

ΓΕΝΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 2008

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΑΞΗ Α'

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού a Μονάδες 5
- B.** Αν $a \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι να αποδείξετε ότι: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$ Μονάδες 10
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Αν $ax + \beta > 0$ και $a < 0$, τότε $x > -\frac{\beta}{a}$ Μονάδες 2
- β.** Ισχύει $\sqrt{x^2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 2
- γ.** Αν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$, τότε πάντοτε ισχύει $a \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$ Μονάδες 2
- δ.** Ισχύει $|a| \geq a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ Μονάδες 2
- ε.** Οι ευθείες $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ είναι κάθετες αν και μόνο αν $a_1 \cdot a_2 = 1$ Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{|x-3|-2}{3} - \frac{12-|3-x|}{2} > \frac{5|x-3|-36}{4} - 1$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda + 1 \\ x + \lambda y = 2\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

- α.** Να βρείτε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και να τις παραγοντοποιήσετε Μονάδες 12
- β.** Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 1)x - (\lambda + 1) = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$

- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10
- β.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να υπολογίσετε τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ Μονάδες 3
- γ.** Να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 \leq 12$ Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ και $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 \cdot x_2$ είναι

το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$

Μονάδες 13

B. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

α. $\sqrt[m]{\sqrt[m]{a}} = \dots$

β. Αν $\theta > 0$ και $|x| \leq \theta \Leftrightarrow \dots$

γ. Αν $|x| = |a| \Leftrightarrow \dots$

Μονάδες 6

Γ. Να σημειώσετε αν είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\sqrt{a^2} = a$, όπου a πραγματικός

β. $|a + \beta| = |a| + |\beta|$, a, β πραγματικοί

γ. Αν a, γ ετερόσημοι, τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει πάντα πραγματικές ρίζες

Θέμα 2^ο

A. Να λυθούν οι εξισώσεις: $x^2 - 3x + 2 = 0$ και $9 - x^2 = 0$

Μονάδες 9

B. Αν $P(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)(9 - x^2)}{2x - 4}$ να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$

Μονάδες 16

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda(2 - x)$ και $\varepsilon_2: y = (\lambda^2 + 1)x - \lambda x + 4$

α. Για ποια τιμή του λ οι ευθείες είναι κάθετες;

Μονάδες 7

β. Για $\lambda = 1$ να βρείτε το σημείο τομής των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Μονάδες 6

γ. Να βρεθούν τα κ, μ ώστε το σημείο $B(\kappa, 2)$ να ανήκει στην ε_1 και το σημείο

$\Gamma(-4, \mu)$ στην ε_2

Μονάδες 6

δ. Να βρεθεί η απόσταση (BΓ)

Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda - 2 = 0$

α. ΝΔΟ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 6

β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της και $3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 = 18$, να βρεθεί το λ

Μονάδες 6

B. Να δειχθεί ότι: $(\lambda^2 - \lambda + 2)x^2 - 2x + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Να δείξετε ότι $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$. Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

α. Αν $x, y \geq 0$ τότε $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{(-x)^2} = |x|$

γ. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $x^2 + y^2 \geq 2xy$

δ. Αν $x + y < y$ τότε $x < 0$

ε. Η εξίσωση $αx = 0$ είναι αδύνατη Μονάδες 10

Θέμα 2°

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{|x-1|+2}{3} + \frac{|1-x|}{4} = \frac{|x-1|+3}{4}$ Μονάδες 25

Θέμα 3°

Δίνονται οι ανισώσεις: $\begin{cases} |2x-1| \leq 5 \\ 2x^2+3x-5 \leq 0 \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις.

Μονάδες 25

Θέμα 4°

α. Να λυθεί το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ -4x + \lambda y = 0 \end{cases}$ Μονάδες 5

β. Αν D, D_x, D_y είναι οι ορίζουσες του συστήματος να δείξετε ότι η εξίσωση

$\omega^2 - 2\omega - D + D_x - \sqrt{D_y} = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες. Μονάδες 10

γ. Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της προηγούμενης εξίσωσης.

Μονάδες 4

δ. Να λυθεί η εξίσωση $S^2 - 2P + 10\lambda = 0$ όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της προηγούμενης εξίσωσης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Αν $a, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \sqrt[3]{a \cdot \beta}$

B. Να χαρακτηρίσετε (Σ) Σωστή ή (Λ) Λανθασμένη κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Το σύστημα (Σ) $\begin{cases} 2x + y = 7 \\ 6x + 3y = 20 \end{cases}$ είναι αδύνατο

β. Αν $a \geq 0, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt{a+\beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$.

γ. Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε ισχύει πάντοτε $a\gamma > \beta\delta$

δ. Για κάθε x πραγματικό είναι $|x|^2 = x^2$

ε. Αν στην εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, οι αριθμοί a, γ είναι ετερόσημοι, τότε έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Γ. Κάθε στοιχείο της στήλης (A) αντιστοιχεί με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B). Να κάνετε τη σωστή αντιστοίχιση :

Μονάδες 9 + 10 + 6

Στήλη (A) Σχέσεις	Στήλη (B) $ax^2 + bx + \gamma > 0$
1. $\Delta < 0$ και $a < 0$	α. Αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$
2. $\Delta < 0$ και $a > 0$	β. Αληθεύει για κάθε x μεταξύ των ριζών
3. $\Delta > 0$ και $a \neq 0$	γ. Αληθεύει για κάθε x εκτός των ριζών
	δ. Δεν αληθεύει για κανένα x
	ε. Δεν μπορούμε να απαντήσουμε για ποια x αληθεύει η ανίσωση

Θέμα 2°

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $A = |1 - 3x|$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 3| = 5$

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 3| - 2 < 3$

Μονάδες 7 + 8 + 10

Θέμα 3°

α. Να λυθεί και να διερευνηθεί η εξίσωση: $(\lambda^2 - 1)x = \lambda^2 + 3\lambda + 2$

β. Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} (\kappa+1)x - 2y = \kappa+1 \\ \kappa x - \kappa y = 1 \end{cases} \quad \kappa \in \mathbb{R}$

i) Για ποιες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει άπειρες λύσεις;

ii) Να γράψετε την μορφή των απείρων λύσεων.

Μονάδες 10 + 15

Θέμα 4°

Δίνεται η εξίσωση : $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 1 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\lambda \neq 2$

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \neq 2$

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε να ισχύει:

$$x_1 + x_2 \geq \lambda$$

Μονάδες 10 + 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι : $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ Μόρια 13

B. Σε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη). Τις προτάσεις να τις μεταφέρετε στην κόλλα σας.

1. $\sqrt{a^2} = a$, $a \in \mathbb{R}$.

2. Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$ με $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει πάντοτε $a\gamma > \beta\delta$

3. Οι ευθείες με εξισώσεις : $\psi = 0,5x + 3$ και $\psi = \frac{2}{4}x - 1$ είναι παράλληλες.

4. Το πρόσημο του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ είναι αρνητικό όταν: $\Delta < 0$ και $a > 0$

Μόρια 12

Θέμα 2°

1. Να λυθεί η εξίσωση : $|x - 3| = x^2 + 1$. Μόρια 13

2. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση

$(\lambda^2 + \lambda - 2)x = 2\lambda - 2$ να έχει άπειρες λύσεις. Μόρια 12

Θέμα 3°

Δίνονται οι ευθείες :

(ϵ_1) με εξίσωση $y = (a^2 - \beta^2)x + 3$ και (ϵ_2) με εξίσωση $y = 2(a + \beta)x - 5$.

Να βρεθούν οι $a, \beta \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζουμε ότι :

i. Η ευθεία (ϵ_2) διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$

ii. Οι ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) είναι παράλληλες. Μόρια 25

Θέμα 4°

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda + 1 = 0$.

A. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει πραγματικές ρίζες.

Μόρια 10

B. Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$x_1 + x_2 = -4$. Μόρια 07

Γ. Για την τιμή του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = (x_1 + 2)(x_2 + 2)$, όπου x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης

$x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda + 1 = 0$. Μόρια 08

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής του πραγματικού αριθμού a .

Μονάδες 3

B. Να αποδείξετε ότι: αν $\theta > 0$, $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

Μονάδες 10

Γ. Να γράψετε αν είναι σωστοί (Σ) ή λάθος (Λ), οι παρακάτω ισχυρισμοί:

α. $|a + \beta| = |a| + |\beta|$, $\forall a, \beta \in \mathbb{R}$.

β. $|x|^2 = x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

γ. $|x + 2| + 7 = 0$ είναι αδύνατη, $\forall x \in \mathbb{R}$

δ. Αν $|a| + |\beta| = 0$ τότε $a = 0$ ή $\beta = 0$

ε. $|x| > -1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = 4$

Μονάδες 10

B. Αν $A = 1 + \sqrt{2}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$K = A^2 - 2A + 1$$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 10x + (\lambda + 10)y = 2\lambda + 10 \\ (3\lambda + 10)x + (4\lambda + 10)y = 5\lambda + 14 \end{cases}$$

A. Να βρεθεί το λ για να είναι το σύστημα αδύνατο

Μονάδες 13

B. Για $\lambda = 0$ να δείξετε ότι το σύστημα
$$\begin{cases} (\mu + \lambda)x + y = 1 \\ -x + (\mu - 3\lambda)y = 1 \end{cases}$$

έχει μοναδική λύση

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 - (a + 1)x + 2a - 1 = 0$ (1)

A. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

Μονάδες 13

B. Αν x_1, x_2 οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1) να βρείτε το $a \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 3$$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι, αν $\theta > 0$ τότε $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$ Μονάδες 10

B₁. Να λυθεί η ανίσωση: $|x - 2| < 6$ Μονάδες 10

B₂. Να γίνει η αντιστοίχιση:

α. $|x| > 5$

1. $x \in \{1, 5\}$

β. $|3 - x| = 2$

2. Αδύνατη

γ. $|x + 5| = -10$

3. $x \in (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

δ. $|x - 5| > -10$

4. $x \in \mathbb{R}$

5. $x < -5$ ή $x > 15$ Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

A. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που έχει συντελεστή διεύθυνσης -4 και διέρχεται από το σημείο A(2, -3).

Στη συνέχεια να γίνει η γραφική της παράσταση.

Μονάδες 15

B. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ οι ευθείες :

$\varepsilon_1: y - 6x = 2ax$ και $\varepsilon_2: y = (a - 1)x + 5$ είναι παράλληλες;

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

A. Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 5x - 6y = 5 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

Μονάδες 15

B. Να βρείτε τις τιμές του λ έτσι ώστε η δευτεροβάθμια εξίσωση:

$4x^2 + 5x + \lambda^2 = 0$ να έχει ακριβώς μία διπλή ρίζα ως προς x .

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

A. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\frac{2x^2 - 8x + 8}{x^3 - 5x^2 + 6x}$

Μονάδες 10

B. Να λυθεί η παρακάτω ανίσωση:

$$\frac{4x^2 + 7x + 3}{(x + 1) \cdot (x^2 + 7)} \geq 0$$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Να βρείτε:

α. Το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και Μονάδες 10

β. Το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών αυτών Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

A. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. $|-4| < 0$

β. $|x - 3| = |-x + 3|$

γ. $|-7|^2 = (-7)^2$

δ. $|(+2008) + (-8)| = |+2008| + |-8|$

ε. $6 + |x - 9| = x + 15$ Μονάδες 10

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|x-8|+2}{7} - \frac{|x-8|}{3} = \frac{9-5|x-8|}{21}$$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

α.
$$\begin{pmatrix} -2008 & 8 \\ -251 & 0 \end{pmatrix}$$

β.
$$\begin{pmatrix} xy^2 & x^3 \\ y^3 & x^2y \end{pmatrix}$$

Μονάδες 10

B. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -7 \\ 5x + 7y = -1 \end{cases}$$

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$	Συντελεστές		
	a	b	γ
α. $-x + 3 + 5x^2 = 0$			
β. $-x^2 + 2x + 4 = 0$			
γ. $x^2 - 7x = 10$			
δ. $8x^2 = 6x$			
ε. $x^2 - 9 = 0$			

Μονάδες 10

B. Να λύσετε την ανίσωση: $(7 - x)(x^2 - 2x - 3) \geq 0$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Να βρείτε:

α. Το άθροισμα $S = x_1 + x_2$

Μονάδες 10

β. Το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$

Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

A. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. $|-4| < 0$

β. $|x - 3| = |-x + 3|$

γ. $|-7|^2 = (-7)^2$

δ. $|(+2008) + (-8)| = |+2008| + |-8|$

ε. $6 + |x - 9| = x + 15$

Μονάδες 10

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{|x| - 4}{5} = \frac{|x| - 3}{2} + \frac{4|x| - 1}{3}$$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 2y = 11 \\ 3x - y = 5 \end{cases}$$

Μονάδες 10

B. Να λύσετε τις ανισώσεις:

α. $x^2 - 5x + 6 < 0$

β. $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$

γ. $x^2 + x + 1 > 0$

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α. $x^2 - 4x + 3 = 0$

Μονάδες 5

β. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

Μονάδες 5

γ. $x^2 - x + 6 = 0$

Μονάδες 5

δ. $(2x - 1) \cdot (x + 1) = 2$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω x_1, x_2 ρίζες της $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$. να δείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 9}$$

B. Να δώσετε τους ορισμούς :

α. της νιοστής ρίζας ενός θετικού αριθμού $a, v \in \mathbb{N}$

β. της συνάρτησης από ένα σύνολο A σ' ένα σύνολο B. Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίστε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις προτάσεις :

α. $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, a > 0$

β. αν $\alpha, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt[v]{\alpha \cdot \beta} = \sqrt[v]{\alpha^v \cdot \beta}$

γ. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μία λύση, όταν $a = 0$ και $\beta \neq 0$

δ. Η απόσταση 2 σημείων $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο

$$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

ε. Για τις ευθείες $\varepsilon_1: y = a_1x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = a_2x + \beta_2$ ισχύει: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 \cdot a_2 = -1$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{|x-2|-4}{2} = \frac{|2-x|}{3} - \frac{5}{3}$ Μονάδες 9

B. Να λυθεί η ανίσωση: $|-2x+1| - 3 \leq 0$ Μονάδες 9

Γ. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{81} - \sqrt[3]{27} - \sqrt[4]{16}}{\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{32} + \sqrt[4]{81}} = \frac{4}{3}$ Μονάδες 6

Θέμα 3^ο :

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 3)x + 1 = 0$ (1)

A. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες .

B. Να δικαιολογήσετε (με δεδομένο το A), γιατί οι ρίζες της (1) είναι αντίστροφες :

Γ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε να ισχύει $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 4$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1)

Μονάδες 13 + 5 + 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα :
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

A. Να βρείτε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και να τις παραγοντοποιήσετε Μονάδες 9

B. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το (Σ) έχει μοναδική λύση, και να υπολογιστεί η λύση αυτή συναρτήσει του λ Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το (Σ) είναι αόριστο και να βρείτε τις άπειρες λύσεις του.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι, αν $\theta > 0$ τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του Πεδίου Ορισμού της;
- B.** Να χαρακτηρίσετε στο γραπτό σας την κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις, ως σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**)
- α.** $d(\alpha, \beta) = |\alpha + \beta|$
- β.** Η εξίσωση $|x + 1| + |x + 2| = -1$, είναι αδύνατη
- γ.** Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha - \gamma < \beta - \delta$
- δ.** Η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, αν $\beta^2 - 4a\gamma > 0$.
- ε.** Αν $\varepsilon_1: y = a_1x + \beta_1$, $\varepsilon_2: y = a_2x + \beta_2$ ισχύει $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$.

Θέμα 2^ο

- α.** Αν $\alpha > 1 > \beta$ τότε $\alpha + \beta > 1 + \alpha\beta$
- β.** Αν $2 < \alpha < 4$ και $3 \leq \beta \leq 5$, να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχεται η παράσταση:
 $2\alpha - \beta$.

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \lambda - \sqrt{x + 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρεθεί το Πεδίο Ορισμού της f .
- β.** Αν η γραφική παράσταση της f , διέρχεται από το $A(3, 1)$ να βρεθεί το λ .
- γ.** Για $\lambda = 3$ να βρείτε τα σημεία τομής της f με τους άξονες xx' και yy' .
- δ.** Για $\lambda = 3$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της.

Θέμα 4^ο

Αν οι x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - kx + \lambda = 0$

- α.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: **i.** $x_1 + x_2$ **ii.** $x_1 \cdot x_2$ **iii.** $x_1^2 + x_2^2$
- β.** Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\rho_1 = x_1 + 2$ και $\rho_2 = x_2 + 2$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Δίνονται οι διακεκριμένες ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$, αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι: $\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2$.

Μονάδες 12

B. Πότε δύο συστήματα εξισώσεων λέγονται ισοδύναμα.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Αν για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ισχύει $a \cdot \gamma < 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη στο \mathbb{R}

Μονάδες 2

β. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $\alpha\gamma < \beta\delta$ για κάθε $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 2

γ. Αν x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ τότε $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$.

Μονάδες 2

δ. Αν $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ τότε $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$, όπου n θετικός ακέραιος.

Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Έστω $\alpha = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$.

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 2$.

Μονάδες 8

β. Για $\alpha = 2$ **i.** Να λύσετε την εξίσωση $|\alpha - x| = 2$.

Μονάδες 8

ii. Να λύσετε την ανίσωση $|3\alpha - 2x| < 4$.

Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Θεωρούμε την εξίσωση $2x^2 + 3x + \lambda = 0$ με x άγνωστο και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει ρίζες στο \mathbb{R} . Μονάδες 8

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $4(x_1 + x_2)^2 + 2x_1 x_2 = 4$, όπου x_1, x_2 οι

ρίζες της εξίσωσης

Μονάδες 9

γ. Για $\lambda = -5$ να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $\rho_1 = x_1 + 2$

και $\rho_2 = x_2 + 2$

Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda+1)x - \lambda y = \lambda+3 \\ \lambda x + y = \lambda + 4 \end{cases}$$
, όπου x, y άγνωστοι και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β. Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος.

γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $3x_0, -\lambda y_0 \geq 9$.

Μονάδες 8 + 8 + 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αν $\theta > 0$ να αποδείξετε ότι: $|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$
- B.** Τι ονομάζουμε n -οστή ρίζα (n θετικός ακέραιος) ενός μη αρνητικού αριθμού a και τι παριστάνει;
- Γ.** Να συμπληρώσετε τις παρακάτω μαθηματικές σχέσεις αφού τις μεταφέρετε στην κόλλα σας, έτσι ώστε να ισχύουν:
- α.** Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει λύση το μηδέν αν.....
- β.** $d(1, x) = \dots\dots\dots$
- γ.** Έστω ένα σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους. Εάν ισχύει $D = D_x = 0$ και $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα είναι.....
- δ.** Έστω το δευτεροβάθμιο τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$. Αν $\Delta < 0$ ρίζες και το πρόσημό του
- ε.** $\sqrt[3]{a} \sqrt[3]{\beta} = \dots\dots\dots$ Μονάδες 10 + 5 + 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = \left(\frac{3|a-2|-2}{2} - \frac{|2-a|-1}{3} \right) x + 5$ και

$\epsilon_2: y = \left(\frac{3|a-2|-2}{4} + \frac{3}{2} \right) x + 12$

Να βρεθούν οι τιμές του a , ώστε να είναι παράλληλες. Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Έστω το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda - 3 \\ 2x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

- α.** Να βρεθεί η λύση του συστήματος όταν $D \neq 0$
- β.** Εάν η λύση του συστήματος για $\lambda = 1$ είναι το σημείο $A(x, y)$ να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε η απόσταση του A από το σημείο $B(\kappa, 3)$ να είναι 5.

Μονάδες 15 + 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0$. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης, τότε χωρίς να βρεθούν οι ρίζες με χρήση της διακρίνουσας:

A. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

α. $\rho_1^2 \cdot \rho_2 + \rho_1 \cdot \rho_2^2$

β. $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$

γ. $\rho_1^2 + \rho_2^2$

B. Να λυθεί η ανίσωση για τις διάφορες τιμές του x :

$(x + 1) \left[x^2 + (\rho_1^2 \cdot \rho_2 + \rho_1 \cdot \rho_2^2) x - 1 \right] \geq 0$

Μονάδες 12 + 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta \geq 0$, να δείξετε

$$\text{ότι: } x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}.$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) τις σωστές και με (Λ) τις λανθασμένες, αν $x, a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $\sqrt{x^2} = x$

β. Αν $a \geq 0$, τότε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$ (μ, ν θετικοί ακέραιοι)

γ. Αν $|x| > 1$ τότε: $x > 1$ ή $x < -1$

δ. Αν $a < 3$ τότε: $|a - 3| = a - 3$

ε. Αν $\gamma > 0$ τότε: $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma$

Θέμα 2^ο

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|x - 1| - 4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x - 1|}{3}$

Θέμα 3^ο

Για τις διάφορες τιμές του λ να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\lambda + 2)y = 5 \end{cases}$$

Θέμα 4^ο

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{(x^2 - 16) \cdot (x^2 - x + 1)}{x^2 - 5x + 6} \leq 0$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$, να δειχτεί ότι :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστή (Σ) ή λάθος (Λ).

α. $|x|^2 = x^2$

β. $\sqrt{6} = \sqrt[3]{10}$

γ. Αν $a < \frac{\beta}{2}$ τότε $|2a - \beta| = 2a - \beta$

δ. Αν $|a| + |\beta| = 0$ τότε $a = \beta = 0$

ε. Η εξίσωση $ax + \beta = 0$ με $a = 0$ και $\beta \neq 0$ είναι αόριστη. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2|2x-1|+1}{3} - \frac{|2x-1|-1}{2} = \frac{1}{2}$ Μονάδες 12

B. Να λυθεί η ανίσωση $|x+2|+2 \leq |4+2x|$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα: $(\Sigma) = \begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 2x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases}$

A. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση. Μονάδες 9

B. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε το (Σ) να είναι αδύνατο. Μονάδες 9

Γ. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε για την μοναδική λύση του (Σ) (x_0, y_0) να ισχύει η σχέση $x_0 - y_0 \leq 1$ Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda - 1 = 0$ (1) ($\lambda \neq 1$).

A. Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ως ρίζες τους αριθμούς ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1 = \frac{x_1}{x_2}$ και $\rho_2 = \frac{x_2}{x_1}$ Μονάδες 12

B. Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση που βρήκατε από τη σχέση (A) να έχει διπλή ρίζα. Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε την πρόταση: Αν $\theta > 0$, τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 10
- B.** Να γράψετε στην κόλλα σας συμπληρωμένες τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιττή αν για κάθε $x \in A$ ισχύει:
- i.** και **ii.**
- β.** Δύο ευθείες $\epsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\epsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες μόνον όταν ισχύει η σχέση
- γ.** Αν μ, ν, κ, ρ , θετικοί ακέραιοι και $a \geq 0$ τότε:
- i.** $\sqrt[\nu]{a^\kappa} = \dots\dots\dots$
- ii.** $\sqrt[\nu\rho]{a^{\mu\rho}} = \dots\dots\dots$
- iii.** $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \dots\dots\dots$ Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

- A.** Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:
- $$f(x) = \frac{5x}{|x-1|+3} \text{ και } \frac{x-4}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$
- Μονάδες 10
- B.** Να λυθεί η ανίσωση $\frac{|x-3|-1}{6} + \frac{|3-x|-1}{4} \leq 2 + \frac{|3-x|+5}{6}$ Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

- Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (\sqrt{\lambda^2 - 6\lambda + 9} - 4)x^2 - 9$, με $\lambda > 0$ και $x \in \mathbb{R}$
- A.** Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον xx' στο σημείο $(3,0)$, να αποδείξετε ότι:
- α.** $\lambda = 8$ Μονάδες 8
- β.** $f(x) = x^2 - 9$ Μονάδες
- B.** Για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 9$.
- α.** Να αποδείξετε ότι είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της. Μονάδες 3
- β.** Να βρείτε την κορυφή της και να τη μελετήσετε ως προς την μονοτονία της.
- γ.** Να βρείτε τα σημεία που η γραφική της παράσταση τέμνει τους άξονες xx' και yy' . Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

- Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (3\lambda - 1)x + \left(\frac{37}{4} - \frac{3\lambda}{2}\right) = 0$ με $\lambda > 2$
- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Μονάδες 5
- β.** Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε συναρτήσει του λ τις παραστάσεις $x_1 + x_2$ και $x_1 x_2$ Μονάδες 5
- γ.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $2x_1 + 1$ και $2x_2 + 1$ είναι η: $x^2 - 6\lambda x + 36 = 0$ Μονάδες 7
- δ.** Αν η εξίσωση $x^2 - 6\lambda x + 36 = 0$ έχει μία ρίζα $x = 4$ να βρεθεί η δεύτερη ρίζα της. Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να γράψετε και να αποδείξετε τους τύπους του Vieta που δίνουν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μιας εξίσωσης 2^{ου} βαθμού Μονάδες 10

Β. Να δώσετε τον ορισμό της ν-οστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α, με $n \in \mathbb{N}^*$

Μονάδες 3

Γ. Να συμπληρωθούν οι ισότητες, ώστε να είναι αληθείς:

α. $|a|^2 =$

β. $d(a, \beta) = \dots$

γ. $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \dots$ όπου $a \geq 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}^*$

δ. $\sqrt[\nu]{a^{\mu \cdot \rho}} = \dots$ όπου $a \geq 0$ και $\mu, \nu, \rho \in \mathbb{N}^*$

Μονάδες 4

Δ. Δίνονται οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 με εξισώσεις $\epsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1, \epsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντίστοιχα.

α. Πότε είναι παράλληλες ;

β. Πότε είναι κάθετες ;

γ. Ποια μορφή έχουν οι ευθείες αν $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$;

δ. Ποια μορφή έχουν οι ευθείες αν $\beta_1 = \beta_2 = 0$;

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Να λυθεί η ανίσωση: $1 < |x+2| \leq 3$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{x^3 + 4x}{x^5 - 16x}, g(x) = \frac{5x}{x^4 + 1}, h(x) = \frac{\sqrt{1-|x|}}{x}$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού τους

Μονάδες 13

β. Να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα : $f(1), f(2), g(0), g(1), h(0), h(1)$

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{3(x^2 + 1)}{x^2 - 1} - x^2 = 1$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Για την εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ και $\Delta > 0$ η οποία έχει ρίζες x_1 και x_2 να δείξετε ότι ισχύει:

α. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$

β. $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).

α. Τα σημεία $A(\alpha, \beta)$ και $B(\alpha, -\beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$.

β. Αν $\theta > 0$, $x \in \mathbb{R}$ και $|x| < \theta$ τότε $x < \theta$.

γ. Ισχύει $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

δ. Ισχύει $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$, για κάθε $\alpha, \beta \geq 0$.

ε. Η εξίσωση $x^2 + bx + \gamma = 0$ με $\gamma < 0$, έχει δύο πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Να βρεθούν οι λύσεις για τις παρακάτω εξισώσεις και ανισώσεις:

α. $|x| = 3$

Μονάδες 5

β. $2x^2 + x - 6 = 0$

Μονάδες 5

γ. $|x + 2| \leq 4$

Μονάδες 5

δ. $|x + 1| + \frac{2|x + 1|}{3} = 5$

Μονάδες 5

ε. $x^2 - 3x \geq 0$

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 με εξισώσεις $\epsilon_1: y = 3x - 5$ και $\epsilon_2: y = (\lambda - 1)x + 1$.

α. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλές.

Μονάδες 8

β. Αν $\lambda = 2$ να δείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 έχουν κοινό σημείο το σημείο $A(3, 4)$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(3, 4)$ από την αρχή των αξόνων και την απόσταση του σημείου $A(3, 4)$ από το σημείο $B(-5, -2)$.

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα (Σ) $\begin{cases} \lambda x + 3y = 1 \\ 4x + (\lambda - 1)y = \lambda - 3 \end{cases}$, με $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση και να βρεθεί η μοναδική αυτή λύση.

Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις.

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $D + Dx \geq 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$, να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\theta > 0$, τότε ισχύει $|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \geq \theta$ ή $x \leq -\theta$

β. Αν $\gamma = 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει ρίζα το 0

γ. Αν $a \cdot \gamma < 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες ετερόσημες στο \mathbb{R}

δ. Τα σημεία $A(a, \beta)$ και $B(-a, -\beta)$ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$

ε. Για οποιουδήποτε πραγματικούς ισχύει: $\sqrt[3]{a\beta} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\beta}$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως: $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \frac{\sqrt{x+1}}{|x|-4}$

Μονάδες 15

β. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 6x - 3 = 0$ να υπολογίσετε την παράσταση

$$A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = \frac{\lambda-3}{\lambda+1}x + \frac{|\lambda|-1}{3}$, $\lambda \neq -1$. Να προσδιοριστεί ο λ ώστε η ε :

α. Να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon_1: y = -x + 4$ Μονάδες 10

β. Να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: y = \frac{1}{3}x + 2$ Μονάδες 10

γ. Να διέρχεται από την αρχή των αξόνων Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα (Σ) $\begin{cases} \lambda x + 3y = 1 \\ 4x + (\lambda - 1)y = \lambda - 3 \end{cases}$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση η οποία να βρεθεί Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ για την οποία το σύστημα (Σ) έχει άπειρες λύσεις Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $D + D_x \geq 0$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχτεί ότι για κάθε δύο πραγματικούς αριθμούς a και β ισχύει: $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$

Μονάδες 10

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει: $\sqrt{a^2} = a$

β. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

γ. Για κάθε πραγματικό a ισχύει: $|a| \geq a$

δ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με a, β, γ πραγματικούς και $a \neq 0$,

τότε ισχύει: $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{2a}$.

ε. Αν για τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με a, β, γ πραγματικούς και $a \neq 0$

ισχύει $\Delta \geq 0$, τότε η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $(3a - 2)x - 5 = x + 2a + 3$ με a πραγματικό αριθμό.

α. Αν $a = 2$, να λυθεί η εξίσωση.

Μονάδες 15

β. Αν $a = 1$, τι συμπεραίνετε για την εξίσωση;

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι δύο ανισώσεις: $|2x - 1| \leq 7$ και $x^2 - x > 2$

α. Να λυθεί η πρώτη ανίσωση

Μονάδες 10

β. Να λυθεί η δεύτερη ανίσωση

Μονάδες 10

γ. Να βρεθούν οι κοινές τους λύσεις

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:
$$\begin{cases} (\lambda - 2)x + \lambda y = 2\lambda \\ 3x + (\lambda + 2)y = 12 \end{cases} \text{ όπου } \lambda \in \mathbb{R}$$

A. Για την τιμή $\lambda = 4$:

α. ναδειχθεί ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις

Μονάδες 10

β. να βρεθεί η μορφή των λύσεων

Μονάδες 5

B. για την τιμή $\lambda = -1$ ναδειχθεί ότι το σύστημα είναι αδύνατο

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχθεί ότι η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο αριθμών είναι ίση ή μικρότερη από το άθροισμα των απόλυτων τιμών των αριθμών αυτών. Δηλαδή:

$$|α+β| \leq |α|+|β| \quad \text{Μονάδες 10}$$

Πότε ισχύει το « ίσον ». Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος.

α. Για κάθε πραγματικό αριθμό ισχύει: $x > |x|$

β. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα δυο εξισώσεων με δυο αγνώστους ισχύει $D = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο.

γ. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ ισούται με $\frac{\beta}{\alpha}$

δ. Αν $a \geq 0$ και μ, ν φυσικοί αριθμοί τότε ισχύει: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu\nu]{a}$

ε. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι σημεία του επιπέδου, τότε η απόσταση (AB) ισούται με:

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 2^ο

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|x-2|}{3} - 4 < \frac{3-3|2-x|}{2}$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\mu + 1)x + \mu = 0$, όπου μ πραγματικός αριθμός.

α. Αποδείξτε ότι αυτή έχει για κάθε πραγματικό αριθμό μ μια τουλάχιστον λύση

β. Βρείτε το μ ώστε να έχει μια διπλή ρίζα

γ. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, προσδιορίστε τον αρνητικό αριθμό μ ώστε να

$$\text{ισχύει: } \rho_1 + 2\rho_1\rho_2 = -\rho_2 + 2 \quad \text{Μονάδες 25}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} x - \lambda y = \lambda + 1 \\ \lambda x - y = 2\lambda + 2 \end{cases}$$

και η εξίσωση (E): $(\lambda^3 - 1)x - 5\lambda = -5$, όπου λ πραγματικός αριθμός

α. Να βρεθεί η ορίζουσα D του συστήματος Μονάδες 8

β. Να λυθεί η εξίσωση $D = 0$ Μονάδες 7

γ. Για την τιμή του λ που το (Σ) είναι αδύνατο, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης (E) Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι ισχύει: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Μονάδες 15

β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).

i. Αν $\alpha < 0$ τότε $|- \alpha| = -\alpha$

ii. Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

iii. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$

iv. Δυο ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες όταν

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = 1$$

v. Αν μια συνάρτηση f είναι περιττή στο πεδίο ορισμού της A , η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας του άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

α. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2|x| - 1}{3} - \frac{|x| - 1}{2} = \frac{1}{2}$

Μονάδες 15

β. Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{(x-2)^2} \leq 5$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{3}{x+1} + \frac{x-1}{x-4} \geq \frac{3}{2}$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $\lambda x^2 + 2x - (\lambda - 2) = 0$ με $\lambda \neq 0$.

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

β. Αν $\lambda = -1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1) να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

i. $x_1^2 + x_2^2$

Μονάδες 7

ii. $(|x_1| - |x_2|)^2$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχθεί ότι αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 12}$$

B. Να αντιγράψετε τις σχέσεις που είναι ελλειπείς στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.

α. Αν $\epsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\epsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ δύο ευθείες τότε $\epsilon_1 // \epsilon_2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ Μονάδες 2

β. Αν $\theta > 0$ τότε ισχύει: $|x| < \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

$$|x| > \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots \quad \text{Μονάδες 4}$$

γ. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \dots\dots\dots$ $\sqrt{a}\sqrt{b} = \dots\dots\dots$, $\sqrt[m]{a^m b} = \dots\dots\dots$, $\sqrt{a^2} = \dots\dots\dots$

όπου $a, b \in \mathbb{R}$ και $a \geq 0, b \geq 0$ και m, n θετικοί ακέραιοι Μονάδες 4

δ. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τότε η απόστασή τους δίνεται από τον τύπο: $(AB) = \dots\dots\dots$ Μονάδες 3

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} \lambda x - y = 1 \\ x - \lambda y = 3 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση. Μονάδες 13

β. Να λύσετε το σύστημα (Σ) για $\lambda = 2$ Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f Μονάδες 6

β. Να απλοποιηθεί ο τύπος της f Μονάδες 6

γ. Αν A, B είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα τότε να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B και την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B . Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 7x + \lambda = 0 \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (1)$

A. α. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες; Μονάδες 6

β. Να βρείτε για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2 τέτοιες ώστε να ισχύει

$$\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} = 3 \quad \text{Μονάδες 7}$$

B. α. Να λύσετε την εξίσωση (1) για $\lambda = 12$ Μονάδες 6

β. Να λύσετε την εξίσωση $|x - x_1| = 3|x - 7|$ όπου x_1 είναι η μικρότερη από τις ρίζες της εξίσωσης που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα. Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι: « Η απόλυτη τιμή του γινομένου δυο αριθμών ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους ».

Μονάδες 15

B. Να συμπληρώσετε τα κενά

α. $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \dots\dots\dots$, όταν α, β θετικοί.

β. $|\alpha + \beta| \dots\dots\dots |\alpha| + |\beta|$

γ. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

δ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - \dots\dots)(x - \dots\dots).$$

ε. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, γίνεται ετερόσημο του α όταν $\Delta \dots\dots\dots$ και το x

βρίσκεται $\dots\dots\dots$

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

Θέμα 2^ο

A. Να μετατρέψετε την παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(\sqrt{2} - 1)^2 - 5(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1)^2$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\frac{|x| - 1}{2} - \frac{2|x|}{3} < \frac{1 - |x|}{3}$

β. $|x - 1| > 2$

Μονάδες 10 + 10

B. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης ικανοποιούν τη

σχέση: $(x_1 + x_2 + 3) \cdot (x_1 x_2 - 2) = 7$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής του πραγματικού αριθμού a . Μονάδες 3
- B.** Να αποδείξετε ότι $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$, για οποιουσδήποτε $a, \beta \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10
- Γ.** Να γράψετε αν είναι σωστοί (**Σ**) ή λάθος (**Λ**), οι παρακάτω ισχυρισμοί:
- α.** Ισχύει $|a + \beta| > |a| + |\beta|$.
- β.** Ισχύει $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ με $\theta > 0$.
- γ.** Ισχύει $\sqrt{a^2} = a$, με $a \in \mathbb{R}$
- δ.** $\sqrt{a + \beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$ με $a \geq 0, \beta \geq 0$.
- ε.** Αν δύο ευθείες είναι κάθετες, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσής τους είναι -1 .
- στ.** Ισχύει $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$ με $a \geq 0$. Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + 2y = \lambda^2 \\ 2x + \lambda y = 4 \end{cases}$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

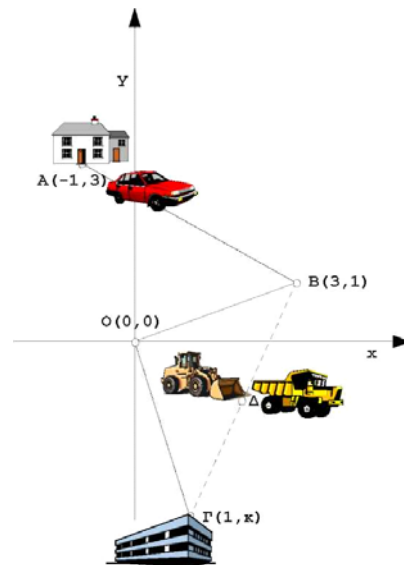
Έστω η δευτεροβάθμια εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + (\lambda - \frac{1}{4}) = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$ και x_1, x_2 οι ρίζες της.

- α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.
- β.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες αντίθετες.
- γ.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες αντίστροφες.
- δ.** Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $x_1^2 + x_2^2 \geq 6x_1x_2 - 2$. Μονάδες 8 + 4 + 4 + 9

Θέμα 4^ο

Ένας κάτοικος της Αττικής πηγαίνει καθημερινά με το αυτοκίνητο του από το σπίτι του, που βρίσκεται στη θέση $A(-1,3)$, στο γραφείο του που βρίσκεται στη θέση Γ (όπως φαίνεται στο σχήμα). Όμως λόγω έργων επέκτασης της Αττικής οδού (κατασκευή σήραγγας στη θέση Δ), αφού προχωρήσει έως τη θέση $B(3,1)$ παίρνει την παρακαμπτήριο οδό $B \rightarrow O \rightarrow \Gamma$, για να φτάσει τελικά στο γραφείο του Γ .

- α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας OB , αν $O(0,0)$ είναι η αρχή των αξόνων.
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $O\Gamma$, αν δίνεται ότι $OB \perp O\Gamma$
- δ.** Να υπολογίσετε την τεταγμένη του σημείου Γ , αν η τεταγμένη του είναι 1 και γνωρίζετε επίσης ότι οι αποστάσεις OB και $O\Gamma$ είναι ίσες.
- ε.** Να δείξετε ότι αυτός ο κάτοικος της Αττικής θα ωφεληθεί πραγματικά μετά την κατασκευή της σήραγγας και την διάνοιξη του δρόμου $B \rightarrow \Delta \rightarrow \Gamma$ και ότι θα κάνει καθημερινά $(2 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt{10}$ λιγότερη απόσταση για να πάει από το σπίτι στο γραφείο του.



Μονάδες $5 \times 5 = 25$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. α. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών αυτών, να αποδείξετε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες } 8$$

β. Να γράψετε τη μορφή που παίρνει η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ αν είναι γνωστό το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών της x_1, x_2 Μονάδες 4

γ. Να γράψετε το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ σε μορφή γινομένου στην περίπτωση που η διακρίνουσα είναι θετική ($\Delta > 0$) Μονάδες 3

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

α. Η παράσταση $|-a|$ ισούται με:

1. a 2. $-a$ 3. $-|a|$ 4. $|a|$ 5. τίποτα από τα προηγούμενα Μονάδες 5

β. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ισχύει $D = D_x = 0$ και $D_y \neq 0$ τότε το σύστημα:

1. είναι αόριστο 2. έχει μοναδική λύση 3. είναι αδύνατο 4. τίποτα από τα προηγούμενα Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Δίνεται η παράσταση $A = 8 - 2|x - 4|$

α. Να λύσετε την εξίσωση: $A = -8$ Μονάδες 10

β. Να λύσετε την ανίσωση: $A < -8$ Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 με εξισώσεις: $\epsilon_1: y = (\lambda^2 + 1)x + 2$ και $\epsilon_2: y = (3\lambda - 1)x - 1$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 να είναι παράλληλες Μονάδες 15

β. Για $\lambda = 1$ να βρείτε τα σημεία τομής A και B της ευθείας ϵ_1 με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα Μονάδες 5

γ. Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda + 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας στις παρακάτω ισότητες, τα κενά που σημειώνονται με $\alpha = \dots\dots\dots$, $\beta = \dots\dots\dots$, $\gamma = \dots\dots\dots$, $\Delta = \dots\dots\dots$ Μονάδες 4

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες Μονάδες 16

γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1) να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ , ώστε να ισχύει $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 < -10 - 4\lambda$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να συμπληρώσετε τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ στον παρακάτω πίνακα

(αφού τον μεταφέρετε στο τετράδιό σας).

Δ	Ρίζες της εξίσωσης
$\Delta > 0$	
$\Delta = 0$	
$\Delta < 0$	

Μονάδες 10

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2} = 2-\sqrt{3}$

β. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$

γ. Αν $x < 1$ τότε $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = x - 1$

δ. Ισχύει: $x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

ε. Ισχύει: $\sqrt{a^2} = a$

Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

A. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ έχει πάντα ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 10

B. Χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες, να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων συναρτήσει του λ , της παραπάνω εξίσωσης.:

α. $x_1 + x_2$

β. $x_1 \cdot x_2$

γ. $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ανισώσεις:

$$|2x - 5| > 3 \text{ και } \frac{|x-3|-2}{3} - \frac{12-|3-x|}{2} \geq \frac{|5x-15|-36}{4} - 1$$

α. Να λύσετε την πρώτη ανίσωση

Μονάδες 8

β. Να λύσετε τη δεύτερη ανίσωση

Μονάδες 12

γ. Να βρείτε τις κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} (\lambda-5)x - (\lambda-5)y = 0 \\ x + \lambda y = 7 \end{cases}$ και η εξίσωση $x^2 - (\lambda-2)x + \frac{9}{4} = 0$

α. Να βρεθούν οι τιμές του λ , για τις οποίες το σύστημα είναι αδύνατο.

Μονάδες 9

β. Να δείξετε ότι αν το σύστημα είναι αδύνατο, η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα η οποία και να βρεθεί.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τη μοναδική λύση του συστήματος (x_0, y_0)

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$ να δείξετε ότι:

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}. \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:

i. Για κάθε $a \geq 0$ ισχύει $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$.

ii. Για $\theta > 0$ ισχύει η ισοδυναμία $|x| \geq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta$.

iii. Αν σε ένα γραμμικό σύστημα 2 εξισώσεων με 2 αγνώστους ισχύει $D = D_x = 0$, τότε αυτό είναι πάντα αόριστο.

iv. Η εξίσωση $x^2 + \lambda x - \lambda^2 = 0$ έχει λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

v. Αν η $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ έχει διπλή ρίζα x_0 τότε $f(x) = a(x+x_0)^2$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να διαλέξετε τη σωστή λύση της ανίσωσης $|2x - 3| < 11$ δικαιολογώντας την απάντησή σας:

α. $x \in (-\infty, -4)$ **β.** $x \in (-4, 7)$ **γ.** $x \in (-4, \infty)$ **δ.** $x \in (-\infty, -4) \cup (7, \infty)$

ε. $x \in (7, +\infty)$ Μονάδες 10

B. Να δείξετε ότι $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6+\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt{6-\sqrt{3}}} = \sqrt{3}$. Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Να λύσετε τις εξισώσεις: **i.** $6 - 3x = 0$ και **ii.** $2x^2 = 8x$ Μονάδες 10

B. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{6-3x}{2x^2-8x} \geq 0$. Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

A. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \lambda^2 x + 2y = \lambda \\ \lambda x + y = \lambda - 1 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 15

B. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $|y_0 - 3| |x_0| = 2$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $ax^2 + bx + \gamma = 0$, με $a \neq 0$ να δειχθεί ότι:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Μονάδες 10

B. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς a, β, γ ισχύει ότι: $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma$

β. Για κάθε πραγματικούς αριθμούς a, β , ισχύει: $|a + \beta| = |a| + |\beta|$

γ. Αν οι ευθείες $y = a_1x + \beta_1$ και $y = a_2x + \beta_2$ είναι κάθετες τότε ισχύει: $a_1 \cdot a_2 = -1$

δ. Η συνάρτηση $f(x) = ax^2$ με a διάφορο του μηδέν έχει γραφική παράσταση ευθεία

ε. Η ευθεία $y = x$ είναι διχοτόμος των γωνιών του πρώτου και τρίτου τεταρτημορίου

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + y = \lambda^2 \end{cases}$$
 με λ διάφορο του 1

α. Να δειχθεί ότι έχει μοναδική λύση την: $x = -(\lambda + 1), y = \lambda^2 + \lambda + 1$

Μονάδες 18

β. Να αποδειχθεί ότι το σημείο $A(-(\lambda + 1), \lambda^2 + \lambda + 1)$ βρίσκεται πάνω από τον άξονα xx'

Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Δίνεται η $f(x) = x + 1$

α. Να βρεθούν οι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $|f(x)| < 2$

Μονάδες 7

β. Να βρεθεί το λ για το οποίο η ευθεία $y = \lambda(\lambda - 2)x + 5$ είναι κάθετη στη γραφική παράσταση της f

Μονάδες 9

γ. Αν $a > 1 > \beta$ να δειχθεί ότι: $f(a + \beta) > f(a\beta) + 1$

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - (\lambda - 2)x - 2\lambda$

α. Να δειχθεί ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ έχει ρίζες

Μονάδες 7

β. Αν ρ_1 και ρ_2 οι ρίζες του, να λυθεί η ανίσωση: $\rho_1^2 + \rho_2^2 > 5$

Μονάδες 9

γ. Αν $\lambda = 4$ να βρεθεί η τιμή του x για την οποία παίρνει την ελάχιστη τιμή την οποία και να βρείτε

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν $S = x_1 + x_2$ είναι το άθροισμα και $P = x_1 \cdot x_2$ είναι το γινόμενο των ριζών, να δείξετε ότι:

α. $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ Μονάδες 6

β. $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ Μονάδες 7

B. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, αν $\alpha > 0$ και $\beta > 0$

β. $\sqrt[k]{\sqrt[k]{\alpha}} = \sqrt[k]{\alpha}$, αν $\alpha > 0$.

γ. $|x| = 5 \Leftrightarrow x = 5$

δ. Η εξίσωση $|2x - 3| = 0$ είναι αδύνατη

ε. Αν η εξίσωση $(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$ είναι αόριστη, τότε $\lambda = 1$

ζ. Ισχύει ότι $|\alpha - \beta| = |\beta - \alpha|$ Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

A. Αν $0 \leq x \leq 5$ και $-5 \leq y \leq -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α. $x + y$ Μονάδες 4

β. $x - y$ Μονάδες 6

γ. $x \cdot y$ Μονάδες 6

B. Να επιλέξετε το σωστό ισχυρισμό:

α. Η ανίσωση: $-\frac{x}{2} < 0$:

i. αληθεύει για κάθε $x > 0$, ii. αληθεύει για κάθε $x < 0$, iii. αληθεύει για κάθε $x \leq 0$,

β. Η ανίσωση: $0x \geq 0$:

i. αληθεύει μόνο για $x = 0$, ii. αληθεύει μόνο για κάθε $x \geq 0$, iii. αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

γ. Οι ανισώσεις $x < -1$ και $x \leq 2$, συναληθεύουν:

i. για κάθε $x \in (-1, 2]$, ii. για κάθε $x \leq 2$, iii. για κάθε $x < -1$.

Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + 4y = 4 \\ x + \lambda y = 2 \end{cases}$$

α. Να υπολογιστούν τα D, D_x, D_y .

β. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση και ποια είναι;

γ. Να λύσετε το σύστημα για $\lambda = 2$

δ. Για $\lambda = -2$ να εξετάσετε αν οι εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν ευθείες που τέμνονται ή είναι παράλληλες ή ταυτίζονται. Μονάδες 9 + 6 + 5 + 5

Θέμα 4^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση: $3(x+1)^2 - 5|x+1| - 2 = 0$ Μονάδες 10

B. Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις:

α. $\frac{(x-2) \cdot (x+1)^2}{x+4} \leq 0$ Μονάδες 7

β. $\frac{x}{x+1} < \frac{x+2}{x-3}$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- Α. Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Τι ονομάζουμε απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ε ; Μονάδες 5
- Β. Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της. Μονάδες 10
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).
- α. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και ύψος.
- β. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.
- γ. Σε ορθογώνιο τρίγωνο που μια γωνία του είναι 60° , η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- δ. Η διάμεσος τραπέζιου ισούται με το άθροισμα των βάσεών του.
- ε. Ένα τραπέζιο που έχει τις γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του ίσες, έχει και ίσες διαγώνιους. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$.

Έστω Μ το μέσον της ΑΒ, Ν το μέσον της ΒΔ και Ρ το μέσον της ΑΓ. Να δείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο ΜΝΡ είναι ισοσκελές Μονάδες 12
- β. $NP = \frac{AB}{2}$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 45^\circ$). Φέρνουμε τα ύψη του ΒΔ, ΓΕ, και έστω Μ το μέσο της ΒΓ.

Να δείξετε ότι:

- α. $MD = ME$ Μονάδες 10
- β. $\widehat{\Delta ME} = 90^\circ$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρνουμε την $AG' \perp AG$ με $AG' = AG$ και την $AB' \perp AB$ με $AB' = AB$.

Φέρνουμε επίσης την διάμεσο ΑΜ και στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα $MZ = AM$

Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο ΑΒΖΓ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 5
- β. Τα τρίγωνα ΒΓΑ και ΑΓΖ είναι ίσα Μονάδες 10
- γ. $AM \perp B'G'$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι: $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$, $α, β \in \mathbb{R}$ Μονάδες 15
- B. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Για κάθε $α \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|α| \geq -α$
- β. Αν $α > β$ και $γ < 0$ τότε: $αγ < βγ$
- γ. Αν $α = β = 0$ τότε η εξίσωση $αx + β = 0$ είναι αδύνατη.
- δ. Αν για τριώνυμο $αx^2 + βx + γ$, $α \neq 0$ είναι $\Delta < 0$ τότε αυτό είναι ομόσημο του $α$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

- A. Να λυθούν οι ανισώσεις:
- α. $\frac{2x+1}{x-3} > 0$ Μονάδες 10
- β. $|x-3| < 5$ Μονάδες 10
- B. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις.
Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ x + (\lambda - 1)y = \lambda \end{cases}$$

- A. Να βρεθούν οι ορίζουσες D , D_x , και D_y και να παραγοντοποιηθούν.
Μονάδες 10
- B. Να βρεθούν:
- α. Οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει μοναδική λύση και η λύση του συστήματος Μονάδες 5
- β. Οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα είναι αδύνατο. Μονάδες 5
- γ. Οι τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Αν η εξίσωση έχει δυο ρίζες και η μία είναι η -3 να βρεθεί η άλλη ρίζα.
Μονάδες 10
- β. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση:
 $x_1^2 + 2x_1 + 2x_2 + x_2^2 > -5$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. 1. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού a .

Μονάδες 5

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$.

Μονάδες 10

Β. Να γράψετε στην κόλλα σας αν είναι **ΣΩΣΤΗ** ή **ΛΑΘΟΣ** η πρόταση:

1. Αν $a \neq 0$, τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μία λύση.

2. Για $x \in \mathbb{R}$ και $\theta > 0$ ισχύει: $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \pm \theta$.

3. Αν $a > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$.

4. Αν η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι θετική, τότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

5. Η ευθεία $\psi = \beta$ είναι παράλληλη στον άξονα $y y'$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

1. Να λυθεί η εξίσωση: $4(|x| - 1) + 1 = 5$

Μονάδες 10

2. Να λυθεί η ανίσωση: $|-2x + 4| \geq 8$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: \psi = 3x - 1 \quad \text{και} \quad \varepsilon_2: y = 2x + 1$$

Μονάδες 6

α. Να βρεθεί το σημείο τομής της ε_1 με τον άξονα $x x'$ και της ε_2 με τον άξονα $\psi \psi'$.

β. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου τομής των ε_1 και ε_2

Μονάδες 13

γ. Να σχεδιάσετε ε_1 και ε_2 στο ίδιο σύστημα αξόνων.

Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$ (1)

α. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για $\lambda = -3$.

Μονάδες 10

Να βρεθεί η εξίσωση που έχει ρίζες: $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι: Δύο διακεκριμένες ευθείες (ϵ_1) και (ϵ_2) με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ αντίστοιχα, είναι παράλληλες μόνο όταν οι συντελεστές διεύθυνσης αυτών είναι ίσοι

Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ):

- α.** Μια ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία 90°
- β.** Αν ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία $y = ax + \beta$ με τον άξονα των x , τότε $\epsilon\phi\omega = \beta$
- γ.** Οι συντελεστές διεύθυνσης δύο κάθετων ευθειών έχουν γινόμενο ίσο με -1
- δ.** Η ευθεία $y = ax$ δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

α. Να λύσετε την εξίσωση: $2|x - 3| = |x - 5|$

Μονάδες 12

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 3| \leq 2$

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Έστω το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - y = \lambda - 1 \\ 7x - 4y = \lambda \end{cases}$$

α. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D , D_x , D_y

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τη λύση (x, y) του συστήματος ως συνάρτηση του λ

Μονάδες 7

γ. Για τα παραπάνω (x, y) να βρείτε τις τιμές του λ ώστε $2x - y < 1$

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + \lambda x - 1 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε πραγματικό αριθμό λ

Μονάδες 13

β. Χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες αυτές, να βρείτε τις παρακάτω παραστάσεις:

$x_1 + x_2 + 1$ και $x_1 \cdot x_2 + 1$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- i. Να δοθεί ο ορισμός της απολύτου τιμής πραγματικού αριθμού a ($a \in \mathbb{R}$). Μονάδες 5
- ii. Ναδειχθεί ότι: Αν $\theta > 0$ τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 15
- iii. Τι συμπέρασμα βγάξετε αν $\theta > 0$ και $|x| > \theta$; Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Να λυθεί και διερευνηθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = \lambda \\ \lambda x + y = 1 \end{cases}$$
 Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

- α. Δίδεται η εξίσωση $x^2 - 2x - 15 = 0$. Να λυθεί. Μονάδες 10
- β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος να βρείτε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $x_1 + 2$ και $x_2 + 2$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Να λυθεί η ανίσωση:
$$\frac{(x+1)(x^2+4)(x^2-7x+12)}{(x-2)(x+5)} > 0$$
 Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ισχύει: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Μονάδες 15

Β. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες:

α. $|\sqrt{3} - 2| = \sqrt{3} - 2$

β. $|x| = |-x|$

γ. $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

δ. $(-\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2$

ε. $(-\alpha - \beta)^3 = (\alpha + \beta)^3$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$\frac{2x-1}{3} > x - \frac{1+x}{2} \quad \text{και} \quad \frac{x-3}{4} + \frac{x}{6} \leq \frac{2x-3}{3}$$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ ,

το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda^2 x + 2y = \lambda \\ \lambda x + y = 1 \end{cases}$$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + (a-1)x - 1 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R} - \{0, -1\}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 10

β. Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε συναρτήσει του $a \in \mathbb{R}$

τις παραστάσεις: $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$, και $x_1^2 + x_2^2$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, ($a \neq 0$)

α. Η παραπάνω εξίσωση είναι 2^{ου} βαθμού Σ – Λ

β. Να γράψετε την παράσταση που ονομάζεται διακρίνουσα της παραπάνω εξίσωσης.

γ. Τι πρέπει να ισχύει για την διακρίνουσα, ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες;

δ. Ποιος είναι ο τύπος που δίνει τις ρίζες της παραπάνω εξίσωσης; Μονάδες 1+1+2+2

B. Αν x_1, x_2 είναι οι πραγματικές ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι:

α. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$

β. $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$ Μονάδες 3 + 4

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 + 7x + 2 = 0$ τότε:

α. Η παράσταση $\kappa \cdot x_1 + \kappa \cdot x_2$ ($\kappa \neq 0$) ισούται με:

A: 7, **B:** -7, **Γ:** 7κ, **Δ:** -7κ, **E:** 7κ²

β. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$ Μονάδες 5 + 7

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - y = 3 \\ x + \lambda y = -2 \end{cases}$

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0)

β. Να βρεθεί η λύση του συστήματος

γ. Για την λύση (x_0, y_0) που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση:

$2x_0 + 3y_0 \geq -9$ Μονάδες 8 + 8 + 9

Θέμα 3^ο

α. Να βρείτε το λ έτσι ώστε οι ευθείες $(\epsilon_1): y = |2\lambda - 1| \cdot x + 5$ και $(\epsilon_2): y = 3x - 2$ να είναι παράλληλες.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|4x - 1| \leq 7$

γ. Αν $|x + 1| + |y - 1| \leq 0$ τότε είναι:

A: $x < -1$ και $y > 1$, **B:** $x > -1$ και $y < 1$, **Γ:** $x = -1$ και $y = 1$, **Δ:** $x > -1$ και $y > 1$

E: τίποτε από τα παραπάνω. Μονάδες 10 + 10 + 5

Θέμα 4^ο

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε η ανίσωση: $(\lambda + 2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda > 0$, $\lambda \neq -2$ να

αληθεύει για όλες τις πραγματικές τιμές του x . Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

Μονάδες 9

2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

A. Έστω $x \in [\alpha, \beta)$, τότε:

\alpha. $\alpha < x < \beta$, **\beta.** $\alpha \leq x \leq \beta$, **\gamma.** $\alpha \leq x < \beta$, **\delta.** $\alpha < x \leq \beta$, **\epsilon.** τίποτε από τα προηγούμενα

B. Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 3x + \lambda - 3 = 0$ είναι 2^{ου} βαθμού όταν:

\alpha. $\lambda \neq 0$, **\beta.** $\lambda = 2$, **\gamma.** $\lambda \neq 2$, **\delta.** $\lambda = 3$, **\epsilon.** $\lambda > 0$

Μονάδες 6

\Gamma. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

A'. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, τότε:

\alpha. $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{2\alpha}$, **\beta.** $x_1 \cdot x_2 = -\frac{\gamma}{\alpha}$

B'. Αν $a \neq 0$ τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση.

\alpha. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$ με $a \neq 0$ και $\Delta < 0$ δεν αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων.

\beta. Αν $|\alpha| = |\beta|$, τότε $\alpha = \beta$

\gamma. Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε: $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 2y = 1 \\ 3x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

\alpha. Να υπολογιστούν οι ορίζουσες D, D_x και D_y

Μονάδες 15

\beta. Να βρεθεί ο αριθμός λ ώστε το σύστημα να είναι αδύνατο

Μονάδες 5

\gamma. Να βρεθεί ο αριθμός λ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

\alpha. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση:

$$A = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} + \sqrt{(\beta - \gamma)^2} \text{ με } 0 \leq \alpha < \beta < \gamma$$

Μονάδες 5

\beta. Να κάνετε τις πράξεις: $\sqrt{5}\sqrt{5 - \sqrt{5}}\sqrt{5 + \sqrt{5}}$

Μονάδες 7

\gamma. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|1-x|}{3} - \frac{2-|1-x|}{2} \leq 3|x-1|+1$

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

A. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

\alpha. $x^2 + 3x - 4$

\beta. $x^2 - 2x - 3$

\gamma. $x^2 - 1$

\delta. $x^2 + 2$

Μονάδες 12

B. Δίνεται η συνάρτηση f με: $f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 3x - 4)}$

\alpha. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

Μονάδες 4

\beta. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$ Μονάδες 6

B. Τι ονομάζεται ν-οστή ρίζα (ν θετικός ακέραιος) ενός μη αρνητικού αριθμού α. Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη **Σ** ή **Λ** κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ανάλογα με το αν θεωρείτε την πρόταση σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**).

α. Αν μία στήλη της ορίζουσας $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ έχει όλα της τα στοιχεία ίσα με το μηδέν τότε η ορίζουσα ισούται με το μηδέν. **Σ Λ**

β. Υπάρχουν δύο αριθμοί με άθροισμα -2 και γινόμενο $\sqrt{2}$ **Σ Λ**

γ. Για κάθε πραγματικό αριθμό α ισχύει: $|a| \geq a$ και $|a| \geq -a$ **Σ Λ**

δ. Όταν η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι μεγαλύτερη του μηδενός ($\Delta > 0$) τότε αυτό μετατρέπεται σε γινόμενο του α επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες. **Σ Λ**

ε. Όταν οι ορίζουσες D, D_x, D_y ενός γραμμικού συστήματος ικανοποιούν την σχέση $D = D_x = D_y = 0$ τότε το σύστημα θα είναι πάντα αόριστο. **Σ Λ** Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

A. Δίνεται το παραμετρικό σύστημα $\begin{cases} (\lambda - 1)x - y = 2 \\ x + (\lambda + 1)y = 2 \end{cases}$

α. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ να λυθεί το παραπάνω σύστημα. Μονάδες 11

β. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει μία λύση (x_0, y_0) που να ικανοποιεί την σχέση $2x_0 - y_0 = 2$ Μονάδες 5

B. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x ορίζεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{|x+1|-8} + \frac{1}{x-9}$$
 Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $(x - 1)^2 = a(2x - 3)$ με ρίζες τις x_1, x_2

α. Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2(a + 1)$ και $x_1 \cdot x_2 = 3a + 1$ Μονάδες 6

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του α ισχύει $x_1^2 + x_2^2 = 4$ Μονάδες 9

γ. Να βρείτε για ποια τιμή του α η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες Μονάδες 3

δ. Να δείξετε ότι η παράσταση $\left(x_1 - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x_2 - \frac{3}{2}\right)$ είναι ανεξάρτητη του α Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

A. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x όπου $x \geq 1$

α. Να απλοποιήσετε την παράσταση $y = \sqrt{x^2} - \sqrt{(x-1)^2} + 3\sqrt{(2x+1)^2}$ Μονάδες 6

β. Για ποια τιμή του x η παράσταση y του παραπάνω ερωτήματος ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{3|y-1|}{2} - \frac{2+|1-y|}{3} = \frac{59}{6}$$
 Μονάδες 8

B. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{(x^2 - x + 1) \cdot (2 - x)}{2x^2 + 3x - 5} \geq 0$ Μονάδες 11

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αν $\theta > 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 10
- B.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)
- α.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\sqrt{x^2} = x$ Μονάδες 5
- β.** Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A είναι περιττή τότε για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) + f(-x) = 0$
- γ.** Δίνεται $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\frac{\gamma}{\alpha} < 0$ τότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- δ.** Μία άρτια συνάρτηση έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων.
- ε.** Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{\alpha \cdot x}{2} + \beta$ διέρχεται από τα σημεία $A(3, 1)$ και $B(-2, -4)$.

- A.** Να βρείτε τα α και β Μονάδες 5
- B.** Για $\alpha = 2$ και $\beta = -2$ τότε:
- α.** Να λύσετε την εξίσωση $|f(x)| - 1 = 0$ Μονάδες 5
- β.** Να λύσετε την ανίσωση $1 < |f(x)| \leq 3$ Μονάδες 10
- γ.** Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων A και B Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται η $f(x) = x^2 + \lambda \cdot x + \lambda^2 + \lambda - 1$

- α.** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 15
- β.** Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες αντίθετες Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται η $f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^2 + 2x + \lambda^2$

- α.** Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) = 0$ να έχει δύο ρίζες πραγματικές Μονάδες 15
- β.** Αν Δ η διακρίνουσα της $f(x)$ και $g(\lambda) = \sqrt{\Delta}$, να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι άρτια Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$, το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης να δείξετε ότι:

$$S = \frac{-\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της ερώτησης και να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν αυτές είναι λανθασμένες

- α.** Μία λύση της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ είναι η $x = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}$
- β.** Οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι κάθετες όταν $\alpha_1 = -\alpha_2$
- γ.** Ισχύει $|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$ για κάθε a, β πραγματικούς αριθμούς
- δ.** Η απόσταση των σημείων $A(x_1, \alpha)$ και $B(x_2, \alpha)$ είναι η $(AB) = |x_2 - x_1|$
- ε.** Η λύση της ανίσωσης $ax + \beta > 0$, με a, β πραγματικούς αριθμούς είναι η $x > -\frac{\beta}{\alpha}$
- Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{2|x+1|}{3} - \frac{2|x+1|-4}{6} > |x+1|-2$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a\sqrt{x+2} + \frac{\sqrt{6-x}}{x}$

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Μονάδες 15
- β.** Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός a , αν γνωρίζουμε ότι το σημείο $A(2,7)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

α. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = \lambda + 2 \end{cases}$ Μονάδες 18

β. Για τη μοναδική λύση $x_0 = \frac{\lambda - 2}{\lambda - 1}$, $y_0 = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$ που βρήκατε στο προηγούμενο σύστημα, να βρεθεί ο αριθμός λ ώστε το σημείο $A(x_0, y_0)$, ανήκει στη ευθεία με εξίσωση: $2x - 3y = 4$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι:

$$\text{Αν } \theta > 0, \text{ τότε: } |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

B. Να γίνει αντιστοίχιση κάθε εξίσωσης με τις λύσεις της.

A. $5|x|=20$

1. $x=1$ ή $x=5$

B. $|x-4|=5$

2. $x=-4$ ή $x=4$

Γ. $|3-x|=2$

3. Αδύνατη

Δ. $|x|+1=\frac{|x|+3}{2}$

4. $x=-1$ ή $x=9$

E. $|2x-1|=-1$

5. $x=1$ ή $x=-1$

Θέμα 2^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση: $\lambda^2x - 9x = \lambda^2 - 6\lambda + 9$.

B. Επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις παρακάτω προτάσεις:

α. Το σύστημα $\begin{cases} 3x + ay = 0 \\ 5x + 10y = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο

i. $\alpha = 0$ ii. $\alpha = 6$ iii. $\alpha = -10$ iv. ποτέ v. πάντα

β. Αν το 4 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2 - kx + 4 = 0$, τότε το k ισούται με:

i. -5 ii. 5 iii. 3 iv. -3 v. 4

γ. Αν σε μια δευτεροβάθμια εξίσωση η μία ρίζα είναι $x_1 = 3$, το γινόμενο των ριζών P είναι 3, τότε το άθροισμα των ριζών S είναι:

i. 1 ii. -5 iii. 4 iv. 5 v. -4

Θέμα 3^ο

A. Να λυθεί η ανίσωση: $(x^2 - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x^2 + 2x - 15) \geq 0$

B₁. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: \psi = (4\lambda + 1)x + 5$ και $\epsilon_2: \psi = (2\lambda - 1)x - 3$. Να βρεθεί το λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

B₂. Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_3: \psi = \lambda x - 5$ και $\epsilon_4: \psi = (\lambda - 2)x + 6$. Να βρεθεί το λ ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

Θέμα 4^ο

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A.

α. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$) με άνισες ρίζες x_1 και x_2 . Δείξτε ότι

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = x_1 x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 10}$$

β. Να γράψετε το $f(x)$ με μορφή γινομένου Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό ή Λάθος

α. Η εξίσωση $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda^2 - 1$ είναι αδύνατη όταν $\lambda = 1$ Μονάδες 2

β. $|\sqrt{2} - 2| = \sqrt{2} - 2$ Μονάδες 2

γ. $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ Μονάδες 2

δ. $|a| = |-a|$ Μονάδες 2

ε. $\sqrt[3]{a + \beta} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{\beta}$ $a, \beta \geq 0$ Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

A. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\frac{|x| - 4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x|}{3}$ Μονάδες 12

β. $|x - 2| > 1$ Μονάδες 8

B. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + y = 2\lambda - 1 \end{cases}$$

α. Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 20

β. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $x_0 + y_0 = 0$ όπου (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα τριώνυμα $f(x) = x^2 - \lambda x + 4$ και $g(x) = x^2 - 1$

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει μια διπλή ρίζα Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ρίζα το 1 Μονάδες 7

γ. Αν $\lambda = 5$ να λυθεί η ανίσωση $(2 - x) \cdot \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ Μονάδες 10