ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα Α και Β ισχύει ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **Μονάδες 10**

Β. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής Χ που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν ($\kappa \le \nu$), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i, $i = 1, 2, \ldots, \kappa$. **Μονάδες 5**

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι $\left(f(x)g(x)\right)' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$ **Μονάδες 2**

β. Αν Α, Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ισχύει ότι $A - B = A \cap B'$ **Μονάδες 2**

γ. Για τη συνάρτηση f(x) = ημx ισχύει ότι (ημx)΄ = –συνx. **Μονάδες 2**

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής. **Μονάδες 2**

ε. Η μέση τιμή ενός συνόλου ν παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές x_i, i = 1, 2, 3, 4 μιας μεταβλητής Χ με αντίστοιχες συχνότητες ν_i, i = 1, 2, 3, 4. Η συχνότητα ν_2 που αντιστοιχεί στην τιμή $x_2 = 3$ είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με $\bar{x} = 4$.

x_i	ν_i
2	6
3	;
5	3
8	4

α. Να αποδείξετε ότι $\nu_2 = 7$. **Μονάδες 9**

β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9. **Μονάδες 9**

γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής Χ είναι ομοιογενές.
Δίνεται ότι $\sqrt{4,9} \approx 2,2$.
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3 - 6x^2 + \alpha x - 7$, όπου α πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2,\ x \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι α = 9 **Μονάδες 7**

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f'(x)}{x^2 - 1}$ **Μονάδες 8**

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y = –3x. **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \dfrac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2,\ x > 0$ όπου λ ένας πραγματικός αριθμός.

Α. α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η f είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 6**

β. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

Β. Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης f(2), f(4), f(8), f(3) και f(5) είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Χ.

α. Αν R είναι το εύρος και δ η διάμεσος των παρατηρήσεων, να δειχθεί ότι $R = 3 + \ln\dfrac{1}{4}$ και $\delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$ **Μονάδες 7**

β. Έστω ο δειγματικός χώρος Ω = {1, 2, 3, …, 100} ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το λ παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο Ω, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου $A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Σχολικό βιβλίο, σελ. 150.

Β. Σχολικό βιβλίο, σελ. 65.

Γ. **α.** → **Λ** **β.** → **Σ** **γ.** → **Λ** **δ.** → **Σ** **ε.** → **Σ**

ΘΕΜΑ 2ο

α. Έχουμε: $\bar{x} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{12 + 3\nu_2 + 15 + 32}{6 + \nu_2 + 3 + 4} = 4 \Leftrightarrow \dfrac{59 + 3\nu_2}{13 + \nu_2} = 4 \Leftrightarrow 59 + 3\nu_2 = 52 + 4\nu_2 \Leftrightarrow \nu_2 = 59 - 52 \Leftrightarrow \boxed{\nu_2 = 7}$

β.

x_i	ν_i	$x_i-\bar{x}$	$\left(x_i-\bar{x}\right)^2$	$\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2$
2	6	–2	4	24
3	7	–1	1	7
5	3	1	1	3
8	4	4	16	64
Σύνολο	**20**	**–**	**–**	**98**

Άρα $S^2=\dfrac{1}{20}\sum_{i=1}^{4}\nu_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\dfrac{98}{20}=4,9$ άρα $S=\sqrt{4,9}$.

γ. Είναι $CV=\dfrac{S}{|\bar{x}|}\cdot 100\%=\dfrac{\sqrt{4,9}}{4}\cdot 100\%$ δηλ. $CV=\dfrac{2,2}{4}\cdot 100\%=55\%$.

Αφού CV > 10%, το δείγμα των τιμών της μεταβλητής X δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 3ο

$f(x)=x^3-6x^2+\alpha x-7,\ \alpha\in\mathbb{R}$. Η f παραγωγίζεται ως πολυώνυμο με παράγωγο:

α. $f'(x)=3x^2-12x+\alpha$. Η f' παραγωγίζεται ως πολυώνυμο με παράγωγο:

$f''(x)=6x-12$.

Από τη δοσμένη σχέση έχουμε:

$2f''(x)+f'(x)+15=3x^2 \Leftrightarrow 2(6x-12)+3x^2-12x+\alpha+15=3x^2 \Leftrightarrow 12x-24-12x+\alpha+15=0 \Leftrightarrow \boxed{\alpha=9}$

Άρα $f(x)=x^3-6x^2+9x-7,\ x\in\mathbb{R}$.

β. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-12x+9}{(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)}=-\dfrac{6}{2}=-3$.

γ. Έστω $(x_0,\ f(x_0))$ σημείο της C_f. Επειδή η εφαπτομένη της C_f στο x_0 είναι παράλληλη στην y = –3x, έχουμε $f'(x_0)=-3 \Leftrightarrow 3x_0^2-12x_0+9=-3 \Leftrightarrow 3x_0^2-12x_0+12=0 \Leftrightarrow 3\left(x_0^2-4x_0+4\right)=0 \Leftrightarrow 3(x_0-2)^2=0 \Leftrightarrow \boxed{x_0=2}$

τότε f(2) = –5.

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι η $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y+5=-3x+6 \Leftrightarrow \boxed{y=-3x+1}$

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α. Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγισίμων στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2}$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=2}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x<2$.

x	0		2		$+\infty$
f'		+	0	–	
f		↗		↘	

Για κάθε $x\in(0,2]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και για κάθε $x\in[2,+\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β. Από **α.** η f παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$ το $f(2)=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1$.

Β. α. Έχουμε 2 < 3 < 4 < 5 < 8 και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2,+\infty)$ άρα f(8) < f(5) < f(4) < f(3) < f(2)

Άρα $R=f(2)-f(8)=\ln 2+\lambda^2-6\lambda+1-\ln 8+2-\lambda^2+6\lambda=\ln 2-\ln 8+3=3+\ln\dfrac{1}{4}$

Επειδή το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό έχουμε $\delta=f(4)=\ln 4+\lambda^2-6\lambda$.

β. $R+\delta<-2 \Leftrightarrow 3+\ln\dfrac{1}{4}+\ln 4+\lambda^2-6\lambda<-2 \Leftrightarrow \lambda^2-6\lambda+5<0$

Άρα $\lambda^2-6\lambda+5<0 \Leftrightarrow \lambda\in(1,5)$ όπου $\lambda\in\Omega$. Άρα $A=\{2,3,4\}$ με N(A) = 3 και N(Ω) = 100

Από κλασικό ορισμό πιθανότητας έχουμε $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{100}$.

ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ
ΑΓΓΕΛΟΣ ΚΟΥΡΚΟΥΛΟΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ • ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ
ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΚΑΡΑΜΗΤΡΟΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ • ΜΗΝΑΣ ΒΛΑΣΑΚΗΣ