ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c,\ c\in\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Α2. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f; **Μονάδες 4**

Α3. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ; **Μονάδες 5**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α. Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών αριθμών α+βi και γ+δi είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

β. Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της δεν είναι υποχρεωτικά θετική στο εσωτερικό του Δ.

γ. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β), τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα (Α,Β),
όπου $A=\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $B=\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x)$

δ. $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

ε. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<0$, τότε $f(x)<0$ κοντά στο x_0

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $z+\dfrac{2}{z}=2$ όπου $z\in C$ με $z\neq 0$.

Β1. Να βρείτε τις ρίζες z_1 και z_2 της εξίσωσης. **Μονάδες 7**

Β2. Να αποδείξετε ότι $z_1^{2010}+z_2^{2010}=0$ **Μονάδες 6**

Β3. Αν για τους μιγαδικούς αριθμούς w ισχύει $|w-4+3i|=|z_1-z_2|$ τότε να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο. **Μονάδες 7**

Β4. Για τους μιγαδικούς αριθμούς w του ερωτήματος **Β3**, να αποδείξετε ότι $3\leq |w|\leq 7$ **Μονάδες 5**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f. **Μονάδες 5**

Γ2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$ **Μονάδες 7**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα ψ΄ψ. **Μονάδες 6**

Γ4. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{-1}^{1} xf(x)dx$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x)\neq x$$

$$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 5**

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x),\ x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή. **Μονάδες 7**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 6**

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **Μονάδες 7**

εκπαιδευτικός οργανισμός
ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ
ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. βιβλ., σελ. 304
Α2. Σχ. βιβλ., σελ. 279
Α3. Σχ. βιβλ., σελ. 273
Α4. **α.** $\to$ **Σ** **β.** $\to$ **Σ** **γ.** $\to$ **Λ** **δ.** $\to$ **Λ** **ε.** $\to$ **Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $z+\dfrac{2}{z}=2 \Leftrightarrow z^2+2=2z \Leftrightarrow z^2-2z+2=0.$ $\Delta = 4-4\cdot 2=-4<0.$ $z_{1,2}=\dfrac{2\pm i\sqrt{4}}{2}=\dfrac{2\pm 2i}{2}.$

Τελικά $z_1 = 1 + i$ και $z_2 = 1 - i$

Β2. $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(1+i)^{2010}+(1-i)^{2010}=\left[(1+i)^2\right]^{1005}+\left[(1-i)^2\right]^{1005}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=0.$

Β3. $|z_1-z_2|=|1+i-1+i|=|2i|=2.$ Άρα $|w-4+3i|=2 \Leftrightarrow |w-(4-3i)|=2.$

Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών w είναι κύκλος κέντρου Κ(4, –3) και ρ = 2.

Β4. Αν Ο(0, 0) και Κ(4, – 3), έχουμε $(OK)=\sqrt{4^2+3^2}=5.$ Επειδή (ΟΚ) = 5 > ρ, το Ο είναι έξω από τον κύκλο.

Τότε το ελάχιστο $|w|=(OK)-\rho=3$ και το μέγιστο $|w|=(OK)+\rho=7.$ Οπότε $3\le |w|\le 7.$

<u>Σχόλιο</u>: Το παραπάνω ερώτημα λύνεται και με τριγωνική ανισότητα.

$\big||w|-|4-3i|\big|\le |w-(4-3i)| \Leftrightarrow \big||w|-5\big|\le 2 \Leftrightarrow -2\le |w|-5\le 2 \Leftrightarrow \boxed{3\le |w|\le 7}.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ ως σύνθεση και άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1}=\dfrac{2(x^2+x+1)}{x^2+1}>0$ αφού $x^2+x+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$ επειδή $\Delta<0$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Γ2. $2(x^2-3x+2)=\ell n\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right] \Leftrightarrow 2(x^2-3x+2)=\ell n\left[(3x-2)^2+1\right]-\ell n(x^4+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ell n(x^4+1)+2x^2=\ell n\left[(3x-2)^2+1\right]+2(3x-2) \Leftrightarrow f(x^2)=f(3x-2) \underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}} x^2=3x-2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$

Γ3. Έχουμε $f'(x)=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1}$ και παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ ως ρητή με

$f''(x)=\dfrac{(4x+2)(x^2+1)-2x(2x^2+2x+2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4x^3+4x+2x^2+2-4x^3-4x^2-4x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow -2x^2+2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$

$f''(x)>0 \Leftrightarrow -2x^2+2>0 \Leftrightarrow 2x^2<2 \Leftrightarrow x^2-1<0 \Leftrightarrow x\in(-1,1)$

Έχουμε

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\frown$		$\smile$		$\frown$	

Η f είναι κοίλη στο $(-\infty,-1]$ και στο $[1,+\infty)$ και κυρτή στο $[-1, 1]$.

Παρουσιάζει σημεία καμπής τα Α(–1, ln2 – 2) και Β(1, ln2 + 2).

Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι ε_1: $y=f'(-1)(x+1)+f(-1)=x+1+\ln 2-2=x+\ln 2-1$

Η εφαπτομένη της C_f στο Β είναι ε_2: $y=f'(1)(x-1)+f(1)=3x-3+\ln 2+2=3x-1+\ln 2$

Η ε_1 τέμνει την ε_2 όταν x + ln2 – 1 = 3x – 1 + ln2

$\boxed{x=0}$ τότε y = ln2 – 1

Άρα το σημείο τομής τους είναι Γ(0, ln2 – 1)

Γ4. $I=\int_{-1}^{1}xf(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(2x^2+x\ln(x^2+1)\right)dx=\left[2\dfrac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx=\dfrac{2}{3}+\dfrac{2}{3}+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx=\dfrac{4}{3}+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx$

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

Θέτουμε $x^2 + 1 = u$ άρα για $x_1 = -1$ τότε $u_1 = 2$ και για $x_2 = 1$ τότε $u_2 = 2$ και $2xdx = du$ άρα:

$$I = \frac{4}{3} + \int_2^2 \ln u \frac{du}{2} = \frac{4}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)-t}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών, άρα η συνάρτηση $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επομένως, η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων.

Έχουμε: $f(x) = \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt + x + 3$. Άρα $f'(x) = \frac{x}{f(x)-x} + 1 = \frac{f(x)}{f(x)-x}$.

Δ2. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγισίμων συναρτήσεων με

$$g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 2f'(x)(f(x)-x) - 2f(x) = 2\frac{f(x)}{f(x)-x}\cdot(f(x)-x) - 2f(x) = 0$$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Δ3. Από **Δ2** έχουμε $g(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ με $g(0) = f^2(0) = 9$ άρα $c = 9$

Τότε $g(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) = 9 \Leftrightarrow f^2(x) - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow (f(x)-x)^2 = x^2 + 9 \Leftrightarrow |f(x)-x| = \sqrt{x^2+9}$

Όμως $f(x) - x \neq 0$ και συνεχής άρα διατηρεί πρόσημο. Επειδή f(0) – 0 = 3 >0 τότε $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$.

Δ4. Έστω $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

Η g παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = f(x)$

$g''(x) = f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+9}} > 0$ γιατί $\forall x \in \mathbb{R}$ το $x^2 < x^2 + 9 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow -\sqrt{x^2+9} < x < \sqrt{x^2+9}$

Άρα $x + \sqrt{x^2+9} > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0$

Επομένως η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Από Θ.Μ.Τ στο [x, x + 1] και στο [x + 1, x + 2] υπάρχουν $x_1 \in (x, x+1)$ και $x_2 \in (x+1, x+2)$ τέτοια ώστε $g'(x_1) = g(x+1) - g(x)$ και $g'(x_2) = g(x+2) - g(x+1)$

όμως $x_1 < x_2 \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} g'(x_1) < g'(x_2) \Leftrightarrow g(x+1) - g(x) < g(x+2) - g(x+1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^{x+1} f(t)dt - \int_0^x f(t)dt < \int_0^{x+2} f(t)dt - \int_0^{x+1} f(t)dt \Leftrightarrow \int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$

<u>Σχόλιο</u>: Το ερώτημα λύνεται και με την μονοτονία της $g(x) = \int_x^{x+1} f(t)dt$.

<u>ΟΜΑΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Ε.Ο. «ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ»</u>

ΓΙΩΡΓΟΣ ΜΑΝΔΑΛΑΚΗΣ • ΓΡΗΓΟΡΗΣ ΚΥΡΙΑΚΑΚΗΣ • ΜΑΝΟΛΗΣ ΑΘΑΝΑΣΑΚΗΣ

ΑΓΓΕΛΟΣ ΚΟΥΡΚΟΥΛΟΣ • ΓΙΩΡΓΟΣ ΚΑΡΑΛΗΣ • ΜΑΡΙΑ ΠΕΤΡΑΚΗ

ΒΑΝΑ ΚΑΤΣΟΥΛΗ • ΛΕΩΝΙΔΑΣ ΚΑΡΑΜΗΤΡΟΣ • ΒΑΣΙΛΗΣ ΚΑΡΑΤΖΙΑΣ

ΝΙΚΟΣ ΣΤΑΥΡΟΥΛΑΚΗΣ • ΛΟΥΚΙΑ ΛΕΩΝΙΔΟΥ

εκπαιδευτικός οργανισμός

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ

ΗΡΑΚΛΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ