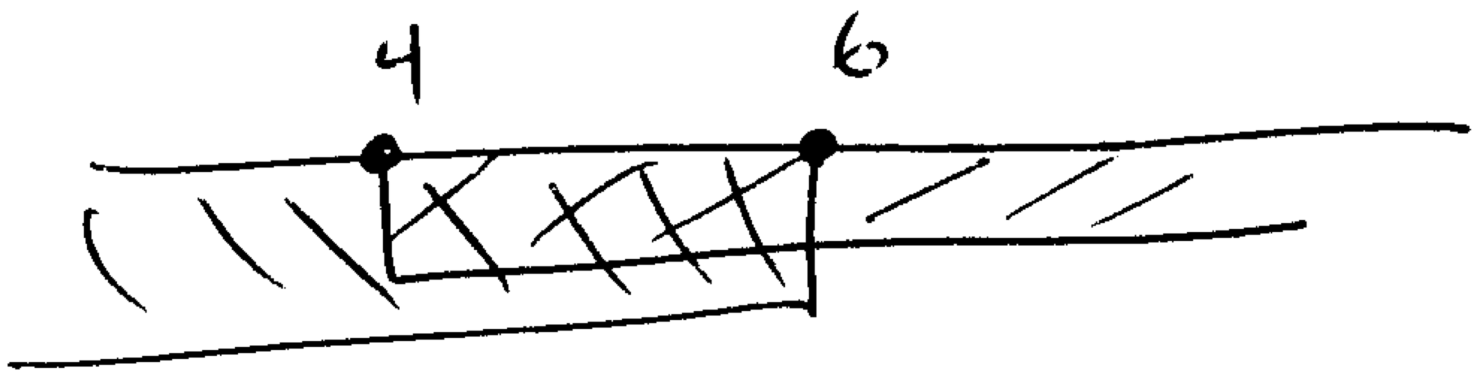
ΘΕΜΑ 2 (944)

Δίνεται η παράσταση: $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$

α) Για ποιες τιμές του *x* ορίζεται η παράσταση *A*; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του *x* σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για *x=5*,να αποδείξετε ότι: $A^2+A-6=0$ (Μονάδες 12)

Λύση: α) $x-4 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 4}$ και $6-x \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{6 \geq x}$



άρα $x \in [4, 6]$

β) για $x=5$ έχουμε $A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5}=1+1=2$

οπότε $A^2+A-6=2^2+2-6=4+2-6=0$