

ΘΕΜΑ 2 (947)

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x=4$, να αποδείξετε ότι: $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$ (Μονάδες 13)

Λύση:

α) $x^2 + 4 > 0 \Rightarrow \boxed{x \in \mathbb{R}}$ και $x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 4}$
Διαι. η A ορίζεται όταν $\boxed{x \geq 4} \checkmark$ ή $x \in [4, +\infty)$

β) αν $x=4 \Rightarrow A = \sqrt{4^2 + 4} - \sqrt{4-4} = \sqrt{16+4} - 0 = \sqrt{20} \Rightarrow$

$$A = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Οπότε } A^2 - A = (2\sqrt{5})^2 - (2\sqrt{5}) = 2^2 \cdot (\sqrt{5})^2 - 2\sqrt{5} = 4 \cdot 5 - 2\sqrt{5} = \\ = 2 \cdot (2 \cdot 5 - \sqrt{5}) = 2 \cdot (10 - \sqrt{5}) \checkmark$$

ΘΕΜΑ 2 (950)

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι: $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

Λύση:

α) Πρέπει $(1-x \geq 0 \text{ και } x^4 \geq 0)$

Αντ. $(1 \geq x \text{ και } x \in \mathbb{R}) \Rightarrow \boxed{x \leq 1} \checkmark$

οπότε $x \in (-\infty, 1] \checkmark$

β) αν $x = -3 \Rightarrow A = \sqrt{1-(-3)} - \sqrt[4]{(-3)^4} =$

$$= \sqrt{1+3} - \sqrt[4]{3^4} = \sqrt{4} - 3 = 2 - 3 = -1$$

$$\text{άρα } A^3 + A^2 + A + 1 = (-1)^3 + (-1)^2 + \cancel{(-1)} + \cancel{1} = -1 + 1 = 0 \checkmark$$

ΘΕΜΑ 2 (952)

Δίνεται η παράσταση: $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Για $x=4$, να αποδείξετε ότι: $B^2+6B=B^4$ (Μονάδες 12)

Λύση:

$$a) (x-2)^5 \geq 0 \Leftrightarrow x-2 \geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \geq 2} \checkmark$$

$$\eta \quad x \in [2, +\infty) \checkmark$$

$$b) \text{ αν } x=4 \text{ τότε } B = \sqrt[5]{(4-2)^5} = \sqrt[5]{2^5} = 2$$

$$\text{οπότε } \left. \begin{array}{l} B^2 + 6B = 2^2 + 6 \cdot 2 = 4 + 12 = 16 \\ B^4 = 2^4 = 16 \end{array} \right\} \Rightarrow B^2 + 6B = B^4 \checkmark$$

ΘΕΜΑ 2 (955)

Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$$

(Μονάδες 12)

Λύση:

$$\alpha) A = (\sqrt{2})^6 = \left[(\sqrt{2})^2 \right]^3 = 2^3 = 8$$

$$B = (\sqrt[3]{2})^6 = \left[(\sqrt[3]{2})^3 \right]^2 = 2^2 = 4$$

$$\text{άρα } A - B = 8 - 4 = 4 \quad \checkmark$$

β) $\sqrt{2} > 0$, $1 > 0$, $\sqrt[3]{2} > 0$ δηλ. έχουμε 3 θετικούς αριθμούς και μάλιστα ≥ 1 . Τους υψώνουμε στην 6η και έχουμε $(\sqrt{2})^6$, 1^6 , $(\sqrt[3]{2})^6$ τώρα θα διατάξουμε αυτές τις 3 δυνάμεις.

$$\left. \begin{array}{l} (\sqrt{2})^6 = 8 \\ 1^6 = 1 \\ (\sqrt[3]{2})^6 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 < 4 < 8 \text{ δηλ. } 1 < \sqrt[3]{2} < \sqrt{2}$$

ΘΕΜΑ 2 (991)

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x+1| < 2$,

α) να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$

(Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης: $K = \frac{|x+3| + |x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x .

(Μονάδες 13)

Λύση:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad |x+1| < 2 &\Leftrightarrow -2 < x+1 < 2 \Leftrightarrow \\ -2-1 < x < 2-1 &\Leftrightarrow \boxed{-3 < x < 1} \Leftrightarrow x \in (-3, 1) \checkmark \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \text{επειδή } -3 < x &\Leftrightarrow x+3 > 0 \text{ άρα } |x+3| = x+3 \\ \text{" } x < 1 &\Leftrightarrow x-1 < 0 \text{ άρα } |x-1| = -x+1 \end{aligned}$$

$$\text{Οπότε } K = \frac{x+3 - x+1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \checkmark$$

ΘΕΜΑ 2 (996)

Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$.

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$.

(Μονάδες 13)

Λύση:

α) Επειδή $1 < x < 4 \Rightarrow x-1 > 0 \Rightarrow |x-1| = x-1$
 $\Rightarrow y < 3 \Rightarrow y-3 < 0 \Rightarrow |y-3| = -y+3$

Οπότε $A = |x-1| + |y-3| = x-1 - y+3 = x-y+2 \checkmark$

β) $\begin{pmatrix} 1 < x < 4 \\ 2 < y < 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 < x < 4 \\ -2 > -y > -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 < x < 4 \\ -3 < -y < -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 < x < 4 \\ -3+2 < -y+2 < -2+2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 < x < 4 \\ -1 < -y+2 < 0 \end{pmatrix}$ Προσθέτουμε

κατά μέλη $\Rightarrow 1-1 < x-y+2 < 4+0 \Leftrightarrow 0 < x-y+2 < 4$

δυσ. $0 < A < 4 \checkmark$

ΘΕΜΑ 2 (999)

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 5x + 6$.

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει: $f(x) = \frac{1}{x-3}$.

(Μονάδες 8)

Λύση:

a) $p = 6 = 2 \cdot 3$ και $s = 2 + 3 = 5$ ✓

άρα $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$ οπότε $x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$ ✓

β) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$.

i) $x^2 - 5x + 6 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x \neq 2}$ και $\boxed{x \neq 3}$

άρα $D_f = A = \mathbb{R} - \{2, 3\}$ ✓

ii) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \frac{\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)} \cdot (x-3)} = \frac{1}{x-3}$ ✓