

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

## ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

23 ΜΑΪΟΥ 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία, σελ. 31 σχολ. βιβλίου.  
A2. Θεωρία, σελ. 148 σχολ. βιβλίου.  
A3. Θεωρία, σελ. 96 σχολ. βιβλίου.  
A4. α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ.

### ΘΕΜΑ Β

B1. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% των παρατηρήσεων, από το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων θα είναι  $\delta = 25$ .

B2. Αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στο 50% και είναι  $\delta = 25$  θα είναι

$$\alpha + 4 + 3\alpha - 6 = 2\alpha + 8 + \alpha - 2 \Leftrightarrow \alpha + 3\alpha - 2\alpha - \alpha = -4 + 6 + 8 - 2 \Leftrightarrow \alpha = 8$$

Άρα ο πίνακας συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων θα είναι

χρόνος (λεπτά)	$x_i$	$v_i$	$f_i\%$	$N_i$	$F_i\%$
[5-15)	10	12	20	12	20
[15-25)	20	18	30	30	50
[25-35)	30	24	40	54	90
[35-45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B3.

$$\text{Είναι } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i x_i}{n} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = \frac{1440}{60} = 24 \text{ λεπτά.}$$

$$\text{Επίσης } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + v_3 (x_3 - \bar{x})^2 + v_4 (x_4 - \bar{x})^2}{n} =$$

$$= \frac{12(10-24)^2 + 18(20-24)^2 + 24(30-24)^2 + 6(40-24)^2}{60} =$$

$$= \frac{12 \cdot 195 + 18 \cdot 16 + 24 \cdot 36 + 6 \cdot 256}{60} = \frac{5040}{60} = \frac{504}{6} = 84.$$

Άρα η τυπική απόκλιση είναι  $S = \sqrt{s^2} = \sqrt{84} \approx 9,17$  λεπτά.

**B4.**

Από 35 έως 45 έχουμε το 10% των παρατηρήσεων και έστω  $x\%$  το ποσοστό των παρατηρήσεων από 37 έως 45. Τότε θα είναι:

$$\frac{45-35}{45-37} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow \frac{10}{8} = \frac{10}{x} \Leftrightarrow 10x = 80 \Leftrightarrow x = 8\%.$$

### ΘΕΜΑ Γ

**Γ1.** Αν  $\Gamma$  και  $I$  είναι τα ενδεχόμενα ένας μαθητής να μαθαίνει αντίστοιχα Γαλλικά, Ισπανικά, τότε είναι:

$$\begin{aligned} P(\Gamma \cup I) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)}{x(\sqrt{x^2+3}+2)} = 1. \end{aligned}$$

Άρα το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει τουλάχιστον μια από τις 2 γλώσσες είναι βέβαιο.

**Γ2.** Είναι  $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$ ,  $P(I) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$ ,  $P(\Gamma \cap I) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$ ,  $P(\Gamma \cup I) = 1$ .

Όμως  $P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I)$ , άρα:

$$1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow \nu^2+1 = 3\nu + \nu + 2 - \nu - 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0 \Leftrightarrow \nu = 0 \text{ ή } \nu = 3.$$

Επειδή  $\nu \geq 3$  προκύπτει  $\nu = 3$ .

**Γ3.** Το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες είναι το:

$$(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma).$$

$$\text{Είναι } P((\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)) = P(\Gamma) + P(I) - 2P(\Gamma \cap I) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

**Γ4.**  $P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$ . Όμως  $P(\Gamma \cap I) = \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)}$ .

$$\text{Έτσι } \frac{N(\Gamma \cap I)}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow \frac{32}{N(\Omega)} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80.$$

### ΘΕΜΑ Δ

**Δ1.** Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$f'(x) = \left( \frac{1 + \ln^2 x}{x} \right)' = \frac{x \left( 2 \frac{1}{x} \ln x \right) - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} = \frac{-\ln^2 x - 2 \ln x + 1}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2}$$

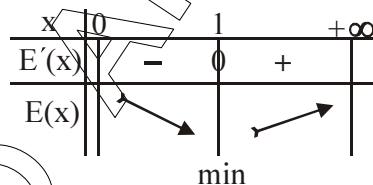
Επειδή είναι  $f'(x) < 0$  για κάθε  $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ ,  $f'(e) = 0$ , προκύπτει ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(0, +\infty)$ .

**Δ2.** Το εμβαδόν του ορθογώνιου ΟΛΜΚ είναι:  $E(x) = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x$ .

Η συνάρτηση  $E(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με:

$$E'(x) = (1 + \ln^2 x)' = 2 \ln x (\ln x)' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2 \ln x}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



$E(1) = 1 \cdot \frac{1 + \ln^2 \cdot 1}{1} = 1$ . Για την τιμή  $x = 1$ , έχουμε  $f(1) = 1$ , επομένως  $(ΟΛ) = (ΟΚ)$ , οπότε το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

**Δ3.** Επειδή η ευθεία  $\varepsilon: y = \lambda x + \beta$  είναι παράλληλη στην εφαπτόμενη της  $C_f$  στο σημείο  $\Sigma(1, f(1))$ , θα είναι:  $\lambda = f'(1) = -1$ .

Έτσι έχουμε:  $y = -x + \beta$ , με  $\beta \neq 10$ .

Επειδή η μέση τιμή των παρατηρήσεων  $x_i$  είναι  $\bar{x} = 10$  και  $y_i = (-1)x_i + \beta$  προκύπτει ότι:

$$\bar{y} = -10 + \beta \text{ και } S_y = |-1| \cdot S_x = 2$$

Για να είναι το δείγμα των παρατηρήσεων  $y_i$  με  $i = 1, 2, \dots, 10$  ομοιογενές θα πρέπει:

$$\frac{S_y}{|\bar{y}|} \leq 0,1.$$

$$\frac{s_y}{|\bar{y}|} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{|-\bar{x} + \beta|} \leq \frac{10}{100} \Leftrightarrow |-\bar{x} + \beta| \geq 20 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |-10 + \beta| \geq 20 \Leftrightarrow (-10 + \beta \leq -20 \text{ ή } -10 + \beta \geq 20) \Leftrightarrow \beta \leq -10 \text{ ή } \beta \geq 30.$$

Άρα:  $\beta \in (-\infty, -10] \cup [30, +\infty)$ .

**Δ4.**

- (i)  $A \subseteq A \cup B$  άρα  $P(A) \leq P(A \cup B)$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα είναι  $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$  (1)
- (ii)  $A \cap B \subseteq A \cup B$  άρα  $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$  και επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα είναι  $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$  (2)

Προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη έχουμε:  
 $f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$ .