

ΓΕΝΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 2008

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΑΞΗ Α'

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι: « Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας » Μονάδες 15
- B.** Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις ώστε να είναι αληθείς:
- α.** Κάθε σημείο της ενός ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.
- β.** Κάθε σημείο της μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- γ.** Ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις διαγωνίους του ίσες είναι
- δ.** Η διάμεσος του τραapeζίου είναι προς τις βάσεις του και ίση με το τους.
- ε.** Αν ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο, τότε οι απέναντι γωνίες του είναι Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

- α.** Σε τρίγωνο ABΓ η γωνία A είναι τριπλάσια της γωνίας B. Αν είναι $\hat{\Gamma}_{εξ} = 144^\circ$ να υπολογιστούν οι γωνίες του τριγώνου και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του Μονάδες 12
- β.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και AΓ, να αποδείξετε ότι $EZ = AΓ$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $AB < AΓ$, η διχοτόμος του AΔ και M το μέσον της BΓ. Από το B φέρνουμε κάθετη στην AΔ που τέμνει την AΔ στο E και την AΓ στο Z. Δείξτε ότι:

- α.** $ZΓ = AΓ - AB$ Μονάδες 9
- β.** $EM = \frac{AΓ - AB}{2}$ Μονάδες 6
- γ.** $\angle BEM = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και AΔ η διχοτόμος της γωνίας A. Από το Δ φέρνουμε κάθετη στη BΓ που τέμνει την AΓ στο σημείο E. Να δείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο ABΔE είναι εγγράψιμο Μονάδες 12
- β.** $\Delta B = \Delta E$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινούσας

Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λανθασμένη καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

α. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες

β. Εάν ένας ρόμβος έχει τις διαγωνίους του ίσες, τότε είναι τετράγωνο

γ. Όταν η διάμεσος ενός τριγώνου είναι και ύψος του, τότε αυτό είναι ισοσκελές

δ. Οι διχοτόμοι εφεξής γωνιών είναι κάθετες

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Στις προεκτάσεις των πλευρών BA, ΓA τριγώνου ABΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα:

AD = AB και AE = AG. Να δείξετε:

α. DE // BΓ

Μονάδες 12

β. Η προέκταση της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ τέμνει τη DE στο μέσο της

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με $AB = 2BΓ$. Θεωρούμε M, N τα μέσα των πλευρών AB, ΓΔ αντίστοιχα και το τμήμα AE κάθετο στο BΓ. Να δείξετε ότι:

α. Το τετράπλευρο MBΓN είναι ρόμβος

Μονάδες 12

β. Το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και E, Z τα μέσα των πλευρών ΓΔ και BΓ αντίστοιχα. Αν $BΓ = ΓΔ = 2AB$ να δείξετε ότι:

α. το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο

Μονάδες 4

β. το τετράπλευρο ABΓE είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 4

γ. η γωνία Γ = 60°

Μονάδες 5

δ. ΔZ κάθετη στη BΓ

Μονάδες 6

ε. το τετράπλευρο ABZE είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι, αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° τότε η απέναντι πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. Μονάδες 18

B. Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται παραλληλόγραμμο ; (Ορισμός)

Μονάδες 7

Θέμα 2^ο

Προεκτείνουμε τις πλευρές AB και AG τριγώνου ABΓ προς το μέρος του A και στις προεκτάσεις παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = AB$ και $AE = AG$.

α. Να συγκρίνετε τα τμήματα DE και BΓ

Μονάδες 10

β. Αν η προέκταση του ύψους AH τέμνει τη DE στο Z, να δείξετε ότι το τμήμα AZ είναι ύψος του τριγώνου ADE.

Μονάδες 10

γ. Είναι η προέκταση της διχοτόμου AN του τριγώνου ABΓ διχοτόμος του τριγώνου ADE; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Σ' ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρνουμε το ύψος AD και τη διχοτόμο BE της γωνίας B. Να αποδείξετε ότι

α. $\widehat{AEB} = 45^\circ + \frac{\hat{\Gamma}}{2}$

Μονάδες 10

β. το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές (όπου Z το σημείο τομής των AD και BE)

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ ($B\Gamma > AB$) με γωνία $B = 45^\circ$. Από το μέσο M της BΓ φέρνουμε κάθετη πάνω στη BΓ που τέμνει τις AB και ΔΓ (ή τις προεκτάσεις τους) στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το EBZΓ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 13

β. Το EAZΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 12

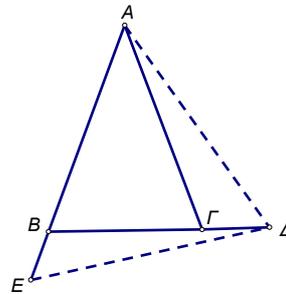
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A. Πότε ένα παραλληλόγραμμο ονομάζεται ορθογώνιο; Μονάδες 5
- B. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι ίσες; Μονάδες 10
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις :
- α. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες .
- β. Αν ένα σημείο M της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ ισαπέχει από τις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ ,τότε η ΑΜ είναι διάμεσος του τριγώνου .
- γ. Η διάμεσος ενός τραπέζιου διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του .
- δ. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του είναι 60° τότε η προσκείμενη σ' αυτήν κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας .
- ε. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $\frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 10

Θέμα 2°

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ =ΑΓ) με ΒΓ < ΑΒ. Αν το Δ είναι σημείο της προέκτασης της ΒΓ προς το μέρος του Γ τέτοιο ώστε να είναι ΒΔ = ΒΑ και το Ε σημείο της προέκτασης της ΑΒ προς το μέρος του Β τέτοιο ώστε να είναι ΒΕ = ΓΔ:



- α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΔΒΕ Μονάδες 15
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΔΑΕ είναι ισοσκελές. Μονάδες 10

Θέμα 3°

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και ΑΒ < ΓΔ με $\hat{D} = 30^\circ$. Από το μέσο Ν της ΒΓ φέρνουμε παράλληλη στην ΑΔ που τέμνει την ΓΔ στο σημείο Ε και την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Ζ.

- α. Να αποδείξετε ότι $\widehat{NEG} = \widehat{NGE}$ Μονάδες 5
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ορθογώνιο. Μονάδες 5
- γ. Να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΕΒΖΓ. Μονάδες 5
- δ. Να αποδείξετε ότι: $EB = \frac{AD}{2}$. Μονάδες 5
- ε. Να αποδείξετε ότι: $EG = \frac{DG - AB}{2}$. Μονάδες 5

Θέμα 4°

Σε τετράγωνο ΑΒΓΔ στη προέκταση της διαγωνίου ΒΔ παίρνουμε σημείο Ε ώστε να είναι ΔΕ = ΒΔ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και Η η τομή των ΑΕ και ΓΔ , να αποδείξετε ότι:

- α. $\Delta H = \frac{AB}{2}$ Μονάδες 8
- β. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΓΔ είναι ίσα. Μονάδες 8
- γ. $\Gamma Z \perp AE$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές παραλληλόγραμμου είναι ίσες. Μονάδες 13
- B.** Να χαρακτηρίσετε στη κόλα σας ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:
- α.** Κάθε παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος. Μονάδες 03
- β.** Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει ίσες διαγώνιους είναι ορθογώνιο. Μονάδες 03
- γ.** Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου διχοτομούνται. Μονάδες 03
- δ.** Αν ένα τετράπλευρο έχει τρεις γωνίες ορθές τότε είναι πάντοτε τετράγωνο. Μονάδες 03

Θέμα 2^ο

Δίνεται γωνία xOy και Oz η διχοτόμος της. Αν A, B σημεία των Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$ και M τυχαίο σημείο της Oz να αποδείξετε ότι:

- A.** $MA = MB$ Μονάδες 13
- B.** Η OM είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος AB Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Στο μέσον M της $B\Gamma$ φέρνουμε κάθετο στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την AB στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- A.** Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ Μονάδες 12
- B.** $B\Delta = 2A\Delta$ Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2AB$. Αν E, Z τα μέσα των πλευρών $\Gamma\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:

- A.** Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ορθογώνιο. Μονάδες 05
- B.** Το τετράπλευρο $ABZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Μονάδες 10
- Γ.** Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Πότε ένα τραπέζιο λέγεται ισοσκελές; Μονάδες 5
- B. Να αποδείξετε ότι σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ισχύουν:
- α. Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες. Μονάδες 6
- β. Οι γωνίες διαγώνιοι του είναι ίσες. Μονάδες 6
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν:
- α. Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.
- β. Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ίσες.
- γ. Το παραλληλόγραμμο που έχει δύο πλευρές ίσες είναι ρόμβος.
- α. Το τετράγωνο είναι ορθογώνιο. Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα τέτοια ώστε $AD = GE$. Αν οι ΒΕ, ΓΔ τέμνονται στο Ο, να αποδείξετε ότι:

- α. $\widehat{OBG} = \widehat{OGA}$ Μονάδες 13
- β. $\widehat{BOG} = 120^\circ$ Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ). Από το μέσο Ε της ΑΒ φέρνουμε παράλληλες προς τις πλευρές του ΑΔ, ΒΓ που τέμνουν την ΔΓ στα σημεία Ζ, Η αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι $DH = ZG$ (ΑΒ: μικρή βάση του τραpezίου)

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν ή κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ, να αποδείξετε ότι:

- α. $M\Delta = A\Delta$ Μονάδες 13
- β. $M\Delta = \frac{AB}{4}$ Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους. Μονάδες 15

B. Γράψτε τα 4 κριτήρια ώστε ένα τετράπλευρο να είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

i. Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ίσο με το του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

ii. Κάθε επίκεντρη γωνία είναι από την εγγεγραμμένη που βαίνει στο ίδιο τόξο.

iii. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι και

iv. Το τμήμα που ενώνει τα μέσα των ενός τραpezίου ισούται με την ημιδιαφορά των

Μονάδες 08

B. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ) και στις προεκτάσεις της ΒΓ παίρνουμε τα σημεία E, Z έτσι ώστε BE = ΓZ.

Να δειχθεί ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές. Μονάδες 17

Θέμα 3^ο

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ με $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, AB // ΓΔ και ισχύει 2AB = ΓΔ = ΒΓ.

Αν E και Z είναι τα μέσα των πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

i. το τετράπλευρο ABEΔ είναι ορθογώνιο Μονάδες 05

ii. το τετράπλευρο ABΓE είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 05

iii. η γωνία $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ Μονάδες 05

iv. $\Delta Z \perp B\Gamma$ Μονάδες 05

v. το τετράπλευρο ABZE είναι ισοσκελές τραπέζιο. Μονάδες 05)

Θέμα 4^ο

Στο τρίγωνο ABΓ με AB < AΓ το σημείο M είναι μέσο της ΒΓ και η AΔ διχοτόμος. Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AΔ, που τέμνει την AΔ στο σημείο E και την AΓ στο Z. Να δείξετε ότι:

i. το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές Μονάδες 06

ii. EM // AΓ και $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$ Μονάδες 15

iii. $\widehat{\Delta EM} = \frac{1}{2} \hat{A}$ Μονάδες 04

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Να αποδείξετε ότι: Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου ABΓ είναι 2 ορθές, δηλαδή

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$$

β. Να γράψετε τα 3 κριτήρια ισότητας τριγώνων.

Μονάδες 25

Θέμα 2^ο

A. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (A) με ένα μόνο στοιχείο της (B):

Στήλη (A) τετράπλευρα	Στήλη (B) ιδιότητες
1. Ορθογώνιο	α. Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες β. Οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται κάθετα
2. Τετράγωνο	γ. Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες δ. Το άθροισμα των γωνιών του είναι 300°
3. Ρόμβος	ε. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες

B. Να απαντήσετε με σωστό ή λάθος:

α. Κάθε σημείο της διχοτόμου γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.

β. Αν 2 παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

γ. Η διάμεσος προς την υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

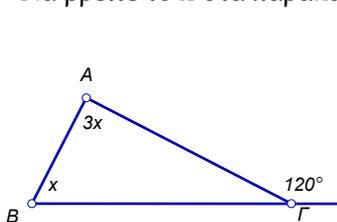
δ. Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες.

ε. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται.

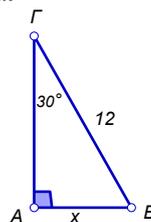
Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

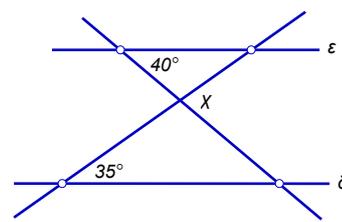
Να βρείτε το x στα παρακάτω σχήματα:



A.



B. $\hat{A} = 90^\circ$



Γ. $\epsilon // \delta$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ με $AB = 70\text{cm}$,

$\Gamma\Delta = 30\text{cm}$ και $A\Delta = B\Gamma = 22\text{cm}$ Να βρεθεί:

α. η περίμετρος Π του τραpezίου και

β. η διάμεσος EZ.



Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Δείξτε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι δύο ορθές

Μονάδες 15

β. Αναφέρατε τα κριτήρια που εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ.

Να αποδείξετε ότι:

α. το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου

Μονάδες 15

β. η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ. Να αποδείξετε ότι

$$\widehat{\Delta A E} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ενός ορθογωνίου τριγώνου από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι το μισό της υποτεινούσας. Μονάδες 9
- B₁.** Τι ονομάζεται βαρύκεντρο ενός τριγώνου και τι ιδιότητα έχει.
- B₂.** Τι ονομάζεται μεσοκάθετος ενός τμήματος AB και τι ιδιότητα έχει. Μονάδες 6
- Γ.** Να γράψετε το (Σ) ή (Λ) στις προτάσεις :
- α.** Οι διαγώνιες ενός ρόμβου είναι ίσες
- β.** Το άθροισμα των γωνιών ενός κυρτού n - γώνου είναι $(n-2) \cdot 180^\circ$
- γ.** Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\widehat{A\epsilon\xi} + \widehat{B\epsilon\xi} + \widehat{G\epsilon\xi} = 360^\circ$
- δ.** Δυο γωνίες με πλευρές παράλληλες είναι ίσες.
- ε.** Σ' ένα τραπέζιο η διάμεσος ισούται με το ημίαθροισμα των βάσεων. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και προεκτείνω την BA κατά τμήμα AΔ = AB και την ΓA κατά τμήμα AE = AΓ και τη διάμεσο MA του τριγώνου ABΓ, η οποία τέμνει τη ΔE στο K. Να αποδείξετε ότι :

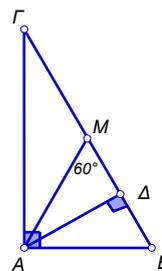
- A.** ΔE = BΓ Μονάδες 7
- B.** Τα τρίγωνα ABM και AΔK είναι ίσα. Μονάδες 8
- Γ.** Η AK είναι διάμεσος του τριγώνου AΔE Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\widehat{A} = 90^\circ$) με $AB < AΓ$ η διάμεσος AM και το ύψος του AΔ.

Αν η γωνία AMB είναι 60° , να αποδείξετε ότι:

- A.** Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΓAΔ. Μονάδες 10
- B.** $MΔ = \frac{AM}{2}$ Μονάδες 5
- Γ.** $BΔ = \frac{BΓ}{4}$ Μονάδες 10



Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και έστω Δ, E, Z τα μέσα των πλευρών BΓ, AΓ, AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- A.** Η περίμετρος του τριγώνου ABΓ είναι διπλάσια από την περίμετρο του τριγώνου ΔEZ. Μονάδες 7
- B.** Τα τμήματα AΔ, ZE διχοτομούνται. Μονάδες 8
- Γ.** Τα τρίγωνα ABΓ, ΔEZ έχουν το ίδιο βαρύκεντρο. Μονάδες 10

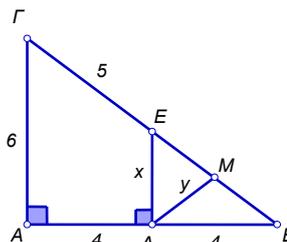
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι, αν δυο ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται από τρίτη (ϵ) και σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.
- B.** Δώστε τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
- Γ.** Σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε τη σωστή απάντηση:
- α.** Οι διαγώνιοι οποιουδήποτε ισοσκελούς τραπέζιου
i. είναι κάθετες **ii.** είναι ίσες **iii.** διχοτομούνται **iv.** είναι διχοτόμοι των γωνιών του
- β.** Δύο κύκλοι $(O, R), (K, 2R)$ με $OK = R$
i. τέμνονται **ii.** Δεν έχουν κοινά σημεία **iii.** εφάπτονται εξωτερικά **iv.** εφάπτονται εσωτερικά
- Δ.** Χαρακτηρίστε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα παρακάτω
- α.** Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής
- β.** Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°
- γ.** Το ίχνος της διαμέσου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ενός ορθογωνίου τριγώνου, ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου

Θέμα 2^ο

Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) του διπλανού σχήματος είναι $\Delta E \perp AB$, $A\Delta = \Delta B = 4$, $A\Gamma = 6$ και $\Gamma E = 5$. Αν το σημείο M είναι το μέσο του EB , να υπολογιστούν τα τμήματα x, y .



Θέμα 3^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) είναι $\hat{\Gamma} = 5\hat{B}$. Αν το $A\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου και AM η διάμεσος του :

- α.** Να υπολογίσετε τη γωνία Γ
- β.** Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 4A\Delta$.

Θέμα 4^ο

Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ έχει $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $AB > \Gamma\Delta$, $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Φέρνουμε την $\Gamma M \perp AB$ και θεωρούμε τα μέσα E, Z των $A\Delta, B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο
- β.** $HB = EZ$
- γ.** Το τετράπλευρο $EHBZ$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Να αποδείξετε ότι: «Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους».
Μονάδες 11

B. Να αντιστοιχίσετε τη **Στήλη Α (Τετράπλευρα)** στη **Στήλη Β (Ιδιότητες τετραπλεύρων)**

Στήλη Α:	Στήλη Β:
1. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	α. Δύο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες.
2. Τραπεζίο	β. Οι διαγώνιοι είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.
3. Ρόμβος	γ. Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες.
	δ. Το άθροισμα των γωνιών του είναι 400°
	ε. Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

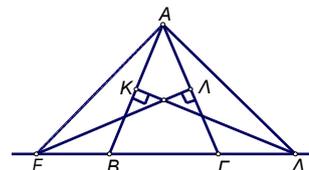
1. Οι εντός, εκτός και εναλλάξ γωνίες είναι παραπληρωματικές.
2. Τα μέσα των διαγωνίων τραπέζιου και τα μέσα των μη-παράλληλων πλευρών είναι συνηθειαστικά σημεία
3. Το περίκεντρο είναι σημείο τομής των υψών του τριγώνου.
4. Η διάμεσος προς την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου διαιρεί το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.

Μονάδες 8

Θέμα 2°

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K, Λ τα μέσα των πλευρών του AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στο K φέρνουμε κάθετη στην AB που τέμνει την ευθεία $B\Gamma$ στο Δ και στο Λ φέρνουμε κάθετη στην $A\Gamma$ που τέμνει την ευθεία GB στο E . Να αποδείξετε ότι:

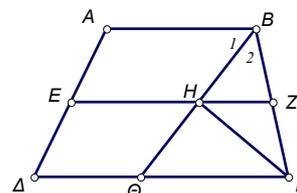
- α. $K\Delta = E\Lambda$. Μονάδες 10
- β. $EB = \Delta\Gamma$. Μονάδες 6
- γ. Το τρίγωνο $A\epsilon\Delta$ είναι ισοσκελές. Μονάδες 9



Θέμα 3°

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) η διχοτόμος της γωνίας του B τέμνει τη διάμεσό του EZ στο H και τη $\Delta\Gamma$ στο Θ . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $\Gamma\Theta B$ είναι ισοσκελές.
- β. Το H είναι το μέσο του $B\Theta$.
- γ. $\Gamma H \perp B\Theta$



δ.
$$EH = \frac{AB + \Delta\Gamma - B\Gamma}{2}$$

Μονάδες 6 + 7 + 5 + 6

Θέμα 4°

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Έστω τυχαίο σημείο E της πλευράς του $\Gamma\Delta$ και η διχοτόμος της γωνίας BAE τέμνει την $B\Gamma$ στο Z . Από το Δ φέρνουμε κάθετη στην AZ , που τέμνει την AZ στο σημείο Θ , την AE στο σημείο H και την AB στο I . Να αποδείξετε ότι:

- α. Το τρίγωνο $H\Delta E$ είναι ισοσκελές
- β. Τα τρίγωνα $A\Delta I$ και BAZ είναι ίσα.
- γ. $AE = BZ + \Delta E$

Μονάδες 9 + 8 + 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου, την οποία φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- B.** Να αναφέρετε τα κριτήρια βάσει των οποίων καθορίζεται ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις: (Σωστό ή Λάθος)
- α.** Εάν οι διαγώνιοι ενός κυρτού τετραπλεύρου διχοτομούνται και είναι κάθετες τότε είναι υποχρεωτικά τετράγωνο.
- β.** Εάν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες.
- γ.** Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της γωνίας.

Μονάδες 15 + 4 + 6

Θέμα 2^ο

Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος του $A\Delta$ και η διάμεσός του AM . Προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ κατά ίσο τμήμα $\Delta K = A\Delta$ και τη διάμεσο κατά ίσο τμήμα $MN = AM$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Το τετράπλευρο $BKN\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 10 + 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται μία γωνία AOB . Κατασκευάζουμε την εσωτερική διχοτόμο OE και την εξωτερική διχοτόμο OZ της γωνίας και στην αντικείμενη της ημιευθεία της OA θεωρούμε τυχαίο σημείο Γ . Από το Γ φέρνουμε παράλληλη προς την OE , η οποία τέμνει την OB στο σημείο Δ .

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο $\Gamma O\Delta$ είναι ισοσκελές,
- β.** $\Gamma\Delta \perp OZ$

Μονάδες 10 + 15

Θέμα 4^ο

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Η μεσοκάθετος της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της ΓB στο σημείο Δ . Προεκτείνουμε επίσης τη ΔA προς το μέρος της κορυφής A κατά τμήμα $AE = \Delta B$. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- β.** $\Gamma E = \Gamma\Delta$
- γ.** $\widehat{B\Gamma E} = 2\hat{\Gamma} - \hat{A}$

Μονάδες 10 + 10 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να γράψετε, χωρίς να αποδείξετε, τις τρεις ιδιότητες που ισχύουν σε κάθε παραλληλόγραμμο.
- B.** Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ABΓ$ ($AB = AΓ$) και το I σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $B, Γ$.

Να αποδείξετε ότι :

- A.** Το τρίγωνο $BΙΓ$ είναι ισοσκελές.
- B.** Η AI είναι διχοτόμος της γωνίας A .

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ και το ύψος του AH . Αν $Δ, E, Z$ είναι τα μέσα των $AB, AΓ$ και $BΓ$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το $ΔEZH$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Θέμα 4^ο

Στις πλευρές AB και $BΓ$ τετραγώνου $ABΓΔ$ παίρνουμε τα σημεία E και Z αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AE = BZ$.

- A.** $AZ = ΔE$.
- B.** $AZ \perp ΔE$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) κάθε μια από τις προτάσεις.

α. Αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες τότε τα αντίστοιχα αποστήματα είναι ίσα.

β. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η $\hat{A}_{\alpha\epsilon}$ είναι μεγαλύτερη από τη \hat{B}

γ. Κάθε ρόμβος είναι τετράγωνο.

δ. Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ δύο αμβλείες γωνίες

ε. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο οι διαγώνιες είναι ίσες

Μονάδες 10

B. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Μονάδες 15

Θέμα 2°

Δίνεται γωνία xAy και τυχαίο σημείο Δ της διχοτόμου της. Από το Δ φέρνουμε κάθετο στη διχοτόμο στο σημείο Δ η οποία τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα σημεία B και Γ .

α. Να δεχθεί ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Μονάδες 10

β. Αν $\widehat{xAy} = 60^\circ$ Να δειχθεί ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο. Μονάδες 10

γ. Να δειχθεί ότι η $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος στην $B\Gamma$. Μονάδες 5

Θέμα 3°

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε το ύψος του $A\Delta$ και στην προέκτασή του προς το μέρος το Δ παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Αν το σημείο M είναι μέσο της BE , το K μέσο της BM και το L μέσο της $A\Delta$, να αποδείξετε ότι:

α. Το $A\Delta MB$ είναι τραπέζιο. Μονάδες 12

β. Το $KL = \frac{3AB}{4}$ Μονάδες 13

Θέμα 4°

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Gamma$ και το σημείο M μέσο της πλευράς $B\Gamma$.

Αν η AM προεκτεινόμενη προς το M τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E Να αποδείξετε ότι:

α. $AM \perp B\Gamma$ Μονάδες 6

β. $AM = ME$ Μονάδες 7

γ. $ABE\Gamma$ είναι ρόμβος. Μονάδες 6

δ. Το σημείο Γ είναι μέσο του τμήματος ΔE . Μονάδες 6

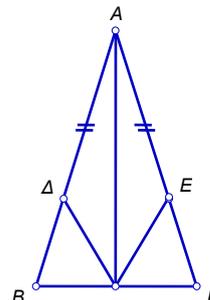
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε την πρόταση : Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. Μονάδες 10
- B.** Να χαρακτηρίσετε σωστές (**Σ**) η λανθασμένες (**Λ**) τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου. Σ Λ
- β.** Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν έχει μία γωνία οξεία. Σ Λ
- γ.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της Σ Λ
- δ.** Οι διαγώνιες του ρόμβου τέμνονται κάθετα Σ Λ
- ε.** Η διάμεσος του τραπέζιου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με την ημιδιαφορά τους. Σ Λ
- Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και M το μέσον της βάσης του $B\Gamma$. Αν Δ, E σημεία στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα ώστε $A\Delta=AE$, να αποδείξετε ότι:

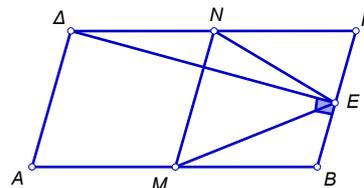


- α.** Τα τρίγωνα $A\Delta M$ και AME είναι ίσα
- β.** AM διχοτόμος της γωνίας ΔME
- γ.** Τα τρίγωνα ΔBM και $EM\Gamma$ είναι ίσα

Μονάδες 9
Μονάδες 7
Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2A\Delta$ και M, N τα μέσα των πλευρών $AB, \Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Αν είναι $\Delta E \perp B\Gamma$ να δείξετε ότι:

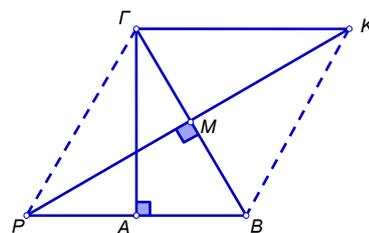


- α.** Το τετράπλευρο $B\Gamma NM$ είναι ρόμβος
- β.** Το τρίγωνο MEN είναι ισοσκελές.
- γ.** Η EM διχοτομεί τη γωνία BEN

Μονάδες 8 + 8 + 9

Θέμα 4^ο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{B} = 60^\circ$. Η κάθετη στο μέσον M της $B\Gamma$ τέμνει την παράλληλη από το Γ προς την AB στο K . Να αποδείξετε ότι:



- α.** Το τρίγωνο $KB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
- β.** Αν η προέκταση της KM τέμνει την ευθεία BA στο P να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΓKBP είναι ρόμβος. Μονάδες 12 + 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180° .

Μονάδες 10

B. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:

- α.** Η κοινή χορδή δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.
- β.** Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες.
- γ.** Δύο κύκλοι που έχουν διαφορά ακτίνων μικρότερη από τη διάκεντρο, δεν έχουν κοινά σημεία.
- δ.** Κάθε τετράπλευρο που έχει τις απέναντι γωνίες του ίσες είναι ρόμβος.
- ε.** Κάθε τετράπλευρο που έχει τρεις ορθές γωνίες είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ($AB = AG$) και στις προεκτάσεις της ΒΓ τμήματα $B\Delta = \Gamma E$. Αν είναι $\Delta Z \perp AB$ και $E\Gamma \perp AG$, να αποδείξετε ότι:

α. Τα τρίγωνα ΔBZ και $E\Gamma H$ είναι ίσα.

Μονάδες 15

β. $\Gamma Z = BH$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\hat{A} = 60^\circ$ και $AG = 2AB$. Αν Δ είναι το μέσο της AG να αποδειχτεί ότι:

α. το τρίγωνο $AB\Delta$ είναι ισόπλευρο

Μονάδες 10

β. το τρίγωνο $B\Delta\Gamma$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 5

γ. $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με Δ, E, Z μέσα αντίστοιχα των πλευρών $AB, AG, B\Gamma$ και AH ύψος του τριγώνου.

α. Να δείξετε ότι το ΔHZE είναι τραπέζιο

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι το ΔHZE είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

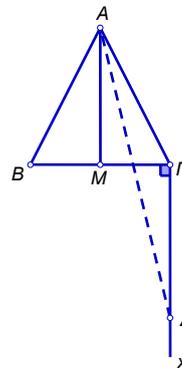
Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).
- α.** Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία.
- β.** Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές
- γ.** Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο πλευρές ίσες.
- δ.** Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι από αυτή την γωνία πλευρά του, είναι το μισό της υποτείνουσας
- ε.** Η εξωτερική γωνία $A_{εξ}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι μικρότερη από τη γωνία B του τριγώνου.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και η διάμεσος του AM . Από το Γ φέρουμε την ημιευθεία $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το σημείο A (όπως φαίνεται στο σχήμα) και παίρνουμε σε αυτή τμήμα $\Gamma\Delta = AB$.



Να δείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές
- β.** $AM \parallel \Gamma\Delta$
- γ.** Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $MA\Gamma$

Μονάδες 8

Μονάδες 8

Μονάδες 9

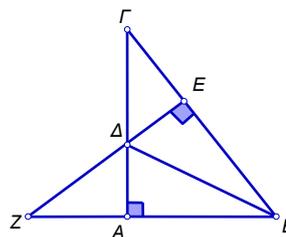
Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 1^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε

$\Delta E \perp B\Gamma$, που τέμνει την AB στο Z .

Να αποδείξετε ότι:

- α.** $A\Delta = \Delta E$
- β.** $\angle Z\Delta B = \angle B\Delta\Gamma$
- γ.** Το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές



Μονάδες 8

Μονάδες 8

Μονάδες 9

Θέμα 4

Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία $B = 45^\circ$ και AK το ύψος του τριγώνου. Επιπλέον Δ, E, Z είναι τα μέσα των $B\Gamma, A\Gamma, AB$ αντίστοιχα. Οι ευθείες KZ και ΔE τέμνονται στο σημείο M .

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο $ZE\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο
- β.** Ισχύει $\Delta E = KZ$
- γ.** Το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές και ορθογώνιο

Μονάδες 7

Μονάδες 8

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος του τραπέζιου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημίθροισμά τους Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις Σωστό ή Λάθος

α. Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι μικρότερο των 180°

β. Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος

γ. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της

δ. Κάθε ρόμβος είναι τετράγωνο

ε. Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου τέμνονται κάθετα

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Σε ευθεία ϵ παίρνουμε τρία ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ. Στο ίδιο ημιεπίπεδο σχηματίζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΒΚΔ και ΔΛΕ. Να αποδείξετε ότι:

α. Η γωνία ΓΛΕ είναι ορθή Μονάδες 15

β. Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΛ είναι κάθετο στο ΚΔ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α. $\widehat{A\Delta\Gamma} - \widehat{A\Delta B} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ Μονάδες 10

β. $\widehat{A\Delta B} = 90^\circ - \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με $\Gamma\Delta = \frac{3}{2} AB$

α. Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 15

β. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε $\Theta\Delta = \Delta\Gamma - AB$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

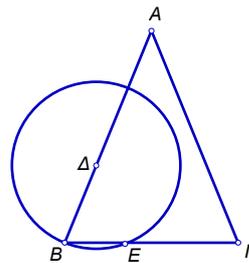
Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του. Μονάδες 10
- B.** Να γράψετε συμπληρωμένες τις παρακάτω προτάσεις στην κόλλα σας:
- α.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δυο πλευρών τριγώνου είναι και ίσο με
- β.** Αν από το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλη προς τη πλευρά ΑΒ, αυτή θα περάσει και από.....
- γ.** Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 90^\circ$ και Μ μέσο της ΒΓ, τότε η διάμεσος ΑΜ ισούται με
- δ.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο μη παράλληλων πλευρών τραπέζιου είναι και ισούται με.....
- ε.** Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται και τις γωνίες του.

Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Στο διπλανό ισοσκελές τρίγωνο ($AB = AG$) το Δ είναι τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΒ. Το Ε είναι το σημείο στο οποίο ο κύκλος με κέντρο Δ και ακτίνα ΔΒ τέμνει τη ΒΓ.



- α.** Να δείξετε ότι $\widehat{DEB} = \hat{B}$
- β.** Να δείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη στην ΑΓ.
- γ.** Να δείξετε ότι $\widehat{BDE} = \hat{A}$

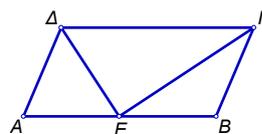
Μονάδες 10

Μονάδες 10

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Το διπλανό παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ έχει $AB = 2 \cdot BG$ και Ε μέσο της ΑΒ.



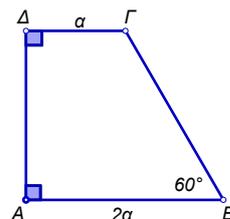
- α.** Να δείξετε ότι οι ΔΕ και ΓΕ είναι διχοτόμοι των $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Delta}$ αντίστοιχα
- β.** Να δείξετε ότι $\widehat{DEG} = 90^\circ$

Μονάδες 10

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Στο διπλανό τραπέζιο ΑΒΓΔ ισχύει $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Gamma\Delta = a$, $AB = 2a$ και $\hat{\Gamma} = 120^\circ$.



- α.** Αν ΓΚ είναι το ύψος του τραπέζιου, να δείξετε ότι το ΑΚΓΔ είναι ορθογώνιο
- β.** Να υπολογιστεί η πλευρά ΒΓ σαν συνάρτηση του α.
- γ.** Να δείξετε ότι το ΑΒΓ είναι ισόπλευρο

Μονάδες 5

Μονάδες 10

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Τι λέγεται παραλληλόγραμμο; (ορισμός) Μονάδες 5
- B.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Μονάδες 12
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λάθος.
- α.** Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες.
- β.** Η διάκεντρος δυο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής τους χορδής.
- γ.** Δύο τρίγωνα είναι ίσα, αν έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και μια γωνία ίση.
- δ.** Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο, όταν μια γωνία του είναι οξεία. Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Σε μια χορδή AB ενός κύκλου με κέντρο το σημείο O παίρνουμε δυο εσωτερικά σημεία Γ και Δ για τα οποία ισχύει ότι $AG = BD$.

Να αποδείξετε ότι :

- α.** Οι γωνίες AOG και BOΔ είναι ίσες. Μονάδες 15
- β.** Το τρίγωνο OΓΔ είναι ισοσκελές. Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Σε τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{\Gamma}_{εξ} = 150^\circ$, $\hat{A} = 4\hat{B}$. Να δείξετε ότι :

- α.** Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές .
- β.** Αν η ΑΔ είναι κάθετη στη ΒΓ (Δ σημείο της ΒΓ) τότε : $AD = \frac{AG}{2}$

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Φέρουμε τις διαμέσους BM και ΓN και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα $M\Delta = BM$, $NE = GN$. Να δείξετε ότι :

- α.** Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 5
- β.** $A\Delta = AE$ Μονάδες 10
- γ.** Τα σημεία A, Δ, E βρίσκονται στην ίδια ευθεία. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας .

Μονάδες 15

β. Τι ονομάζεται κέντρο βάρους τριγώνου και ποιες οι ιδιότητές του ;

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και K, Λ τα μέσα των AB και AG αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του B και Γ τέμνονται στο σημείο Δ , τότε το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Από το έγκεντρον I τριγώνου $AB\Gamma$ φέρνουμε ευθεία παράλληλη της $B\Gamma$ που τέμνει τις AB και AG στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Να αποδείξετε ότι αν δυο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι: η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. Μονάδες 15
- B.** Συμπληρώστε τα κενά , αντιγράφοντας στην κόλλα σας ολόκληρες τις προτάσεις.
- α.** Ορθόκεντρο τριγώνου λέγεται.....
- β.** Βαρύκεντρο τριγώνου λέγεται.....
- γ.** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με.....
- δ.** Οι διαγώνιοι του ρόμβου έχουν τις εξής ιδιότητες α..... , β.....
- ε.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60^\circ$ και $ΑΓ = 2ΑΒ$. Αν Δ είναι το μέσο της ΑΓ, να δείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισόπλευρο Μονάδες 9
- β.** Το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές Μονάδες 8
- γ.** Η $\widehat{ΑΒΓ} = 90^\circ$ Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ = ΑΓ$) φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΒΓ. Αν Κ είναι το μέσο της ΑΜ και η ΔΚ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο σημείο Ε, να δειχθεί ότι:

- α.** $ΚΓ // ΑΒ$ Μονάδες 5
- β.** Τα τρίγωνα ΒΕΔ και ΔΚΓ είναι ίσα. Μονάδες 7
- γ.** Το ΒΚΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 8
- δ.** $ΕΔ = \frac{ΑΜ}{2}$ Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Σε ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ φέρνουμε τη διαγώνιο ΒΔ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΕ = ΒΔ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και Η το σημείο τομής των ΑΕ και ΓΔ, να δείξετε ότι:

- α.** $ΔΗ = \frac{ΑΒ}{2}$ Μονάδες 7
- β.** Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΓΔ είναι ίσα. Μονάδες 8
- γ.** Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι: « Η απόλυτη τιμή του γινομένου δυο αριθμών ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους ».

Μονάδες 15

B. Να συμπληρώσετε τα κενά

α. $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\beta} = \dots\dots\dots$, όταν α, β θετικοί.

β. $|\alpha + \beta| \dots\dots\dots |\alpha| + |\beta|$

γ. $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \dots\dots\dots$

δ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνόμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, τότε

$$ax^2 + bx + \gamma = a(x - \dots\dots)(x - \dots\dots).$$

ε. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, γίνεται ετερόσημο του a όταν $\Delta \dots\dots\dots$ και το x

βρίσκεται $\dots\dots\dots$

Μονάδες $5 \times 2 = 10$

Θέμα 2^ο

A. Να μετατρέψετε την παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή: $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $(\sqrt{2} - 1)^2 - 5(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) + (\sqrt{2} + 1)^2$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Να λυθούν οι ανισώσεις:

α. $\frac{|x| - 1}{2} - \frac{2|x|}{3} < \frac{1 - |x|}{3}$

β. $|x - 1| > 2$

Μονάδες $10 + 10$

B. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης ικανοποιούν τη

σχέση: $(x_1 + x_2 + 3) \cdot (x_1 x_2 - 2) = 7$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

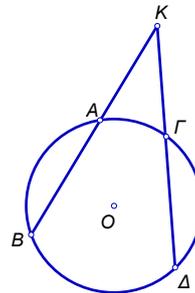
- A.** Να αποδείξετε ότι, αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με 30° , τότε η πλευρά του τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από τη γωνία αυτή είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Μονάδες 10
- B.** Να δώσετε τον ορισμό του τραπέζιου και τον ορισμό του ισοσκελούς τραπέζιου. Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν:
- Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες.
 - Ένα τρίγωνο μπορεί να έχει το πολύ μία αμβλεία γωνία.
 - Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.
 - Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
 - Ένα κυρτό τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι δύο πλευρές του είναι ίσες.
- Μονάδες 10

Θέμα 2°

- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι:
- Το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές. Μονάδες 13
 - Η διχοτόμος AZ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$. Μονάδες 12

Θέμα 3°

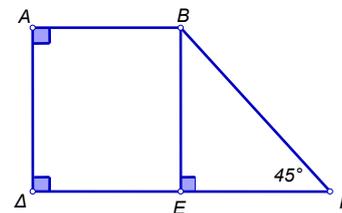
Δίνεται κύκλος (O, ρ) και οι ίσες χορδές του AB και $\Gamma\Delta$, όπως στο διπλανό σχήμα. Οι προεκτάσεις των BA και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο σημείο K . Αν OL και OM είναι τα αποστήματα των χορδών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:



- Τα τρίγωνα KOL και KOM είναι ίσα. Μονάδες 9
- $KA = KG$ Μονάδες 9
- Το τρίγωνο $KB\Delta$ είναι ισοσκελές. Μονάδες 7

Θέμα 4°

Στο διπλανό τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) είναι $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$, $\Delta\Gamma = 2AB$ και $\hat{\Gamma} = 45^\circ$.



Φέρνουμε τη $BE \perp \Delta\Gamma$, που τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K . Οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου $ABE\Delta$ τέμνονται στο σημείο Λ .

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 6
- Το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι τετράγωνο. Μονάδες 6
- $B\Delta = AE$. Μονάδες 6
- Το τετράπλευρο $\Lambda K\Gamma\Delta$ είναι τραπέζιο με $\Lambda K = \frac{1}{4} \Delta\Gamma$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του είναι παράλληλο με την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της

Μονάδες 10

B. Να δώσετε τον ορισμό: πότε ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι σωστή, ή αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. Οι διαγώνιοι κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του

β. Οι γωνίες με πλευρές κάθετες είναι πάντα ίσες

γ. Το σημείο τομής των υψών τριγώνου ονομάζεται ορθόκентρο

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της βάσης $B\Gamma$ προς τα B και Γ σχεδιάζουμε ευθύγραμμα τμήματα $BE = B\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 12

β. Αν M και N τα μέσα των $A\Delta$ και AE αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $BN = \Gamma M$

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 2B\Gamma$

και $\hat{B} > 90^\circ$. Φέρνουμε την AE κάθετη στη $B\Gamma$

και έστω Z, H τα μέσα των $\Delta\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. Το $HB\Gamma Z$ είναι ρόμβος

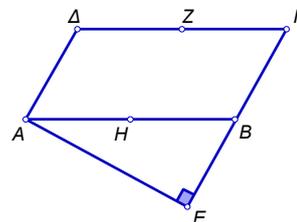
Μονάδες 8

β. $HZ = HB = HE$

Μονάδες 8

γ. Το EZ είναι διχοτόμος της $HE\Gamma$

Μονάδες 9



Θέμα 4^ο

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ η κάθετη στο μέσο M της υποτεινούσας $B\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο N .

α. Να δείξετε ότι $\Gamma N = 2NM$

Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε τη γωνία \widehat{ANB}

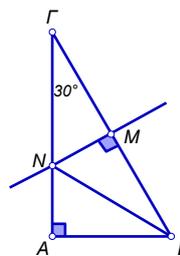
Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι $AN = \frac{\Gamma N}{2}$

Μονάδες 8

δ. $MN = \frac{A\Gamma}{3}$

Μονάδες 7



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν σε παραλληλόγραμμο δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι ορθογώνιο.

β. Αν σε τραπέζιο δύο απέναντι γωνίες είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι ισοσκελές.

γ. Το τετράπλευρο που οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος.

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ η γωνία A είναι τριπλάσια της γωνίας B . Αν $\hat{\Gamma}_\varepsilon = 144^\circ$, να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:

α. Από τη βάση

Μονάδες 13

β. Από τις ίσες πλευρές

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Αν η ΔM τέμνει την προέκταση της AB στο K , να δείξετε ότι $\widehat{K\Gamma\Delta} = 135^\circ$.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$ ισχύει:

$$A\Gamma = \frac{B\Gamma}{2}$$

Μονάδες 10

B. Να γράψετε δίπλα σε κάθε έναν από τους ισχυρισμούς ένα (α), για να δηλώσετε ότι είναι αληθής ή ένα (ψ) στη αντίθετη περίπτωση.

α. Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$, ΔEZ είναι ίσα όταν $\hat{A} = \hat{\Delta}$, $AB = EZ$, $A\Gamma = \Delta E$

Μονάδες 5

β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, η $B\Gamma$ είναι διπλάσια της διαμέσου AM

Μονάδες 5

γ. Αν δύο γωνίες φ και ω είναι συμπληρωματικές της γωνίας θ τότε $\hat{\varphi} = \hat{\omega}$

Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

α. Οι διχοτόμοι των γωνιών B και Γ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται στο I . Αν $\hat{A} = 70^\circ$ να

υπολογίσετε τη $\widehat{B\Gamma}$.

Μονάδες 15

β. Αν η παράλληλη από το I στη $B\Gamma$ τέμνει τις πλευρές AB , $A\Gamma$ αντίστοιχα στα σημεία Δ, E να δειχθεί ότι $\Delta E = \Delta B + E\Gamma$.

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

α. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τα ύψη BE , $\Gamma\Delta$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να δειχθεί ότι: το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 20

β. Να δειχθεί ότι: $\widehat{ABE} = \widehat{A\Gamma\Delta}$.

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η διάμεσος AM είναι κάθετη στην πλευρά AB ($AM \perp AB$).

Αν $\hat{B} = 60^\circ$ και $A\Delta$ το ύψος στη $B\Gamma$

α. να δειχθεί ότι: $B\Delta = \frac{1}{8} B\Gamma$.

Μονάδες 15

β. Αν E το μέσο της $A\Gamma$, να αποδειχθεί ότι $ME = B\Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ τα Δ, E είναι τα μέσα των $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τμήμα ΔE είναι παράλληλο στη $B\Gamma$ και ίσο με το μισό της $B\Gamma$

Μονάδες 15

B. Τι λέγεται τετράγωνο;

Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν $A\Delta$ διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$, ισχύει $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

β. Οι κύκλοι (K, R) και (Λ, ρ) εφάπτονται εξωτερικά, αν και μόνο αν $K\Lambda = R + \rho$

γ. Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την επίκεντρη που βαίνει στο τόξο της χορδής

Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BE = AB$. Να αποδείξετε ότι:

α. Η ΔE διχοτομεί τη $B\Gamma$

Μονάδες 15

β. Τα B, Γ ισαπέχουν από τη ΔE

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του. Φέρουμε από το Γ ευθεία κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει τον κύκλο στο Δ .

α. Να αποδείξετε ότι $AB \perp A\Delta$

Μονάδες 13

β. Προεκτείνουμε τη BA κατά τμήμα $AE = AB$. Να αποδείξετε ότι $\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\epsilon\Delta}$

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = 6, B\Gamma = 10, A\Gamma = 9$, η διχοτόμος του $A\Delta$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

A. Να αποδείξετε ότι $B\Delta = 4$

Μονάδες 9

B. Από το M φέρουμε ευθεία παράλληλη στην $A\Gamma$ που τέμνει την $A\Delta$ στο E

α. Να υπολογίσετε το λόγο $\frac{E\Delta}{EA}$

Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε τα τμήματα που η ευθεία BE χωρίζει την $A\Gamma$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο:

- A. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
Μονάδες 10
- B. Να διατυπώσετε τον ορισμό και τις ιδιότητες του παραλληλογράμμου.
Μονάδες 5
- Γ. Να συμπληρώσετε με λέξεις ή προτάσεις τα παρακάτω κενά:
- α. Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση
- β. Το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία ορθή λέγεται
- γ. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι
- Μονάδες 6
- Δ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) ότι:
- α. Σε κάθε τραπέζιο, τα μέσα των διαγωνίων και τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών είναι συνευθειακά.
- β. Οι διαδοχικές γωνίες ενός παραλληλογράμμου είναι παραπληρωματικές.
Μονάδες 4

Θέμα 2^ο

- Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 100^\circ$ και σημείο Δ της ημιευθείας AB τέτοιο ώστε $A\Delta = B\Gamma$.
- α. Να υπολογιστούν οι γωνίες B και Γ .
Μονάδες 8
- α. Αν E είναι σημείο της $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $BE = B\Delta$, να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{BE\Delta}$.
Μονάδες 10
- γ. Να αποδείξετε ότι $\Gamma A = \Gamma E$.
Μονάδες 7

Θέμα 3^ο:

- Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ προεκτείνουμε το ύψος $A\Delta$ και τη διάμεσο AM κατά τμήματα $\Delta E = A\Delta$ και $MN = AM$. Να αποδείξετε ότι:
- α. $\Delta M // EN$
Μονάδες 7
- β. Το τρίγωνο AEN είναι ορθογώνιο
Μονάδες 5
- γ. Το $ABN\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο
Μονάδες 5
- δ. Το $BEN\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο
Μονάδες 8

Θέμα 4^ο:

- α. Να αποδείξετε ότι, αν σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, με $AB // \Gamma\Delta$, οι διχοτόμοι των γωνιών του A και B τέμνονται κάθετα, τότε είναι παραλληλόγραμμο.
Μονάδες 15
- β. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τραπέζιο του οποίου η διάμεσος να διέρχεται από το σημείο τομής των διαγωνίων του.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Έστω ευθεία ϵ και σημείο A εκτός αυτής. Τι ονομάζουμε απόσταση του σημείου A από την ευθεία ϵ ; Μονάδες 5
- B.** Να αποδείξετε ότι κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές της είναι σημείο της διχοτόμου της. Μονάδες 10
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).
- α.** Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του είναι διχοτόμος και ύψος.
- β.** Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.
- γ.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο που μια γωνία του είναι 60° , η απέναντι κάθετη πλευρά είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- δ.** Η διάμεσος τραπέζιου ισούται με το άθροισμα των βάσεων του.
- ε.** Ένα τραπέζιο που έχει τις γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του ίσες, έχει και ίσες διαγώνιους. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB//\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Delta = 2AB$.

Έστω M το μέσον της AB , N το μέσον της $B\Delta$ και P το μέσον της $A\Gamma$. Να δείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο MNP είναι ισοσκελές Μονάδες 12
- β.** $NP = \frac{AB}{2}$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 45^\circ$). Φέρνουμε τα ύψη του $B\Delta$, ΓE , και έστω M το μέσο της $B\Gamma$.

Να δείξετε ότι:

- α.** $M\Delta = ME$ Μονάδες 10
- β.** $\widehat{\Delta ME} = 90^\circ$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρνουμε την $A\Gamma' \perp A\Gamma$ με $A\Gamma' = A\Gamma$ και την $AB' \perp AB$ με $AB' = AB$.

Φέρνουμε επίσης την διάμεσο AM και στην προέκτασή της παίρνουμε τμήμα $MZ = AM$

Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο $ABZ\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 5
- β.** Τα τρίγωνα $B'\Gamma A$ και $A\Gamma Z$ είναι ίσα Μονάδες 10
- γ.** $AM \perp B'\Gamma'$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο, οι διαγώνιες διχοτομούνται από το σημείο τομής τους. Μονάδες 10
- B.** Τι ονομάζεται διάμεσος τραπέζιου και τι ιδιότητες έχει; Μονάδες 7
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Αν σ' ένα τρίγωνο μια διάμεσος είναι και ύψος τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- β.** Τα εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα
- γ.** Οι διαγώνιες του ρόμβου είναι ίσες.
- δ.** Αν μια διάμεσος τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ, και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

- α.** $ZH // BΓ$ Μονάδες 5
- β.** $ZH = \frac{BΓ}{4}$ Μονάδες 10
- γ.** Το ΕΖΗΔ είναι παρ/μο. Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται κύκλος (Ο, R), δυο ίσες χορδές του ΑΒ και ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

- α.** Τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα. Μονάδες 15
- β.** $MA = MΓ$ και $MB = MΔ$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ και $ΓΔ = \frac{3}{2} AB$, (ΑΒ//ΓΔ). Αν Ε, Ζ, και Η είναι τα

μέσα των ΑΒ, ΒΓ, και ΔΕ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι :

- α.** Το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 10
- β.** Το τετράπλευρο ΕΒΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Μονάδες 10
- γ.** Αν οι ΑΓ και ΒΔ τέμνουν την ΗΖ στα σημεία Κ και Λ και τα μήκη των ΑΒ και ΓΔ είναι ΑΒ = 4 και ΓΔ = 6 να βρεθεί το μήκος του ΚΛ. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες :

α. Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες .

Μονάδες 8

β. Οι απέναντι γωνίες είναι ίσες .

Μονάδες 7

B. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος ;

1. Κάθε τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος .
2. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές .
3. Αν σε ένα τρίγωνο μια διχοτόμος του είναι και ύψος , τότε αυτό είναι ισοσκελές.
4. Σε κάθε τρίγωνο μια εξωτερική του γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι γωνιών του.
5. Το κάθετο τμήμα από το κέντρο ενός κύκλου σε μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή .

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω $AB\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο και Δ , E , Z τα μέσα των AB , $A\Gamma$, $B\Gamma$ αντίστοιχα . Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΔEZ είναι ισόπλευρο .

β. Το τετράπλευρο ΔEZB είναι ρόμβος.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Έστω $AB\Gamma$ ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Αν E , Z είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α. $EZ = A\Gamma$

β. αν AH είναι το ύψος προς την υποτείνουσα , τότε $AB = 2AH$.

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Στο εξωτερικό ενός τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $B\Gamma E$, όπως φαίνεται στο σχήμα .

α. Να αποδείξετε ότι $ZB = \Delta E$

β. Να αποδείξετε ότι το $ZBED$ είναι παραλληλόγραμμο

γ. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\Delta\Gamma E$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές
 Μονάδες 13

B. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά:

α. Το άθροισμα των οξείων γωνιών ενός ορθογωνίου τριγώνου ισούται με.....

β. Κάθε γωνία ενός ισόπλευρου τριγώνου ισούται με.....

γ. Η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου ισούται με.....

δ. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού n – γώνου ισούται με.....

Μονάδες 12

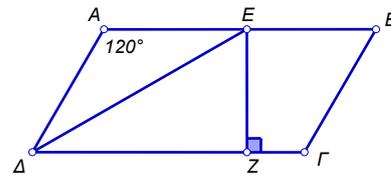
Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $B\Delta$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓE ώστε να ισχύει $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Στο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του διπλανού σχήματος η γωνία A είναι ίση με 120° και η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την AB στο E .



α. Να υπολογίσετε τη γωνία Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

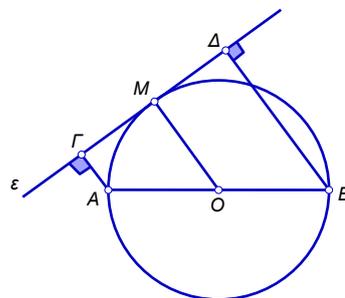
Μονάδες 8

γ. Αν $EZ \perp \Delta\Gamma$ να αποδείξετε ότι $\Delta E = 2EZ$

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και μια διάμετρος AB . Από ένα τυχαίο σημείο M του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου και τις προβολές Γ, Δ των σημείων A, B αντίστοιχα πάνω στην (ϵ)



α. Να αποδείξετε ότι η OM είναι διάμεσος του τραπέζιου $AB\Delta\Gamma$

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι $O\Gamma = O\Delta$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Να αποδείξετε ότι:

- i. Οι απέναντι πλευρές παραλληλόγραμμου είναι ίσες. Μονάδες 8
ii. Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Μονάδες 8

β. Να αντιστοιχίσετε κάθε τριάδα αξιοσημείωτων ευθειών του τριγώνου που βρίσκονται στην στήλη Α του πίνακα, στο σημείο της στήλης Β στο οποίο συντρέχει.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. Διχοτόμοι	1. Περίκεντρο
β. Ύψη	2. Βαρύκεντρο
γ. Διάμεσοι	3. Εγκέντρο
δ. Μεσοκάθετοι	4. Ορθόκεντρο

Μονάδες 4

- γ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
- i. Αν σε τρίγωνο μια διάμεσος είναι διχοτόμος του, τότε το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
ii. Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από την μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία.
iii. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση τότε είναι ίσα.
iv. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει $\hat{B} = \hat{A} + \hat{\Gamma}$ τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο \hat{B}
v. Αν μια διάμεσος τριγώνου είναι ίση με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ(ΑΒ = ΑΓ). Προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήματα ΒΔ = ΓΕ.

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δύο κύκλοι με ακτίνες ρ και 4ρ έχουν διάκεντρο δ = 30. Να βρεθούν οι τιμές του ρ για τις οποίες οι κύκλοι:

- i. Εφάπτονται εσωτερικά. Μονάδες 8
ii. Ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου. Μονάδες 8
iii. Τέμνονται. Μονάδες 9

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Θέμα 4^ο

Σε κύκλο (Ο, R) φέρομε χορδή ΑΒ = R, την οποία προεκτείνουμε κατά ΒΓ = R. Στην προέκταση της ΟΑ θεωρούμε σημείο Ζ έτσι ώστε ΟΖ = ΟΓ. Η προέκταση της ΓΟ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ορθογώνιο. Μονάδες 8
ii. $EA \perp Z\Gamma$ Μονάδες 8
iii. $EZ \perp A\Gamma$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 13

B. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λανθασμένες.

α. Οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.

β. Ένα τετράγωνο είναι ρόμβος.

γ. Σε κάθε τραπέζιο τα μέσα των διαγωνίων και τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών είναι συνευθειακά.

δ. Αν ένας ρόμβος έχει ίσες διαγώνιους, τότε είναι τετράγωνο.

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Αν οι κάθετες από τα A και Γ στη $B\Delta$ την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α. $AE = \Gamma Z$

Μονάδες 12

β. Το $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις πλευρές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA παίρνουμε σημεία K , Λ , M , N αντίστοιχα τέτοια ώστε $AK = B\Lambda = \Gamma M = \Delta N$. Να αποδείξετε ότι:

α. $NK = K\Lambda$

Μονάδες 12

β. Το $K\Lambda MN$ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Χαρακτηρίστε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις:
- α.** Δύο γωνίες με τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία είναι πάντα ίσες.
 - β.** Μία εξωτερική γωνία τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από κάθε εσωτερική γωνία του τριγώνου.
 - γ.** Υπάρχει τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και δεν είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 3
- B.** Επιλέξτε – συμπληρώστε τις ορθές απαντήσεις στα παρακάτω:
- α.** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι και ύψος του τριγώνου, το τρίγωνο είναι:
 - ♦ Ισόπλευρο
 - ♦ Ισοσκελές
 - ♦ Σκαληνό
 - ♦ Ορθογώνιο.
 - β.** Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές όταν:
 - ♦ Οι διαγώνιοί του είναι κάθετες,
 - ♦ Οι διαγώνιοί του είναι ίσες,
 - ♦ Δύο γωνίες του είναι ίσες.
 - γ.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ μία γωνία του ισούται με 30° τότε η απέναντι πλευρά του είναι ... Μονάδες 6
- Γ.** Τι λέγεται τραπέζιο και τι διάμεσος τραπεζίου; Μονάδες 6
- Δ.** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος $AM = \frac{BG}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$

Θέμα 2^ο

Μονάδες 10

Δίνεται σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και τα Κ, Λ, Μ μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α. $ΚΛ // \frac{BG}{2}$,

β. $ΚΔ = \frac{AB}{2}$,

γ. $ΚΜ = ΛΔ$.

Μονάδες 7 + 7 + 11

Θέμα 3^ο

Δίνεται το οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, τα ύψη του ΑΔ και ΒΕ, και το ορθόκεντρό του σημείο Η. Στην ΕΓ παίρνουμε το σημείο Ζ τέτοιο ώστε ΑΕ = ΖΕ. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΖΗ είναι ισοσκελές,

β. $\widehat{ΔΑΓ} = \widehat{ΕΒΓ}$

γ. Το τετράπλευρο ΒΗΖΓ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Μονάδες 7 + 8 + 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Με διάμετρο την ΑΒ γράφουμε κύκλο που τέμνει την ΒΓ στο Μ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο Μ τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ορθογώνιο,

β. Το Δ είναι μέσο του ΑΓ

Μονάδες 7 + 18

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή και (Λ), αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

- α.** Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι το ένα τρίτο του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- β.** Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της μιας κάθετης πλευράς.
- γ.** Το άθροισμα των γωνιών κυρτού n -γώνου είναι $2n - 4$ ορθές.
- δ.** Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι κάθετες

Μονάδες 8

Γ. Να συμπληρώσετε την πρόταση:

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι
προ την τρίτη πλευρά και ίσο με

Θέμα 2^ο

Μονάδες 2

Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) η μεγάλη του βάση AB είναι διπλάσια της πλευράς $A\Delta$ και η γωνία $B = 60^\circ$. Αν δίνεται ότι το μήκος της πλευράς $A\Delta$ είναι $\frac{a}{2}$ να υπολογίσετε συναρτήσει του a

- α.** Το μήκος της βάσης $\Gamma\Delta$ του τραpezίου Μονάδες 15
- β.** Το μήκος της διαμέσου του τραpezίου EZ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του AH και ονομάζουμε M και P τα μέσα των πλευρών του $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

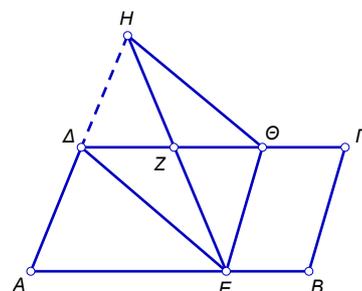
- α.** Το τρίγωνο $HP\Gamma$ είναι ισοσκελές Μονάδες 8
- β.** Η γωνία $PM\Gamma = \hat{B}$ Μονάδες 6
- γ.** Η γωνία $HPM = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ Μονάδες 11

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ τα σημεία E και Z τέτοια ώστε να είναι

$$BE = \frac{1}{3} AB \text{ και } \Delta Z = \frac{1}{3} \Gamma\Delta. \text{ Έστω επίσης } H \text{ το σημείο}$$

τομής των ευθειών $A\Delta$ και EZ . Από το σημείο E φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, που τέμνει τη $\Gamma\Delta$ στο σημείο Θ .



- α.** Να αποδείξετε ότι το $EB\Gamma\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 5
- β.** Να αποδείξετε ότι $Z\Delta = Z\Theta$ Μονάδες 5
- γ.** Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔHZ και $Z\Theta E$. Μονάδες 10
- δ.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Theta H$ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° να αποδείξετε ότι η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτεινούςας. Μονάδες 6
- B.** Αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που έχουν το ορθογώνιο και ο ρόμβος μεταξύ τους. Μονάδες 4
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη **Σ** ή **Λ** κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ανάλογα με το αν θεωρείτε την πρόταση Σωστή ή Λάθος.
- α.** Αν τα ύψη ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Η τότε η ευθεία ΓΗ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΒ. **Σ Λ**
- β.** Δύο ισοσκελή τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι πάντα ίσα. **Σ Λ**
- γ.** Κάθε σημείο της διαμέσου ΑΔ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ με βάση την ΒΓ απέχει εξίσου από τις ίσες πλευρές του τριγώνου **Σ Λ**
- δ.** Ένα παραλληλόγραμμο με κάθετες διαγώνιους είναι τετράγωνο. **Σ Λ**
- ε.** Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με το άθροισμα των εντός και απέναντι γωνιών. **Σ Λ**
- Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

- A.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με Μ, Ν μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου να βρεθεί η περίμετρος του τετραπλεύρου ΑΜΔΝ συναρτήσει των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου. Μονάδες 12
- B.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και από την κορυφή του Α φέρουμε μία ευθεία ε παράλληλη προς την ΒΓ. Φέρνουμε τις διχοτόμους των γωνιών Β και Γ του τριγώνου οι οποίες τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΕΔ = ΑΒ + ΑΓ$. Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και στις πλευρές του ΑΔ και ΔΓ παίρνουμε σημεία Ζ, Ε τέτοια ώστε $ΑΖ = ΔΕ$. Αν Κ το σημείο τομής των ΑΕ και ΒΖ με Μ, Ν τα μέσα των ΚΕ, ΒΕ αντίστοιχα να δείξετε ότι:

- α.** $ΑΕ = ΒΖ$ Μονάδες 8
- β.** $ΑΕ \perp ΒΖ$ Μονάδες 5
- γ.** Το τετράπλευρο ΚΒΝΜ είναι τραπέζιο Μονάδες 7
- δ.** Το τρίγωνο ΚΝΕ είναι ισοσκελές Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ($ΑΒ < ΑΓ$). Φέρνουμε την διάμεσο ΑΜ και στην προέκταση της παίρνουμε τμήμα $ΜΝ = ΜΑ$.

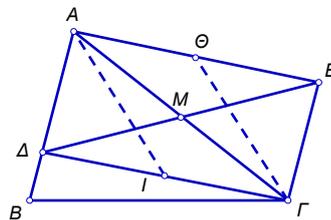
- A.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 9
- B.** Στη συνέχεια φέρνουμε το ύψος ΑΗ το οποίο προεκτείνουμε κατά ίσο τμήμα $ΗΔ = ΗΑ$. Να αποδείξετε ότι:
- α.** Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές Μονάδες 5
- β.** Το τετράπλευρο ΒΓΝΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο Μονάδες 11

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας Μονάδες 10
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή και Λάθος αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

- α.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ ισχύει $AG = \frac{B\Gamma}{2}$
- β.** Σε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας.
- γ.** Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος.
- δ.** Ένα τραπέζιο με βάσεις ίσες είναι παραλληλόγραμμο.
- ε.** Στο ισοσκελές τραπέζιο όλες οι γωνίες είναι ίσες Μονάδες 10
- Γ.** Τι ονομάζετε διάμεσος τραπεζίου Μονάδες 5



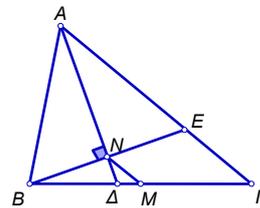
Θέμα 2°

Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ θεωρούμε M μέσο της AG και Δ τυχαίο σημείο της AB . Φέρουμε τη ΔM και την προεκτείνουμε προς το μέρος του M κατά $ME = MD$. Δείξτε ότι

- A.** GE παράλληλη της AB Μονάδες 8
- B.** $AE = \Delta\Gamma$ Μονάδες 7
- Γ.** Αν Θ μέσο της AE και I μέσο της $\Delta\Gamma$ δείξτε ότι $AI = \Gamma\Theta$ Μονάδες 10

Θέμα 3°

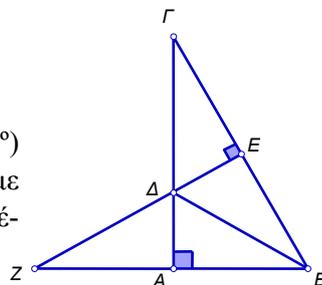
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} > \hat{\Gamma}$) και AD διχοτόμος της \hat{A} . Από το B φέρουμε ευθεία κάθετη στην AD που τέμνει την AG στο E και την AD στο N . Αν M μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι



- α.** $\widehat{EB\Gamma} = \frac{\hat{B} - \hat{\Gamma}}{2}$ Μονάδες 7
- β.** $AB = AE$ Μονάδες 6
- γ.** $NM = \frac{AG - AB}{2}$ Μονάδες 7
- δ.** $\widehat{\Delta NM} = \frac{\hat{A}}{2}$ Μονάδες 5

Θέμα 4°

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε την ΔE κάθετη στη $B\Gamma$ που τέμνει την προέκταση της BA στο Z . Να αποδείξετε ότι



- α.** $AB = BE$ Μονάδες 4
- β.** $B\Gamma = BZ$ Μονάδες 4
- γ.** $B\Delta$ κάθετη στη ΓZ Μονάδες 6
- δ.** $\widehat{AEB} = 90^\circ - \frac{\hat{B}}{2}$ Μονάδες 5
- ε.** AE παράλληλη της ΓZ Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο όταν οι απέναντι πλευρές του είναι ανά δύο ίσες
Μονάδες 15
- B.** Να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της ερώτησης και να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με «Σ» αν είναι σωστές ή με «Λ» αν είναι λανθασμένες
- α.** Στο ίδιο επίπεδο αν μία ευθεία τέμνει μία από δύο παράλληλες, τέμνει και την άλλη
- β.** Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι κάθετες και διχοτομούνται
- γ.** Ύψος του παραλληλογράμμου ονομάζεται η απόσταση των παράλληλων ευθειών του
- δ.** Οι διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες
- ε.** Αν δύο γωνίες έχουν τις πλευρές τους κάθετες μία προς μία είναι ίσες

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δύο ευθείες δ, ϵ που δεν είναι κάθετες μεταξύ τους τέμνονται στο σημείο K . Στην ευθεία δ παίρνουμε δύο σημεία A, B ώστε $KA = KB$. Από τα A, B φέρνουμε ευθύγραμμα τμήματα $AG \perp \epsilon$ και $BD \perp \epsilon$ με τα Γ, Δ να ανήκουν στην ϵ . Δείξτε ότι το K είναι μέσο του Γ

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και $A\Gamma = 2B\Delta$. Αν E, Z είναι τα μέσα των $AO, \Gamma O$ αντίστοιχα δείξτε ότι το ΔEBZ είναι τετράγωνο

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Gamma = B\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$. Να δείξετε ότι:

- α.** $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$ Μονάδες 10
- β.** Οι γωνίες A, Δ είναι παραπληρωματικές Μονάδες 9
- γ.** $AB \parallel \Gamma\Delta$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Να αποδείξετε ότι: Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Μονάδες 10

B. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (A) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B)

Μονάδες 10

Στήλη A Τετράπλευρα	Στήλη B Ιδιότητες
1. Τραπεζίο 2. Τετράγωνο 3. Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο 4. Ρόμβος	i. Οι διαγώνιες είναι ίσες και τέμνονται κάθετα ii. Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες iii. Οι διαγώνιες είναι ίσες iv. Το άθροισμα των γωνιών του είναι 460° v. Δυο απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και άνισες

Θέμα 2°

A. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι Σωστές ή Λάθος :

α. Δυο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις γωνίες τους ίσες μια προς μια και μια πλευρά ίση.

β. Η διάμεσος ισοσκελούς τραπεζίου χωρίζει το τραπέζιο σε δυο ίσα τραπέζια.

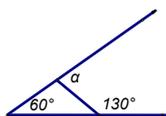
γ. Αν δυο γωνίες ενός τριγώνου είναι αντίστοιχα 70° και 40° το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Μονάδες 10

B₁. Να βρείτε τη γωνία \hat{B} ενός τριγώνου ABΓ όταν $\hat{\Gamma} = 54^\circ$ και $\hat{A} = \hat{B}$.

Μονάδες 5

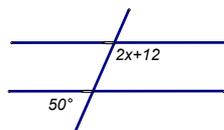
B₂. Να βρείτε τη γωνία α στο διπλανό σχήμα.



Μονάδες 5

B₃. Αν είναι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ τότε το x είναι ίσο με :

i. 59° **ii.** 15° **iii.** 34° **iv.** 82°



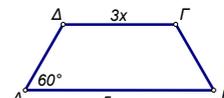
Μονάδες 5

Θέμα 3°

A. Δίνεται το ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ.

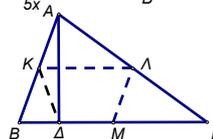
Να υπολογίσετε την περίμετρο του.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



Μονάδες 10

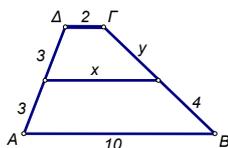
B. Στο τρίγωνο ABΓ του παρακάτω σχήματος το AD είναι ύψος και τα σημεία K, Λ και M είναι τα μέσα των πλευρών του. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο KΛMΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Μονάδες 15

Θέμα 4°

A. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα x και y στο επόμενο σχήμα. Δίνεται ότι $AB // \Gamma\Delta$.



Μονάδες 5

B. Δίνεται τρίγωνο ABΓ ($\hat{B} > \hat{\Gamma}$) και η AD διχοτόμος της \hat{A} .

Από το B φέρουμε ευθεία κάθετη στην AD που τέμνει την AG στο H και την AD στο Z. Αν M μέσο της BΓ να δείξετε ότι:

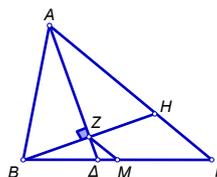
α. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ABZ και AZH

β. Τι συμπέρασμα προκύπτει για το σημείο Z της BH και για το είδος του τριγώνου ABH.

γ. Να αποδείξετε ότι : $H\Gamma = A\Gamma - AB$

δ. Να αποδείξετε ότι : $ZM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$

ε. Να αποδείξετε ότι : $\widehat{\Delta ZM} = \frac{\hat{A}}{2}$



Μονάδες 4

Μονάδες 4

Μονάδες 4

Μονάδες 4

Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές

Μονάδες 12

B. α. Αν οι γωνίες ενός τριγώνου είναι $2x$, $3x$ και $4x$ αντίστοιχα τότε η μικρότερη γωνία του τριγώνου είναι:

A. 10° B. 20° Γ. 30° Δ. 40°

Μονάδες 7

β. Βρείτε την εξωτερική της μεγαλύτερης γωνίας του παραπάνω τριγώνου

Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 40^\circ$. Προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ και προς το μέρος του B και προς το μέρος του Γ κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E = AB = A\Gamma$

α. Δείξτε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

Μονάδες 12

β. Υπολογίστε τις γωνίες του τριγώνου $A\Delta E$

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και από τις απέναντι κορυφές του A και Γ φέρνουμε κάθετες AE και ΓZ στη διαγώνιο $B\Delta$

α. Να αποδείξετε ότι $AE = \Gamma Z$

Μονάδες 13

β. Αν O είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι $OE = OZ$

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB // \Gamma\Delta$. Στην προέκταση της ΔA (προς το μέρος του A) παίρνουμε τμήμα $AM = \Delta A$. Από το M φέρνουμε τη $MK \perp \Delta\Gamma$ (K σημείο της $\Delta\Gamma$).

α. Δείξτε ότι $AK = B\Gamma$

Μονάδες 10

β. Δείξτε ότι $\widehat{AK\Delta} = \hat{\Gamma}$

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma K$ είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 8