ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ & ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	***20/05/2013***
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:	***ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ***

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΘΕΜΑ Α

Α1 : Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 28

Α2 : Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 14

Α3 : Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 87

Α4 : α) Λ , β) Σ , γ) Λ , δ) Λ , ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1 : Για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων $P(\omega_1)$ και $P(\omega_3)$ έχουμε:

➢ $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$ απροσδιόριστη μορφή . Άρα:

$$P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}{\left(x^3+x^2\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to -1}\frac{1}{x\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

➢ Είναι $P(\omega_3)=f'(1)$ όπου $f(x)=\frac{x}{3}\ln x$, $x>0$ και $f'(x)=\frac{1}{3}(x\cdot\ln x)'=\frac{1}{3}(\ln x+1)$, για $x=1$ προκύπτει $P(\omega_3)=f'(1)=\frac{1}{3}$

Β2 : Είναι $\frac{1}{3}\le P(A')\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{3}\le 1-P(A)\le\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4}\le P(A)\le\frac{2}{3}$

$P(A) \geq P(\omega_1)$ και $P(A) \geq P(\omega_4)$, άρα $P(A) \geq P(\omega_1) = \frac{1}{4}$ επίσης ισχύει

$$P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) \leq 1 - \left(P(B) - P(A \cap B)\right) \Leftrightarrow P(A) \leq 1 - \left(\frac{7}{12} - \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow P(A) \leq \frac{2}{3}$$

όπου $P(B) = P(\omega_1) + P(\omega_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$

και $P(A \cap B) = P(\omega_1) = \frac{1}{4}$

Β3: (α΄ τρόπος)

$$P(A') = P(\omega_2) + P(\omega_3) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(\omega_2) \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{5}{12}$$

$$P(A') = 1 - P(A) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 1 - \left(P(\omega_1) + P(\omega_4)\right) \Leftrightarrow \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} - P(\omega_4) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 0$$

$$P\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{7}{12} - 2\frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

$$P(A' - B') = P(A' \cap B) = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{7}{12} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$$

Β3: (β΄ τρόπος)

Είναι $A' = \{\omega_2, \omega_3\}$, άρα $P(A') = P(\omega_2) + P(\omega_3) \Leftrightarrow P(\omega_2) = P(A') - P(\omega_3) \Leftrightarrow P(\omega_2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Ισχύει $P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow P(\omega_4) = 1 - \left(P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3)\right) \Leftrightarrow P(\omega_4) = 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{12} + \frac{1}{3}\right) = 0$

Α-Β=$\{\omega_4\}$ και Β-Α=$\{\omega_3\}$ άρα (Α-Β)$\cup$(Β-Α)=$\{\omega_3, \omega_4\}$ οπότε

$$P(\left[(A - B) \cup (B - A)\right] = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$$

$A' = \{\omega_2, \omega_3\}$ και $B' = \{\omega_2, \omega_4\}$ άρα Α΄-Β΄=$\{\omega_3\}$ οπότε $P(A' - B') = P(\omega_3) = \frac{1}{3}$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1 :

$x_{min} = 50$ άρα α_0=50

Έχουμε $x_4 = 85$ οπότε , $\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} = 85 \Leftrightarrow \frac{\alpha_0 + 3c + \alpha_0 + 4c}{2} = 85 \Leftrightarrow 2\alpha_0 + 7c = 170 \Leftrightarrow \boxed{c = 10}$.

Γ 2.

Έχουμε $\delta = 75$ άρα $\frac{f_3}{2} + f_4 = 0,5$ και $f_4 = 2f_3$ επομένως $\frac{f_3}{2} + 2f_3 = 0,5 \Leftrightarrow f_3 + 4f_3 = 1 \Leftrightarrow \boxed{f_3 = 0,2}$

Άρα και $\boxed{f_4 = 0,4}$.

Από τον τύπο της μέσης τιμής έχουμε: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot f_i = x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + x_4 \cdot f_4$

$$74 = 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 + 75 \cdot 0,2 + 85 \cdot 0,4 \Leftrightarrow 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 = 25$$

Έχουμε το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} 55 \cdot f_1 + 65 \cdot f_2 = 25 \\ f_1 + f_2 = 0,4 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow 55 \cdot f_1 + 65 \cdot (0,4 - f_1) = 25 \Leftrightarrow 55 \cdot f_1 + 26 - 65 \cdot f_1 = 25$

Άρα $10f_1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{f_1 = 0,1}$ και $f_2 = 0,4 - 0,1 \Leftrightarrow \boxed{f_2 = 0,3}$ επομένως ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής

ΚΛΑΣΕΙΣ	x_i	f_i
50 – 60	55	0,1
60 – 70	65	0,3
70 – 80	75	0,2
80 – 90	85	0,4
ΣΥΝΟΛΟ		**1**

Γ3. Βρίσκουμε τις συχνότητες:

$\nu_1 = 0,1\nu$ και $x_1\nu_1 = 5,5\nu$

$\nu_2 = 0,3\nu$ και $x_2\nu_2 = 19,5\nu$

$\nu_3 = 0,2\nu$ και $x_3\nu_3 = 15\nu$

επίσης $\nu_4 = 0,4\nu$ άρα $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i \cdot \nu_i}{\nu - 0,4\nu} = \frac{5,5\nu + 19,5\nu + 15\nu}{0,6\nu} = \frac{40\nu}{0,6\nu} = \frac{200}{3}$

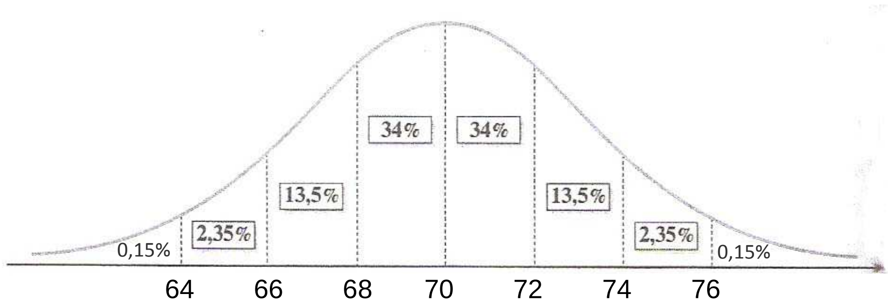
Γ4: Για τον υπολογισμό των $\bar{x}$ και s λύνουμε το σύστημα: $\left\{\begin{matrix} \bar{x} + 2s = 74 \\ \bar{x} - s = 68 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \bar{x} = 70 \\ s = 2 \end{matrix}\right\}$

Τα ποσοστά στα επιμέρους διαστήματα κατανέμονται ως εξής:

Στο (68,70) και (70,72) το 34% , στο (66,68) και (72,74) το $\left(\frac{95-68}{2}\right)\% = 13,5\%$, στο (64,66) και (74,76)

το $\left(\frac{99,7-95}{2}\right)\% = 2,35\%$ και

Για μικρότερο του 64 έχουμε 0,15% και για μεγαλύτερο του 76 έχουμε 0,15



Για την ομοιογένεια έχουμε:

$CV = \frac{s}{\overline{x}} = \frac{2}{70} = \frac{1}{35} < \frac{1}{10}$ άρα το δείγμα είναι ομοιογενές

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1 :Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι : (ε) : $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, όπου f(1)=k>1 και $f'(x) = \ln x + 1$, όπου $f'(1)=1$, οπότε (ε):y-k =x-1 ⇔ y=x+k-1

Σημεία τομής με άξονες:
x΄x : y=0 , άρα x=1-k<0 , A(1−k,0)
y΄y: x=0 , άρα y=κ-1>0 , B(0, K-1)

$E_{τριγ} = E_{AOB} = \frac{1}{2}|1-k||k-1| = \frac{1}{2}(k-1)(k-1) = \frac{1}{2}(k-1)^2$ θέλουμε

$E<2 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(k-1)^2 < 2 \Leftrightarrow (k-1)^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < k-1 < 2 \Leftrightarrow -1 < k < 3$, κ>1 και $k \in \mathbb{Z}$, άρα κ=2

Δ2: α) Η (ε) γίνεται : y=x+1

Τα σημεία (x_i, y_i) με i=1,2,……,50 και $\overline{y} = \overline{x} + 1 \Leftrightarrow \overline{x} = \overline{y} - 1 \Leftrightarrow \overline{x} = 31 - 1 \Leftrightarrow \overline{x} = 30$

Οι νέες τετμημένες γίνονται: (x_1+3) , (x_2+3), … , $(x_{20}+3)$, x_{21} , …., $(x_{36}-λ)$, …. , $(x_{50}-λ)$

Οπότε η νέα μέση τιμή $\overline{x_N}$ γίνεται:

$$\overline{x_N} = \frac{1}{50}\left[(x_1+3) + (x_2+3) + \ \dots + (x_{20}+3) + \ x_{21} + \dots + (x_{36}-λ) + \ \dots + (x_{50}-λ)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 31 \cdot 50 = (x_1 + x_2 + \ \dots + x_{20}) + (\ x_{21} + \dots + x_{35}) + (x_{36} + \dots + x_{50}) + 3 \cdot 20 + 15(-λ) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1550 = \sum_{i=1}^{50} x_i + 60 - 15λ \Leftrightarrow 1550 = 50\overline{x} + 60 - 15λ \Leftrightarrow 1550 = 50 \cdot 30 + 60 - 15λ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow λ = \frac{10}{15} \Leftrightarrow λ = \frac{2}{3}$$

Δ3: Είναι $f'(x) = \ln x + 1,\ x > 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{1}{e}}$ και

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow \boxed{x > \frac{1}{e}}$.

Έτσι ο πίνακας μεταβολών της f και προσήμου της f' γίνεται:

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Οπότε $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ επειδή $f(x)\geq f\left(\frac{1}{e}\right)$ για κάθε $x>0$.

Στο $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα από τη σχέση: $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ έχουμε:

$f\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$ επιπλέον έχουμε ότι $f'\left(\frac{1}{e}\right)=0$ άρα έχουμε τελικά:

$f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$ και επομένως : $R=f(e)-f'\left(\frac{1}{e}\right)=e+2-0=e+2$.

Μέση τιμή: $\bar{x}=\dfrac{f'\left(\frac{1}{e}\right)<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)}{5}=\dfrac{\alpha\ln\alpha+2+\beta\ln\beta+2+\gamma\ln\gamma+2+e+2}{5}=$

$\dfrac{\ln\alpha^{\alpha}+\ln\beta^{\beta}+\ln\gamma^{\gamma}+e+8}{5}=\dfrac{\ln(\alpha^{\alpha}\cdot\beta^{\beta}\cdot\gamma^{\gamma})+e+8}{5}=\dfrac{7+e+8}{5}=3+\dfrac{e}{5}$.

Δ4 : Αφού η γωνία που σχηματίζει με τον x'x είναι οξεία πρέπει

$f'(t)>0\Leftrightarrow \ln t+1>0\Leftrightarrow \ln t>-1\Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$

Άρα $A=\{t_{11},t_{12},\ldots,t_{30}\}$ με $N(A)=20$

$f(t)>f'(t)+1\Leftrightarrow t\cdot\ln t+2>\ln t+1+1\Leftrightarrow (t-1)\cdot\ln t>0$ που ισχύει για $t\in(0,1)$

Οπότε $B=\{t_1,t_2,\ldots,t_{29}\}$ αφού $t_{30}=1$. Έτσι $A\cap B=\{t_{11},t_{12},\ldots,t_{29}\}$ με $N(A\cap B)=19$

α. $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$

β. $P(A\cap B)=\dfrac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\dfrac{19}{30}$