ΓΕΝΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 2008

ΑΛΓΕΒΡΑ

ΤΑΞΗ Β'

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν συν(α + β) ≠0, συνα ≠ 0 και συνβ ≠0 ισχύει:

$$\text{εφ}(\alpha+\beta)=\frac{\text{εφα}+\text{εφβ}}{1-\text{εφα εφβ}}$$ Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ(σωστό) ή Λ(λάθος)κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν ημx = ημθ, τότε $x = 2\kappa\pi - \theta$ ή $x = 2\kappa\pi + \pi + \theta$, $\kappa \in \mathbb{Z}$

β. Αν $\alpha^x > \alpha^y$ με $0 < \alpha < 1$, τότε $x > y$

γ. $\text{συν}2\alpha = 1 - 2\text{ημ}^2\alpha$

δ. Αν $\alpha > 0$, με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log\theta_1 \ \log\theta_2$

ε. Αν $\alpha > 0$, με $\alpha \neq 1$, τότε $\log_\alpha 1 = 0$, $\log_\alpha \alpha = 1$ Μονάδες 15

Θέμα 2ο

α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\text{συν}(\alpha-\beta)-\text{συν}(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha-\beta)+\text{συν}(\alpha+\beta)} = \text{εφα εφβ}$ Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{συν}2x = 1 + \text{ημ}x$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

α. Να λύσετε την εξίσωση: $9^x - 3^{x+1} - 3^x + 3 = 0$ Μονάδες 10

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} < 2$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^4 + \alpha x^3 - (6-\alpha)x^2 + \beta x + 2\beta - 3\alpha + 1$, το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 - 1$

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 Μονάδες 9

γ. Να λύσετε την ανίσωση P(x) <0 Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha + \beta, \alpha, \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ να δειχθεί ότι $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε Σωστές (Σ), ή Λανθασμένες (Λ) τις προτάσεις:

α. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$, τότε ισχύει $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

β. Αν $x - p$ παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ τότε το p είναι ρίζα του $P(x)$

γ. $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sigma\upsilon\nu(\alpha + \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ και $\varepsilon\varphi(2\alpha + \beta) = 2$

α. Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3}$ Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση $2\eta\mu(x + \alpha) - \eta\mu(x - \alpha) = 0$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha - 3)x^3 + \beta x^2 - x - 2$

α. Αν $x + 1$ είναι παράγοντας του $p(x)$ και $p(1) = -4$, να βρεθούν τα α και β

Μονάδες 9

β. Να γράψετε το $p(x)$ ως γινόμενο παραγόντων, αν $\alpha = 4$ και $\beta = -1$

Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $p(x) > 0$ Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 5

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$ Μονάδες 10

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Πότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $x \in R$ είναι γνησίως αύξουσα ;

Μονάδες 5

Β. Να δείξετε ότι $\log_\alpha x^k = k \cdot \log_\alpha x$ για κάθε $\alpha > 0$ και $x > 0$

Μονάδες 12

Γ. Κάθε στοιχείο της στήλης Α είναι ίσο με ένα και μόνο στοιχείο της στήλης Β. Συνδέστε κατάλληλα τα στοιχεία των δύο στηλών συμπληρώνοντας τον πίνακα που ακολουθεί αφού τον μεταφέρετε στο τετράδιο σας

ΠΙΝΑΚΑΣ

στήλη Α	στήλη Β
1. συν (β – α)	**α.** συνασυνβ – ημαημβ
2. ημ (α + β)	**β.** ημβσυνα – ημασυνβ
3. συν (α + β)	**γ.** –ημβσυνα + ημασυνβ
4. ημ (α – β)	**δ.** ημβημα – συνασυνβ
	ε. ημασυνβ + ημβσυνα
	στ. συνασυνβ + ημβημα

Αντιστοίχιση	
1.	
2.	
3.	
4.	

Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Να λύσετε την

Δίνεται η εξίσωση $2\eta\mu^2 \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu 2x = 1$ (1)

Α. Να δείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση (1) Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Α. Να βρεθούν οι αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και ρίζα το 2 Μονάδες 13

Β. Αν $\alpha = 5$ και $\beta = 5$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\sqrt{e^{2x} - e^x - 2}$ και $g(x) = \ln(e^x + 1)$

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot f(x) - g(x) = \ln 2$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Με τη προϋπόθεση ότι συν(α+β) ≠ 0, συνα ≠ 0 και συνβ ≠ 0 να αποδείξετε ότι:

$$εφ(α + β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας τους παρακάτω τύπους ως Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. ημ2α = 2ημασυνα

β. $συν2α = 2ημ^2α - 1$

γ. $συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$

δ. ημ(α – β) = ημβσυνα – ημασυνβ Μονάδες 4

Γ. Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας του παρακάτω τύπους :

α. log10 =…….. **β.** $e^{lnθ}$=…… (θ > 0) **γ.** $log(θ_1θ_2)$ = …….., $θ_1, θ_2 > 0$

δ. $log(\frac{θ_1}{θ_2})$ =……., $θ_1, θ_2 > 0$ **ε.** $lnθ^κ$=……, θ > 0, κ∈R

στ. Αν x–ρ παράγοντας του πολυωνύμου P(x) τότε P(ρ) =……. Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Α. Να δείξετε ότι : $\frac{1 + συν2θ + ημ2θ}{1 - συν2θ + ημ2θ} = σφθ$ Μονάδες 12

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $2 - 4ημ^2\frac{x}{2} = συν^2x$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + (α + β)x^2 + βx + 3$

Α. Να βρείτε τις τιμές των α, β ∈R αν : P(1) = 13 και P(–2)=1 Μονάδες 8

Β. Αν α =2 και β =3 τότε :

α. Να κάνετε τη διαίρεση του P(x) με το (x +3)(και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης . Μονάδες 9

β. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{P(x) + 15}{x - 3} \geq 0$ Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(3x - 11)}{\ln(x - 5)}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της . Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2 Μονάδες 7

Β. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3^x \cdot 3^{2y} = 243 \\ \ln x - \ln y^2 = \ln 3 \end{cases}$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν θ_1, θ_2 θετικοί αριθμοί και $0 < \alpha \neq 1$, να αποδείξετε ότι:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε στη κόλα σας κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις με το Σ ή το Λ, αν

η πρόταση είναι σωστή ή λανθασμένη αντίστοιχα.

1. συν(α + β) = συνασυνβ + ημαημβ.
2. $\text{ημ}^2\alpha = \dfrac{1 + \text{συν}2\alpha}{2}$
3. Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x), τότε το πολυώνυμο P(x) διαιρείται ακριβώς με το x − ρ.
4. Ισχύει η ισοδυναμία: $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Α. Να δείξετε ότι: $\text{συν}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \text{συν}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{ημ}x$. Μονάδες 12

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{συν}\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) - \text{συν}\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \text{συν}2x$. Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + x^2 + (\alpha-2)x + \beta + 5$.

Α. Να βρείτε τα α, $\beta \in R$, ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x −1 και διαιρούμενο με το x +2 να αφήνει υπόλοιπο 9. Μονάδες 12

Β. Για α = −3 και β = −2 να λύσετε την ανίσωση $P(x) \leq 0$. Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 8) - x\log 2 - \log 7$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μονάδες 6

Β. Να δείξετε ότι $f(x) = \log\dfrac{4^x - 8}{7 \cdot 2^x}$. Μονάδες 9

Γ. Να λύσετε την εξίσωση: f(x) = 0. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$.

Να γράψετε τους κατάλληλους περιορισμούς. Μονάδες 12

Β. Να δείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha-\eta\mu^2\alpha$. Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή **(Σ)** ή λανθασμένη **(Λ)** καθεμία από τις ισότητες που ακολουθούν:

α. $\log_\alpha\alpha=\alpha$.

β. $\log_\alpha 1=1$

γ. $\log 10=\ln e$

δ. $\log_\alpha(\theta_1+\theta_1)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^4-(\lambda-1)x^3-\lambda x-4,\quad \lambda\in R$

Α. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το x + 1.

Μονάδες 12

Β. Για λ = 2 νά λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu 2x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x}=\varepsilon\varphi x$ Μονάδες 12

Β. Αν $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{\eta\mu 2x+\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu 2x}=\varepsilon\varphi^2 x$

Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{x+5}+5^{x+2}=5^{x+3}+2^{x+4}$ Μονάδες 13

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(4x-1)=2\log 2+\log(x^2-1)$ Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση
$f(x) = ημx$ στο διάστημα $[0, 2π]$. Μονάδες 10

Β. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

i) Αν $\frac{3π}{2} > α > β > π$ τότε συνα …….. συνβ Μονάδες 3

ii) $εφ(α – β) =$ ……. Μονάδες 2

Γ. Να λυθεί η τριγωνομετρική εξίσωση: $2ημ^2x + 3συνx = 0$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να γράψετε το θεώρημα: **ταυτότητα της διαίρεσης**. Μονάδες 8

Β. Να βρείτε τα α και β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = – x^3 + 2αx – β + α$
να έχει παράγοντα το $x + 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$
με το $x + 1$ να είναι 3. Μονάδες 12

Γ. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $Q(x) = 2x^6 + 7x^2 + 3$
δεν έχει παράγοντα της μορφής $x – ρ$. Μονάδες 5

Θέμα 3ο

Α. Αν οι αριθμοί $x – 4$, x, $2x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής
προόδου να βρείτε το x. Μονάδες 5

Β. Σε μία αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 2, ο τελευταίος 98
και το άθροισμα όλων των όρων 1650. Να βρείτε:

i. το πλήθος των όρων Μονάδες 5

ii. τη διαφορά Μονάδες 5

iii. το άθροισμα $α_{13} + α_{14} + …. + α_{32}$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Α. Για τις συναρτήσεις $f(x) = α^x$ με $α > 1$ και $g(x) = \log_β x$ με $0 < β < 1$ να γράψετε:

i. το πεδίο ορισμού Μονάδες 2

ii. το σύνολο τιμών Μονάδες 2

iii. τη μονοτονία Μονάδες 2

iv. τις ασύμπτωτους των γραφικών τους παραστάσεων. Μονάδες 2

Β. Να λυθεί η παρακάτω λογαριθμική εξίσωση:

$$2\ln(2x – 1) – \frac{1}{2}\ln 9 = \ln(x – 1) + \ln(x + 1)$$ Μονάδες 12

Γ. Να λυθεί η εκθετική ανίσωση: $4^x – 9·2^x + 8 < 0$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α.

α. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1 - 2\eta\mu^2\alpha$ Μονάδες 5

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. $\eta\mu(\alpha - \beta) = \ldots\ldots$ Μονάδες 2

β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \ldots\ldots$ Μονάδες 2

γ. Αν $\alpha > 0$, με $\alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ είναι $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \ldots..$ Μονάδες 2

δ. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\theta > 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι $\log_\alpha \theta^\kappa = \ldots.$ Μονάδες 2

ε. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, είναι $\log_\alpha \alpha = \ldots$ Μονάδες 2

Γ. Να γράψετε το άθροισμα των ν πρώτων όρων γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ και πρώτο όρο α_1. Μονάδες 5

Θέμα 2ο

α. Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x^2 - x + 2$

Να υπολογίσετε το $\kappa \in \mathbb{R}$ αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου Μονάδες 10

β. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

α. Να λύσετε την εκθετική εξίσωση $2^{2x+1} = 4 \cdot 2^x$ Μονάδες 10

β. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ οι αριθμοί $\log(x+1)$, $\log 3\sqrt{2}$, $\log(x-2)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Ο αρχικός μισθός ενός υπαλλήλου είναι 800 €. Κάθε χρόνο γίνεται αύξηση στο μισθό του 30 €.

α. Να υπολογίσετε το μισθό του υπαλλήλου κατά τη διάρκεια του δέκατου πέμπτου χρόνου της εργασίας του. Μονάδες 10

β. Σε πόσα χρόνια ο μισθός του υπαλλήλου θα γίνει 1370 €. Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος ;

Β. Χαρακτηρίστε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις :

α. Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega$, όπου $\alpha_\nu \rightarrow \nu$ - οστός όρος

$\alpha_1 \rightarrow 1^{ος}$ όρος $\omega \rightarrow$διαφορά της προόδου.

β. Σε μια γεωμετρική πρόοδο, αν α, β, γ διαδοχικοί όροι ισχύει: $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$

δ. Το άθροισμα των **ν** πρώτων όρων αριθμητικής προόδου είναι: $\Sigma_\nu = \dfrac{\nu(\alpha_1+\alpha_\nu)}{2}$.

ε. Σε μια γεωμετρική πρόοδο με πρώτο όρο $\alpha_1 = 100$ και λόγο $\lambda = \dfrac{1}{2}$ ο $5^{ος}$ ορός είναι

$\alpha_5 = 6{,}25$

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + \kappa$

Α. Αν το 1 είναι ρίζα του P(x), να δείξετε ότι το κ = 6.

Β. Για κ = 6 να παραγοντοποιήσετε το P(x) και να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

Θέμα 3ο

Α. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\text{συνα}\eta\mu 2\alpha}{1+\text{συν}2\alpha} = \eta\mu\alpha$

Β. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu^2\varphi + \dfrac{\text{συν}\varphi\eta\mu 2\varphi}{1+\text{συν}2\varphi} - 1 = 0$ (για $\text{συν}2\varphi \neq -1$)

Θέμα 3ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $2\log\sqrt{6} - \log 0{,}6 = 1$

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x-1) + \log x + \log 5 = 2\log\sqrt{6} - \log 0{,}6$

Γ. Να λύσετε την ανίσωση : $\log(x-1) + \log x + \log 5 > 2\log\sqrt{6} - \log 0{,}6$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 15

Β. Να συμπληρώσετε στις παρακάτω ισότητες τα κενά που σημειώνονται με «….. »

α. συν(α + β) =……

β. $\log_\alpha\theta^\kappa$ =…….

γ. $\varepsilon\varphi(\alpha - \beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - ....}{.....}$

δ. Το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι :

$S_\nu = \alpha_1 \dfrac{.....}{.....}$

δ. ημx = ημθ ⇔ x =..... ή x = ...

Θέμα 2ο

Οι αριθμοί $\alpha = 3x - 3$, $\beta = 11$, $\gamma = 5x + 1$ με τη σειρά που δίνονται είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου.

α. Να βρεθεί το x.

β. Για x = 3 να βρεθεί ο 20ος όρος (α_{20}) της αριθμητικής προόδου.

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \kappa x^2 - (2\kappa + 1)x + 6$

α. Αν είναι $P(2) = -4$ να βρείτε το κ.

β. Για κ = 2 να αποδείξετε ότι το P(x) έχει παράγοντα το (x + 2).

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$, για κ = 2.

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^{2x} - 11\cdot 10^x + 10)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f αφού λύσετε την ανίσωση

$\omega^2 - 11\omega + 10 > 0$

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 1

γ. Να εξετάσετε αν οι λύσεις της f(x) = 1 είναι δεκτές.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 0$ και $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$.

Μονάδες 12

Β. Τι ονομάζουμε αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου; Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος.**

1. $e^x = \theta \Leftrightarrow \ln\theta = x$, $\theta > 0$.

2. Αν ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x–ρ, τότε ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του P(x) με το x–ρ είναι μηδέν.

3. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

4. $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$. Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Δίνεται η παράσταση $A = \sigma\upsilon\nu 2x + 5\sigma\upsilon\nu x + 3$.

α. Να αποδείξετε ότι $A = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x + 2$. Μονάδες 12

β. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + 5\sigma\upsilon\nu x + 3 = 0$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + 11x + \beta$ διαιρούμενο δια (x–1)(x–2) δίνει πηλίκο π(x) και αφήνει υπόλοιπο υ= 4.

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = -2$ Μονάδες 8

Β. Για $\alpha = -6$ και $\beta = -2$

i. Να βρεθεί το πηλίκο π(x). Μονάδες 8

ii. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 4$. Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left(e^{2x} - \alpha e^x + \beta\right)$ με $f(0) = \log 2$ και $f(\ln 6) = \log 12$.

Α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 5$ και $\beta = 6$ Μονάδες 6

Β. Για $\alpha = 5$ και $\beta = 6$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Μονάδες 6

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + \log\left(e^x + 1\right) = 1$. Μονάδες 8

iii. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $f(\ln 5) - f(0)$, $f(\ln 5)$, $f(\ln 6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ εάν $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

β. $\log_\alpha\theta^k = k\log_\alpha\theta$

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις και προτάσεις:

α. $\text{συν}(\alpha + \beta) = ...$

β. $\text{εφ}(\alpha + \beta) = ...$

γ. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - \rho$ εάν και μόνο εάν το ρ είναι ……..του πολυωνύμου P(x).

δ. Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι ……

ε. Έστω η συνάρτηση $y = f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ και $x \in R$. Η συνάρτηση είναι γνησίως ……

Μονάδες 10 + 5 + 10

Θέμα 2ο

Έστω η παράσταση: $A = \text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \text{συν}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + \text{συν}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

α. Να αποδείξετε ότι: $A = \text{συν}x$

β. Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 - 3 = -2\text{ημ}^2\frac{x}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ Μονάδες 10 + 15

Θέμα 3ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 3x + \beta$ με $\alpha, \beta \in R$

α. Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$ ούτως ώστε το P(x) να έχει ρίζες τους αριθμούς $1, -2$

β. Για τις τιμές $\alpha = 3$ και $\beta = -2$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ Μονάδες 10 +15

Θέμα 4ο

α. Να αποδείξετε ότι: $x^{\ln 2} = 2^{\ln x}$ εάν $x > 0$

β. Να λύσετε την ανίσωση: $2^{\ln x} - 2x^{-\ln 2} < 1$ Μονάδες 10 +15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Να αποδείξετε ότι :

α. $ημ2α = 2ημασυνα$

β. $συν2α = 2συν^2α - 1$

γ. $συν2α = 1-2ημ^2α$

δ. $ημ2α = \frac{1 - συν2α}{2}$

ε. $συν^2α = \frac{1+συν2α}{2}$ Μονάδες 25

Θέμα 2ο

Να λύσετε τις εξισώσεις :

Α. $3^{2x-1} + 3^{x+1} = 54$ Μονάδες 10

Β. $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση : $2ημx = συν2x - 1$ Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι : $εφα + σφα = \frac{2}{ημ2α}$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + (β + 2)x + 4$

Α. Να προσδιοριστούν τα α και β, έτσι ώστε το $P(x)$ να έχει ως παράγοντα το $x+2$ και ρίζα το 1. Μονάδες 10

Β. Για $α = -1$ και $β = -6$ να λυθεί η ανίσωση : $P(x) \geq (x-2)^2$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

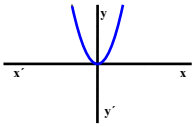
Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$ Μονάδες 15

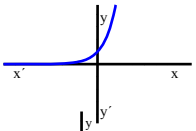
Β. Σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α , να αντιστοιχίσετε την γραφική της παράσταση από την στήλη Β :

ΣΤΗΛΗ Α **ΣΤΗΛΗ Β :**

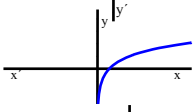
α. $f(x) = \eta\mu x$ 1.



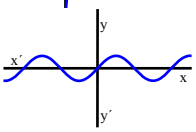
β. $g(x) = \ln x$ 2.



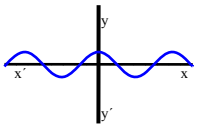
γ. $h(x) = \sigma\upsilon\nu x$ 3.



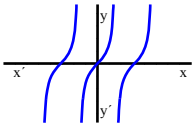
δ. $\sigma(x) = e^x$ 4.



ε. $\varphi(x) = \varepsilon\varphi x$ 5.



6.



Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 3x + 2$

Α. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ Μονάδες 12

Β. Να βρεθεί για ποια $x \epsilon R$ η γραφική παράσταση της $p(x)$ είναι πάνω από τον άξονα $x΄x$. Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση : $\ln\sqrt{x+3} - \ln(x+1) = 0$ Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η ανίσωση : $\log(x^2+3) < \log 4x$ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Όταν κάνουμε την διαίρεση $P(x) : (x^2 - x - 6)$ βρίσκουμε ένα πηλίκο $\Pi(x)$ κι ένα υπόλοιπο που είναι : **α.** c (αριθμός) **β.** $\alpha x + \beta$ **γ.** $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$

α. Ποια από τις παραπάνω μορφές πολυωνύμων, έχει το υπόλοιπο $\upsilon(x)$. Να δικαιολογήσετε την απάντηση σας και να γραφτεί η ταυτότητα της διαίρεσης. Μονάδες 8

β. Αν το 3 είναι ρίζα του $P(x)$ και η διαίρεση $P(x): (x+2)$ δίνει υπόλοιπο 5, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x): (x^2 - x - 6)$ Μονάδες 10

γ. Να βρείτε 2 ρίζες της εξίσωσης $P(x) = -x + 3$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι:Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x−ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ δηλ υ = P(ρ) Μονάδες 10

Β. Τι ονομάζεται Αριθμητική πρόοδος; Μονάδες 6

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) =$ …….

β. Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει: ……

γ. Ο $\nu_{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω είναι: …… Μονάδες 9

Θέμα 2ο

Α. Αριθμητική πρόοδος έχει $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_3 = 8$.

α. Να βρεθούν α_2 και ω. Μονάδες 10

β. Να βρεθούν α_{20} και S_{20} Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 4x^2 - (6 + \lambda)x - 10 = 0$ όπου $x \in R$ και $\lambda \in R$.

Α. Αν x −2 είναι παράγοντας του P(x) τότε να δείξετε ότι λ = 1 Μονάδες 8

Β. Για λ=1να λυθούν:

α. Η εξίσωση P(x)=0 Μονάδες 10

β. Η ανίσωση P(x) <0 Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)= x + \ln(e^x-1)$.

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μονάδες 5

Β. Να λυθεί η εξίσωση f(x)=ln2 Μονάδες 10

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: f(x)<x. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}, \text{αν } \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0,\ \sigma\upsilon\nu\beta\neq 0 \text{ και } \sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq 0$$

Μονάδες 10

Β. Να γραφεί η ταυτότητα της διαίρεσης 2 πολυωνύμων Δ(x) και δ(x), με δ(x) ≠ 0.

Γ. Τι ονομάζουμε ρίζα ρ ενός πολυωνύμου P(x);

Δ. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

α. $\log_\alpha \alpha =$

β. $\log_\alpha 1=$

γ. $\log_\alpha \theta^\kappa =$

δ. $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 =$

ε. $\log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2 =$

όπου $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\kappa \in \mathbb{R}$ Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \log x + \log y = \log 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται η εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu 2x - 7\sigma\upsilon\nu x = 0$ με $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$

α. Να δειχθεί ότι $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{4}$ Μονάδες 15

β. Να υπολογιστεί το συν2x Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το ημx Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha-3)x^3 + \beta x^2 - x - 2$

α. Αν το x + 1 είναι παράγοντας του P(x) και η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου για x = 1 είναι ίση με – 4, να βρείτε τα α, β. Μονάδες 10

β. Αν α = 4 και β = –1 να λυθεί η εξίσωση: P(x) = 0 Μονάδες 8

γ. Αν α = 4 και β = –1 να λυθεί η ανίσωση P(x) <0 Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $\alpha \in IR$ με $0 < \alpha \neq 1$, να δείξτε ότι $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ).**

α. $\log_\alpha 1 = 0$ για κάθε $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$

β. Αν $\eta\mu x = 1$ τότε $x = 2\kappa\pi$, $\kappa \in Z$

γ. Αν $x \in IR$ και $e^x = \theta$ τότε $x = \ln\theta$

δ. Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $2\beta = \alpha \cdot \gamma$

ε. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι 3ου βαθμού και το πολυώνυμο Q(x) είναι 2ου βαθμού τότε το πολυώνυμο $P(x) \cdot Q(x)$ είναι 6ου βαθμού. Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να δείξετε ότι $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \frac{\pi}{3}) + \eta\mu(\alpha - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}\,\eta\mu\alpha$ Μονάδες 12

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\sigma\upsilon\nu(x - \frac{\pi}{3}) + \eta\mu(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + 9x^2 + \beta x - 12$, με $\alpha, \beta \in IR$

α. Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου και ποιος ο σταθερός του όρος.

Μονάδες 4

β. Αν είναι γνωστό ότι το x + 1 είναι παράγοντας του P(x) και το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x), να δείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 4$ Μονάδες 9

γ. Για τις τιμές $\alpha = -6$ και $\beta = 4$, να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος α_ν με λόγο $\lambda = 2$ και $\alpha_1 = 1$.

α. Να δείξετε ότι $\alpha_2 = 2$ και $\alpha_3 = 4$ και να βρεθούν οι όροι: $\alpha_4, \alpha_7, \alpha_{11}$

Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το άθροισμα $S_{11} = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{11}$

Μονάδες 7

γ. Να λυθεί η εξίσωση $e^{2x} - \alpha_3 \cdot e^x + e^x + \alpha_2 = 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν α, β, $\alpha + \beta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha + \beta) = \frac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό , αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $0 < \beta \neq 1$, τότε για κάθε $\theta > 0$ ισχύει: $\log_\beta \theta = \frac{\log_\alpha \theta}{\log_\alpha \beta}$

β. Η συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα

γ. Για οποιεσδήποτε γωνίες α και β ισχύει: $\sigma\upsilon\nu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

δ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x +ρ είναι ίσο με P(ρ)

ε. Για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς θ_1, θ_2 και $0 < \alpha \neq 1$ ισχύει: $\log_\alpha \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\log_\alpha \theta_1}{\log_\alpha \theta_2}$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = 2x^4 + x^3 - x^2 + \alpha x + \beta$ και $Q(x) = x^2 - x + 2$

α. Να βρείτε το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της διαίρεσης P(x):Q(x) και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης Μονάδες 13

β. Να βρείτε τα α και β ώστε η παραπάνω διαίρεση να είναι τέλεια Μονάδες 7

γ. Να λύσετε την εξίσωση: P(x) = υ(x) Μονάδες 5

Θέμα 3ο

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2x - \sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$ Μονάδες 15

β. Αν $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$ και $4\kappa\pi + \frac{3\pi}{2} < x < 4\kappa\pi + 2\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$

Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$\varphi(x) = 2e^x - \frac{1}{\sqrt{e}} \quad \text{και} \quad g(x) = (2\ln 10)(\log \varphi(x))^3 + (\log \varphi(x))^2 + 2\ln \varphi(x) + 1$$

α. Να αποδείξετε ότι: $\varphi(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \Delta = \left(-\frac{1}{2} - \ln 2, +\infty\right)$ Μονάδες 9

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότ

$$(\ln 10)^2 \cdot g(x) = 2(\ln \varphi(x))^3 + (\ln \varphi(x))^2 + (\ln 10)^2 (2\ln \varphi(x) + 1)$$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της g βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δειχθεί ότι για κάθε $\theta>0$ και $1\neq\alpha>0$ ισχύει:

$\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa\log_\alpha\theta$, με $\kappa \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10

Β. Έστω η ακολουθία (α_ν) των πραγματικών αριθμών: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_\nu, \alpha_{\nu+1}, ...$

Πότε η ακολουθία αυτή ονομάζεται αριθμητική πρόοδος; Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη Λ)

α. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$ Μονάδες 2

β. $\eta\mu 2\alpha = \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$ Μονάδες 2

γ. $\log_\alpha\left(\dfrac{\theta_1}{\theta_2}\right)=\log_\alpha\theta_1-\log_\alpha\theta_2$ με θ_1, θ_2 θετικοί και $1\neq\alpha>0$ Μονάδες 2

δ. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0 Μονάδες 2

ε. Αν $0<\alpha<1$ τότε $\log_\alpha x<0$ Μονάδες 2

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 5x^2 + \lambda x + 9$

α. Τίνος βαθμού είναι το P(x); Μονάδες 5

β. Αν P(1) = 8 να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10

γ. Για λ = 3 να λυθεί η εξίσωση P(x) = 0 Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Σε αριθμητική πρόοδο είναι: $\alpha_8 = 13$ και $\alpha_{20} = 49$

α. Να βρεθεί ο α_{28} Μονάδες 15

β. Να βρεθεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Θεωρούμε την εξίσωση: $-1 + 2\log(x+1)=1$

α. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται ο $\log(x+1)$; Μονάδες 5

β. Να λυθεί η παραπάνω εξίσωση Μονάδες 10

γ. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $\log(-1+\log(x+1))$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

α. Με την προϋπόθεση ότι $συν(α+β) \neq 0$, $συνα \neq 0$ και $συνβ \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$εφ(α + β) = \frac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$$

Μονάδες 15

β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι αληθείς ή με **(Λ)**, αν είναι ψευδείς :

1	$εφ2α = \frac{εφ^2α}{1 - εφ^2α}$	**6**	Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - ρ$, αν και μόνο αν $P(ρ) = 0$
2	$συν^2α = \frac{1 - συν2α}{2}$	**7**	Η συνάρτηση $f(x) = α^x$, με $α>0$ και $α \neq 1$ είναι γνησίως φθίνουσα, αν $α > 1$
3	$εφ^2α = \frac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$	**8**	$\log_α(θ_1 + θ_2) = \log_α θ_1 \cdot \log_α θ_2$
4	$ημ(α + β) = ημα \cdot συνβ + συνα \cdot ημβ$	**9**	$\log_α\left(\frac{θ_1}{θ_2}\right) = \frac{\log_α θ_1}{\log_α θ_2}$
5	Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυώνυμου $P(x)$ με το $x - ρ$, είναι ίσο με $P(0)$	**10**	$\log_α(θ^κ) = κ \cdot \log_α θ$

Μονάδες 10

Στο ερώτημα β. να μεταφέρετε στην κόλα σας μόνο τις απαντήσεις

Θέμα 2ο

Να αποδείξετε ότι : $\frac{ημ2α + ημα}{1 + συν2α + συνα} = εφα$

Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Να λύσετε την εξίσωση : $3^{8x} - 12 \cdot 9^{3x} + 26 \cdot 3^{4x} + 12 \cdot 3^{2x} - 27 = 0$

Μονάδες 25

Θέμα 4ο

Να αποδείξετε ότι : $\frac{\log(11 + 6\sqrt{2}) + 2\log(3 - \sqrt{2})}{2\log\sqrt{7}} = 2$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με P(ρ). Μονάδες 12

β. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού και ποιο το σύνολο τιμών της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$, με $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$.

γ. Γράψτε στην κόλλα σας τη σωστή απάντηση από τις παρακάτω

i. Το $\eta\mu^2\alpha$ είναι ίσο με:

Α. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ **Β.** $\frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$ **Γ.** $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$ **Δ.** $\frac{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}{2}$

ii. Η παράσταση ημβσυνα – συνβημα είναι ίση με:

Α. ημ(β – α) **Β.** ημ(α – β) **Γ.** ημ(α + β) **Δ.** συν(α + β)

Μονάδες 8

Θέμα 2ο

α. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{1-\eta\mu 2\theta}{(\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta)^2}=1$. Μονάδες 12

β. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{8}-\eta\mu x\eta\mu\frac{\pi}{8}=2\sigma\upsilon\nu^2 x-1$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Αν το πολυώνυμο: $P(x) = x^4 + x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 2$, έχει παράγοντες το (x–2) και το (x+1) τότε:

α. Να αποδειχθεί ‘ότι: $\alpha = -5$, $\beta = -3$. Μονάδες 10

β. Να βρεθεί το πηλίκο της: P(x): (x^2-x-2) Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Έστω η συνάρτηση: $f(x) = \log(1-\frac{1}{x})$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση: $f(3\cdot 2^x+4^x) = f(28)$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta > 0$ και $\kappa \in R$ ισχύει $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \cdot \log_\alpha \theta$.

Μονάδες 10

Β. Για τη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$ να γράψετε:

α. Το πεδίο ορισμού

β. Το σύνολο τιμών

γ. Τη μονοτονία

δ. Τα σημεία τομής με τους άξονες

ε. Τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης Μονάδες 5

Γ. Τι ονομάζουμε πολυώνυμο του x και τι ρίζα του πολυωνύμου Μονάδες 4

Δ. Να συμπληρώσετε στο γραπτό σας τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. $\ln\theta = x \Leftrightarrow \theta =$…..

β. $e^{\ln\theta} =$ …….

γ. $\ln 1 =$ …….

δ. $\text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta - \text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}\beta =$....

ε. $\text{εφ}(\alpha - \beta) =$....

στ. $\text{εφ}x = \text{εφ}\theta \Leftrightarrow x =$….. Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $3\text{συν}2x + 10\text{συν}x - 1 = 0$

α. Να βρείτε την τιμή του συνx. Μονάδες 13

β. Αν $\text{συν}x = \frac{1}{3}$ και $\text{ημ}x > 0$ να υπολογίσετε το ημ2x και το συν2x. Μονάδες 12

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 3\alpha x + 2\beta$, $\alpha, \beta \in R$. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το $x^2 - 4$ είναι το $\upsilon(x) = 5x + 8$

α. Να βρείτε τα α και β Μονάδες 13

β. Αν $\alpha = 11$ και $\beta = -8$, να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το $x^2 - 4$

Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log\left(x^3 - 4x^2 + 5x + \kappa\right)$, $\kappa \in R$

Α. Να βρείτε το κ ώστε $f(3) = 2\log 2$ Μονάδες 7

Β. Αν $\kappa = -2$,

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f Μονάδες 10

β. να δείξετε ότι $f(x) = 2\log(x-1) + \log(x-2)$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Με δεδομένο ότι ορίζονται οι εφαπτόμενες των γωνιών α, β και α + β να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σ (Σωστό) ή ως Λ(Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\,\eta\mu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\,\sigma\upsilon\nu\beta$

β. Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha-1$

γ. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x)

δ. Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύει: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu+1)\omega$

ε. Ισχύει: $\log_\alpha\theta = x \Leftrightarrow \alpha^\theta = x$ Μονάδες 2 × 5 = 10

Θέμα 2ο

α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\alpha$ Μονάδες 12

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2x + 2\sigma\upsilon\nu^2\dfrac{x}{2}=0$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3+(\beta-1)x^2-3x-2\beta+6$, $\alpha, \beta \in R$

α. Να βρείτε για ποιες τιμές των α, β το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα τον αριθμό 1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια του x +1 είναι ίσο με τον αριθμό 2

Μονάδες 13

β. Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο ερώτημα (Α) να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(e^x-1)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x Μονάδες 5

γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς f(ln2) και f(1) Μονάδες 5

δ. Να λύσετε την εξίσωση: f(2x) – f(x) = ln3 Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τον τύπο που δίνει το νιοστό όρο (α_ν) αριθμητικής προόδου που έχει πρώτο όρο τον α_1 και διαφορά ω. Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή **(Σ)** ή λανθασμένη **(Λ)** κάθε μια από τις προτάσεις που ακολουθούν:

α. Το ημ2α είναι ίσο με ημα · συνα

β. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^3 - \beta x + 5$ και $Q(x) = x^3 + \beta x^2 + 5 - \beta$ $\beta \in R$, είναι ίσα αν $\beta = 0$

γ. Αν οι αριθμοί 3κ, κ + 4, κ–1 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε ο κ είναι ίσος με 2

δ. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = 2^x$, είναι το R

ε. Η λογαριθμική συνάρτηση $f(x) = \log_\alpha x$ με $\alpha > 1$ είναι γνησίως αύξουσα

Μονάδες 10

Γ. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta_1, \theta_1 > 0$ να δειχτεί ότι: $\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_1) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Να δειχτεί ότι με τη σειρά που δίνονται οι αριθμοί

συν(α – β), ημα·ημβ, – συν(α + β) είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου,

ενώ οι αριθμοί

συν2x, ημx–1, $2\eta\mu^2 x$ δεν είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ ($\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$).

α. Να βρεθεί ο α, αν γνωρίζουμε ότι $f(3) = 8$ Μονάδες 5

β. Αν α = 2 να λύσετε την εξίσωση: $f(x+1) + f(x+2) + f(x-1) + f(x-2) = 54$

Μονάδες 20

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$

α. Να δειχτεί ότι έχει παράγοντα το $(x+1)^2$ Μονάδες 9

β. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$ Μονάδες 9

γ. Να βρεθούν τα κ και λ ώστε: $\dfrac{x^3 - 7x + 6}{p(x)} = \dfrac{\kappa}{x+1} + \dfrac{\lambda}{(x+1)^2}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$, με συν(α + β) ≠0, συνα ≠ 0 και συνβ ≠0

Μονάδες 15

Β. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση στα παρακάτω.

1. Για το συν2α ισχύει:

α. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2-2\eta\mu^2\alpha$ **β.** $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 2$

γ. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 1-2\eta\mu^2\alpha$ **δ.** $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha$

Μονάδες 5

2. Αν P(x) είναι πολυώνυμο, τέτοιο ώστε να ισχύει P(α) = 0, τότε το πολυώνυμο έχει παράγοντα:

α. x +α **β.** x – α **γ.** x +ρ **δ.** x – ρ

Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2\eta\mu\alpha+\eta\mu 2\alpha}=\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$ Μονάδες 15

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $\eta\mu 2x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2\alpha x + \beta^2 - 1$, με α, β ∈ ℜ, το οποίο έχει παράγοντα το x και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x + 1 είναι 3.

α. Να βρεθούν οι αριθμοί α και β Μονάδες 10

β. Για β = 1 και α = 2 να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης P(x) : (x +1) και να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω Ευκλείδειας Διαίρεσης Μονάδες 10

γ. Για β = 1 και α = 2 να λύσετε την ανίσωση P(x) ≤ 3 Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 8) - x\log 2 - \log 7$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) = \log\left(\dfrac{4^x-8}{7\cdot 2^x}\right)$ Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0 Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τους ορισμούς:

α. της αριθμητικής προόδου Μονάδες 5

β. της γεωμετρικής προόδου Μονάδες 5

Β. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν) με λόγο $\lambda \neq 1$ είναι $S_\nu = \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$ Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Α. Να δειχθεί ότι $\dfrac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$ Μονάδες 10

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $2 - \sigma\upsilon\nu^2 x = 4\eta\mu^2 \dfrac{x}{2}$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Να λυθεί η εξίσωση $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$ Μονάδες 25

Θέμα 4ο

Α. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 4$ διαιρείται ακριβώς με το $x - 2$ και $P(1) = 8$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in R$ Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η εξίσωση $x^4 + x^3 - 3x^2 - 4x - 4 = 0$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)** τις παρακάτω προτάσεις

α. $\text{συν}2\alpha = 1 - 2\text{συν}^2\alpha$

β. Ο αριθμός 1 είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$

γ. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν

δ. Για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει $\log(\theta_1 : \theta_2) = \log(\theta_1 - \theta_2)$

ε. Αν $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$ τότε $\log x_1 < \log x_2$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{συν}x - 2\text{ημ}^2\frac{x}{2} = 0$ Μονάδες 15

Β. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1 - \text{συν}2\alpha + \text{ημ}2\alpha}{1 + \text{συν}2\alpha + \text{ημ}2\alpha} = \text{εφ}\alpha$

(με τους απαιτούμενους περιορισμούς να θεωρούνται δεδομένοι) Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^2 + (\alpha + \beta - 1)x - 3$ με α, β πραγματικούς αριθμούς

Α. Να βρεθούν τα α, β αν γνωρίζουμε ότι το $x^2 - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$

Μονάδες 15

Β. Αν $\alpha = 3$ και $\beta = -2$ να βρεθούν οι τιμές του x ώστε $\dfrac{P(x)}{4x + 1} \leq 0$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Έστω c πραγματικός αριθμός και συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το R για την οποία ισχύει

$f(0) = 0$ και $e^{f(x)} = \frac{1}{2}e^x + c$ για κάθε x που ανήκει στο $\mathbb{R}$

α. Να βρείτε την τιμή του c

β. Αν $c = \frac{1}{2}$ να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln\dfrac{e^x + 1}{2}$

γ. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 3x$

δ. Αν $g(x) = \ln\left(e^{2x} - 1\right)$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της g

ε. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Μονάδες $5 \times 5 = 25$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \eta\mu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\alpha$ Μονάδες 15

Β. Τι λέγεται λογάριθμος ενός θετικού αριθμού θ ως προς βάση του αριθμό α με $1 \neq \alpha > 0$

Μονάδες 5

Γ. α. Τι ονομάζουμε γεωμετρική πρόοδο; Μονάδες 2,5

β. Να συμπληρώσετε το κενό ώστε η πρόταση που ακολουθεί να είναι αληθής: « Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x - \rho$ είναι……. με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$ » Μονάδες 2,5

Θέμα 2ο

Να δείξετε ότι:

α. $\varepsilon\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$, όπου $\alpha \neq 2\kappa\pi \pm \dfrac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ Μονάδες 7,5

β. $\sigma\varphi\alpha = \dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha}$, $\alpha \neq \kappa\pi$ Μονάδες 7,5

γ. $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} + \dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \dfrac{2}{\eta\mu 2\alpha}$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

α. Να βρεθούν οι ρίζες της $x^2 - 3x + 2 = 0$ Μονάδες 5

β. Αν οι ευρεθείσες ρίζες της $x^2 - 3x + 2 = 0$ είναι και ρίζες του $P(x) = x^3 + \alpha x - \alpha + \beta$ να βρείτε τα α και β Μονάδες 15

γ. Για τις ευρεθείσες τιμές των α, β στο (β) ερώτημα να δείξετε ότι το P(x) διαιρείται δια του $x + 3$ Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Αν $x > 1$ να δείξετε ότι:

α. $\log(x + 1) + \log(x^2 - 1) = \log(x + 1)^2 (x - 1)$ Μονάδες 10

β. Να λύσετε την εξίσωση: $\log(x + 1) + \log(x^2 - 1) = 2\log(x + 1)$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $συν2α = 2συν^2α – 1$ Μονάδες 9

Β. Να απαντήσετε στο τετράδιο σας χαρακτηρίζοντας ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)** τα επόμενα:

α. Ο βαθμός ενός πολυωνύμου είναι φυσικός αριθμός

β. Κάθε πολυώνυμο ν-στου βαθμού έχει τουλάχιστον ν-ρίζες

γ. Το άθροισμα ή η διαφορά δύο πολυωνύμων του ιδίου βαθμού είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού.

δ. $10^x = θ \Leftrightarrow x = lnθ$

ε. $log1 = ln1$

ζ. $lnθ = 1 \Leftrightarrow θ = e$

η. $ln^2θ = lnθ^2$

θ. Να συμπληρώσετε: $e^{lnθ}$ = ... και 10^{log5} = ... Μονάδες 16

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1 - συν2α + ημ2α}{1 + συν2α + ημ2α} = εφα$ Μονάδες 12

Β. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $2συν(2x - \frac{π}{5}) - 1 = 0$ Μονάδες 10

β. $3συνx + 5 = 0$ Μονάδες 3

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 -- 7x^2 - (β + 11)x + α - β$.

Α. Για ποιά τιμή του $α \in R$, το πολυώνυμο P(x) διαιρείται ακριβώς με το x + 1;

Μονάδες 6

Β. Αν α = – 4, τότε :

α. Να βρείτε το πηλίκον π(x) και το υπόλοιπο υ της διαίρεσης του P(x) με το x + 1.

β. Να βρείτε για ποια τιμή του β, το P(x) έχει για παράγοντα το $(x +1)^2$ και να γράψετε το P(x) στη μορφή $(x + 1)^2φ(x)$, όπου φ(x) πολυώνυμο που θα βρείτε.

Μονάδες 4 + 8

γ. Να βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του P(x) και τις τιμές του x που είναι P(x) < 0.

Μονάδες 2 + 5

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln\dfrac{e - x}{e + x}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0 Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι: f(–x) + f(x) = 0 Μονάδες 7

δ. Να βρείτε το διάστημα , στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του, δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)**.

α. $\sigma\upsilon\nu\chi = \sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \chi = 2\kappa\pi + \theta$ ή $\chi = 2\kappa\pi + (\pi - \theta)$

β. $\sigma\varphi(\alpha - \beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha \cdot \sigma\varphi\beta + 1}{\sigma\varphi\alpha - \sigma\varphi\beta}$

γ. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού

δ. Η συνάρτηση $y = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$ και σύνολο τιμών το R.

ε. $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 = \log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2)$ με $\theta_1, \theta_2 > 0$ και $0 < \alpha \neq 1$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

α. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha} = 2\sigma\upsilon\nu\alpha$ Μονάδες 15

α. Να λύσετε την εξίσωση: $\dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \eta\mu 4x}{\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x} = -\sqrt{3}$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = \ln(2e^x + 2)$ Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανισότητα $f(x) < \ln(e - 1)$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Πολυώνυμο P(x) διαιρούμενο με το x + 1 δίνει υπόλοιπο 5 , διαιρούμενο με το (x–3) δίνει υπόλοιπο -7.

α. Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): $(x^2 - 2x - 3)$ είναι το αx + β, να αποδείξετε ότι είναι α = – 3 και β = 2

Μονάδες 12

β. Αν α = – 3 και β = 2 και π(x) το πηλίκο της διαίρεσης του P(x) με το $(x^2 - 2x - 3)$ να γράψετε την ταυτότητα της αντίστοιχης διαίρεσης Μονάδες 5

γ. Αν το πηλίκο π(x) είναι θετικό για κάθε x∈R, να λύσετε την ανισότητα : $P(x) > -3x + 2$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το (x−ρ) αν το ρ είναι ρίζα του P(x).

Μονάδες 10

Β. Δίνεται το πολυώνυμο : $P(x) = x^{2008} - x^{2004} + x^{2000} + x - 2$

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x + 1) είναι **Α:** 2, **Β:** 0, **Γ:** −2, **Δ:** 3

Δικαιολογήστε την απάντηση σας. Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις ως σωστή **(Σ)** ή λάθος **(Λ)**

α. $ημx = ημθ \Leftrightarrow x = 2κπ \pm θ$, $κ \in Z$

β. $συν2α = 2ημ^2α - 1$

γ. $\log_α(θ_1+θ_2)=\log_α θ_1 \cdot \log_α θ_2$

δ. $0 < α < 1$ τότε $\log α < 0$

ε. Η συνάρτηση $f(x) = 10^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα, με σύνολο τιμών το διάστημα $(0, +\infty)$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

α. Να λυθεί η εξίσωση : $συν^2x - 1 = 2συν^2\frac{x}{2}$ Μονάδες 12

β. Να αποδειχθεί ότι: $\frac{1 + εφα \cdot εφ2α}{εφα + σφα} = \frac{1}{2}εφ2α$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 + αx^2 + βx + 12$ το οποίο διαιρούμενο με το (x−1) δίνει υπόλοιπο ίσο με 12. Αν το P(x) διαιρείται με (x + 2) τότε.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β. Μονάδες 10

β. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 για α = −7 και β = 8. Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\frac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}$

α. Να λυθούν οι εξισώσεις : $2^{x+1} + 2^{x+2} - 24 = 0$ και $4^x - 6 \cdot 2^x + 8 = 0$

Μονάδες 9

β. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x) Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 0 Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x-ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ . Είναι δηλαδή υ= P(ρ) .

Μονάδες 15

Β. Για τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν είναι σωστές ή το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες .

1. $\text{συν}(\alpha+\beta) = \text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta + \text{ημ}\alpha \cdot \text{ημ}\beta$
2. $\text{συν}2\alpha = \text{συν}^2\alpha - \text{ημ}^2\alpha$
3. $\log_\alpha(\theta_1 - \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2$
4. Αν $\alpha > 1$, τότε για $x_1 < x_2$ έχουμε $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2}$
5. Αν x –ρ παράγοντας του πολυωνύμου P(x) , τότε το ρ είναι ρίζα του P(x) .

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{\text{ημ}(\alpha+\beta)}{\text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta} = \text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta$

Μονάδες 12

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\text{συν}2x - \text{συν}x + 1 = 0$

Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \beta x^2 + x + 6$.

Αν το P(x) έχει παράγοντα το x + 1 , τότε :

Α. Να αποδείξετε ότι $\beta = 4$

Μονάδες 8

Β. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0

Μονάδες 8

Γ. Να λύσετε την ανίσωση P(x) > 0

Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $2 \cdot 4^x - 17 \cdot 2^x + 8 = 0$

Μονάδες 13

Β. Να λύσετε την εξίσωση $\log(x+1) + \log(x-1) = 2 \cdot \log\sqrt{x+1}$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τον ορισμό του λογάριθμου ενός θετικού αριθμού θ με βάση $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$

Μονάδες 5

Β. Αν $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$, $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ Μονάδες 10

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά , ώστε οι παρακάτω προτάσεις ή ισότητες να είναι αληθείς:

α. $\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{\dots}{\dots}$, $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{\dots}{1-\dots}$

β. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το …… των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

γ. Η εκθετική συνάρτηση με βάση $\alpha > 1$ έχει πεδίο ορισμού το ……., είναι γνησίως ….., η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο …… και έχει ασύμπτωτο τον ημιάξονα ……..

δ. $\log_\alpha \alpha^x = \dots$, $\log_\alpha \alpha = \dots$, $\alpha > 0, \alpha \neq 1$, $\theta = e^{\dots}$ $\theta > 0$

ε. $\log_\beta \theta = \frac{\log_{\alpha^{\dots}}}{\dots}$, $\theta > 0$ $\alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \neq 1$ (τύπος αλλαγής βάσης λογαρίθμων)

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

β. $\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 - \eta\mu 2\alpha}$ Μονάδες 12

Β. Να λύσετε:

α. $\varepsilon\varphi\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \varepsilon\varphi x = 1$

β. $\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 2x = \frac{1}{2}$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Α. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - (\alpha + \beta)x + \beta - 4$ να έχει παράγοντα το $x^2 - 2x - 3$

Μονάδες 13

Β. Αν $\alpha = \frac{1}{3}$ και $\beta = 2$, να βρείτε:

α. Τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) του α) ερωτήματος τέμνει τον άξονα x΄x Μονάδες 6

β. Τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης P(x) του α ερωτήματος βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x Μονάδες 6

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 1}\right)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Μονάδες 12,5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \ln 2$ Μονάδες 12,5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ, είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ). Μονάδες 9

β. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

ημ2x = ……

συν2x = ……. = …….. = ……..

και να γράψετε τους τύπους που εκφράζουν τα: $ημ^2x$, $συν^2x$ και $εφ^2x$ συναρτήσει του συν2x.

Μονάδες 6

γ. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και g(x) = lnx. Να γράψετε το πεδίο ορισμού, το σύνολο των τιμών, τη μονοτονία και τα κοινά σημεία με τους άξονες xx΄ και yy΄ (διατεταγμένα ζεύγη), όταν υπάρχουν για τις συναρτήσεις f(x) και g(x) . Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Να λυθεί η εξίσωση: log(x – 1) + logx = 1 – log5 Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + kx^2 + 3x + 10$.

α. Να υπολογιστεί η τιμή του $k \in R$ για την οποία το x +1 διαιρεί το P(x).

Μονάδες 10

β. Αν k = – 6 να βρεθούν οι τιμές του $x \in R$, για τις οποίες η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα xx΄. Μονάδες 15

Θέμα 4ο

α. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί: συν2x , $ημ^2\frac{x}{2}$ – συνx, 3 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, αν και μόνο αν $2συν^2x + 3συνx + 1 = 0$. Μονάδες 8

β. Αν σε αριθμητική πρόοδο είναι: $α_1$ = συν2x , $α_2 = ημ^2\frac{x}{2}$ – συνx , $α_3 = 3$, με $x \in (0, π)$ να αποδείξετε ότι το x ισούται με $\frac{2π}{3}$, και είναι μοναδικό. Μονάδες 8

γ. Στην αριθμητική πρόοδο του (β) ερωτήματος να υπολογίσετε το άθροισμα:

$S = α_7 + α_{11} + α_{15} + α_{19} + ... + α_{71}$. Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$ Μονάδες 10

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες , ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. $\eta\mu(\alpha+\beta) =$

β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) =$

γ. $\eta\mu 2\alpha =$

δ. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) =$

ε. $\varepsilon\varphi 2\alpha =$

Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων

α. $\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{12} \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4} - \eta\mu\frac{\pi}{12} \cdot \eta\mu\frac{\pi}{4}$

β. $\eta\mu 70° \cdot \sigma\upsilon\nu 20° + \sigma\upsilon\nu 70° \cdot \eta\mu 20°$

γ. $\dfrac{\varepsilon\varphi 105° - \varepsilon\varphi 45°}{1 + \varepsilon\varphi 105° \cdot \varepsilon\varphi 45°}$

δ. $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\pi}{12} - 1$

ε. $1 - 2\eta\mu^2\frac{\pi}{6}$ Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Α. Αν το $P(x) = (9-\lambda^2)x^2 + (\lambda+3)x - (\lambda-3)$ είναι πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού, τότε ο λ είναι ίσος με **i.** 3 **ii.** -3 **iii.** 0 **iv.** 1

Μονάδες 10

Β. Να βρείτε το υπόλοιπο και το πηλίκο της διαίρεσης $(4x^3 - x^5 + 32 - 8x^2):(x+2)$

Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $\log_7 7^{x+1} = 3$ Μονάδες 10

β. $\log(1+x) = 1 + \log(1-x)$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$, με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, > 0$ να αποδείξετε ότι ισχύει

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 10

Β.α. Να γραφτεί η ταυτότητα της διαίρεσης δύο πολυωνύμων $\Delta(x)$ και $\delta(x)$

β. Τι βαθμό έχουν τα πολυώνυμα $P(x) = 9$ και $P(x) = 0$

γ. Τι ονομάζουμε ρίζα ενός πολυωνύμου; Μονάδες 9

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος:

α. Σε κάθε αριθμητική πρόοδο η διαφορά **ω** είναι πάντα θετικός αριθμός.

β. Τρεις αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει:

$2\alpha = \beta + \gamma$

γ. Το άθροισμα των πρώτων **ν** όρων αριθμητικής προόδου (α_ν) με διαφορά **ω** δίνεται από

τον τύπο $S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega\right]$ Μονάδες 6

Θέμα 2ο

α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \eta\mu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$ Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu 2x + 6\eta\mu^2\frac{x}{2} = 4$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = x^4 - (\alpha - 3)x^3 + \beta x^2 - x - 2$

α. Αν το $x + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$, και η αριθμητική τιμή του $P(x)$ για $x = 1$ είναι ίση με -4, να βρείτε τα α και β. Μονάδες 12

β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ αν $\alpha = 4$ και $\beta = -1$ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(4^\chi - 8) - x\cdot\log 2 - \log 7$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f Μονάδες 9

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x) = \log\left(\frac{4^x - 8}{7 \cdot 2^x}\right)$ Μονάδες 6

γ. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 0$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε αριθμούς $\theta_1, \theta_2 > 0$, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 9

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

Α1. Το πολυώνυμο $P(x) = (\lambda^5 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο, όταν ο πραγματικός αριθμός λ ισούται με:

α. -1 **β.** 0 **γ.** 1 **δ.** -5 **ε.** 5

Β1. Έστω P(x) σταθερό πολυώνυμο και P(2) = 5. Τότε $P(-2)$ ισούται με:

α. 5 **β.** -5 **γ.** 2 **δ.** -2 **ε.** 0 Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε $2\beta = \alpha + \gamma$

β. Αν σε μια γεωμετρική πρόοδο ο λόγος λ είναι θετικός, τότε όλοι οι όροι της είναι ομόσημοι.

γ. Αν $\alpha > 1$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι γνησίως αύξουσα.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

ε. Η εξίσωση $\eta\mu x = \frac{\pi}{3}$ είναι αδύνατη Μονάδες 10

Θέμα 2ο

α. Να λυθεί η εξίσωση: $2\eta\mu^2 x + 3\sigma\upsilon\nu x = 0$

Μονάδες 12

β. Να αποδείξετε ότι:

$(\eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x)(\eta\mu 3x - \sigma\upsilon\nu 3x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 5x$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(2^x - 1)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Μονάδες 7

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ Μονάδες 10

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 0$ Μονάδες 7

Θέμα 4ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 6$

α. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$ με τη βοήθεια του σχήματος Horner.

Μονάδες 12

β. Αν οι $-x^3 + 2$, $x^2 + 5$ και $-3x + 2$ με τη σειρά που δίνονται είναι οι τρεις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι $x = -2$

Μονάδες 6

γ. Να βρείτε το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου του ερωτήματος (β) Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο **υ** της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x – ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).

Μονάδες 9

Β. Αν **0 <** α ≠1 και θ **> 0**, να ορίσετε τον $\log_{\alpha}\theta$. Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας την λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Ισχύει $2ημα·συνα = ημ^2 α$

β. Αν τα πολυώνυμα *P(x)* και *Q (x)* είναι μη μηδενικά και έχουν βαθμούς μ και ν αντίστοιχα τότε το πολυώνυμο *P(x) + Q(x)* έχει βαθμό μ + ν.

γ. Αν για την ακολουθία $(α_ν)$ είναι $α_{ν+1} – α_ν = ω$ για κάθε ν **ε** N^* τότε η $(α_ν)$ είναι αριθμητική πρόοδος.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ έχει σύνολο τιμών το $(0, +∞)$.

ε. Η συνάρτηση $f(x) = lnx^2$ γράφεται και $f(x) = 2lnx$. Μονάδες 10

Θέμα 2ο

α. Να λύσετε την εξίσωση: $συν2x + 5συνx + 1= 0$ Μονάδες 12

β. Για κάθε πραγματικό αριθμό *x* να αποδείξετε ότι

$$2ημ^2x+ συν2x + 2ημ^2\frac{x}{2} = 2 – συνx$$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (α–7β)x^3+αx^2+βx –6$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

α. Αν ο αριθμός *–1* είναι ρίζα του *P(x)* και το υπόλοιπο της διαίρεση τ ο υ *P(x)* μ ε τ ο x –1 είναι ίσο με α, να αποδείξετε ότι α = 12 και β = *1* Μονάδες 12

β. Για τις τιμές των α και β του α·ερωτήματος, να βρείτε το ν - οστό όρο της αριθμητικής προόδου $(α_ν)$ η οποία έχει: πρώτο όρο τη μικρότερη ρίζα της εξίσωσης *P(x) = 0* και διαφορά ω τη μεγαλύτερη ρίζα. Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f(x) = log(logx)

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση *f(x) = 0* Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των ακεραίων $x \in Z$, για τους οποίους ισχύει $f(x) \leq 1$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιοδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 10

Β. Να δοθεί ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. $\log x^2 = 2\log x$ για κάθε $x \in R$ Μονάδες 5

β. Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων P(x) Q(x) με $P(x) \neq 0$ και $Q(x) \neq 0$ είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των δύο πολυωνύμων

γ. Το πολυώνυμο P(x) είναι μηδενικού βαθμού

δ. $\frac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} = \eta\mu^2\frac{\alpha}{2}$ για κάθε $\alpha \in R$

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και έχει ασύμπτωτη τον άξονα y΄y Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2\alpha x^2 - \beta x - 1$. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε να έχει παράγοντα το χ–1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+1) είναι 2

Μονάδες 10

Β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

α. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$ Μονάδες 10

β. Ν α βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση του P(x) τέμνει τον x' x

Μονάδες 5

Θέμα 3ο

Δίνεται η $\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3\eta\mu 2\alpha = 1$ με $\eta\mu\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$

α. Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha = 3$ Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu 2\alpha$ Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi(\chi - \alpha) = 2$ Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt{\ln 2x}$ και $g(x) = \ln\sqrt{2x}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$ Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $e^{2+2g(x)} \geq [f(e)]^2$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχτεί ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$ Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με τη λέξη Σωστό ή Λάθος

α. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha + 1$

β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta$

γ. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ με $P(\rho) = 0$, τότε το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$

δ. Αν $0<\alpha\neq 1$ και θ_1, θ_2 θετικοί πραγματικοί αριθμοί τότε $\log_\alpha\theta_1 - \log_\alpha\theta_2 = \log_\alpha(\theta_1\theta_2)$

ε. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν

στ. Αν $0<x_1<x_2$ τότε $\log x_1 < \log x_2$ Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 5x - 2$

α. Να αποδείξετε ότι το $x=-2$ είναι ρίζα του Μονάδες 6

β. Να γίνει η διαίρεση του $P(x)$ με το $x+2$ και να γραφεί η ταυτότητά της

Μονάδες 9

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x)<0$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Να λυθούν οι εξισώσεις

α. $\sigma\upsilon\nu 2x + 1 = 0$ Μονάδες 6

β. $\eta\mu^2 x = 1$ Μονάδες 7

γ. $4\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu 2x = 5$ στο διάστημα $(2\pi, 4\pi)$ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^x+5}\right)$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2\ln 2$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x−ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0.

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή **(Σ)** ή Λανθασμένη **(Λ)** κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις :

α. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το χ είναι ίσο με μηδέν.

β. Το πηλίκο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x−α είναι ίσο με P(α).

γ. Ο βαθμός του υπολοίπου σε μια διαίρεση πολυωνύμων που δεν είναι τέλεια είναι μικρότερος από το βαθμό του πηλίκου.

δ. Αν το πολυώνυμο P(x) είναι παράγοντας του πολυωνύμου Q(x), τότε η διαίρεση P(x):Q(x) είναι τέλεια. Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της 1ης στήλης με ένα μόνο στοιχείο της 2ης στήλης :

1η στήλη	2η στήλη
1. συν2α	**α.** $2συν^2α – 1$
2. ημ2α	**β.** $2ημ^2α - 1$
3. ημ(α - β)	**γ.** 2ημα·συνα
4. συν(α + β)	**δ.** συνα·συνβ – ημα·ημβ
	ε. ημα·συνβ – ημβ·συνα
	στ. ημα·συνβ + ημβ·συνα

Μονάδες 8

Β. Να συμληρωθούν οι ισότητες :

i. $\log 10^X$ =……, **ii.** $\log 100^X$ =……, **iii.** log1 =……, **iv.** log10 =……

Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η εξίσωση : $\log(3x - 2) - 2 = \frac{1}{2}\log(x + 2) - \log 50$ Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Α. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 45 , 39 , 33 , …

α. Να βρείτε τη διαφορά ω και τον όρο $α_{33}$. Μονάδες 4

β. Πόσοι είναι οι θετικοί όροι της αριθμητικής προόδου; Μονάδες 4

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = α_{12} + α_{13} + … + α_{33}$. Μονάδες 7

Β. Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x) = 4x^3 – 2x^4 – x + 4$ με το x – 2 με το σχήμα Horner. Γράψτε ποιο είναι το πηλίκο, ποιο είναι το υπόλοιπο και ποια η ταυτότητα της διαίρεσης.. Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 – 2x^3 – 7x^2 + (κ+1)x – λ – 1$

α. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το (x –3)(x + 1). Μονάδες 15

β. Για τις τιμές των κ, λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα να λύσετε την εξίσωση P(χ) = 0. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$

Μονάδες 15

Β. Να σημειώσετε Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $x<y$ τότε $\left(\frac{1}{5}\right)^x < \left(\frac{1}{5}\right)^y$

β. Αν $0 < \alpha \neq 1$ τότε ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$

γ. Αν $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε $\log(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log\theta_1 - \log\theta_2$

δ. Ισχύει $\text{συν}2\alpha = \text{ημ}^2\alpha - \text{συν}^2\alpha$

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει πεδίο ορισμού το R

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{συν}2x + 4\text{συν}x + 1$

α. Να παραγοντοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x - 6$

α. Να βρείτε τις ρίζες του P(x) Μονάδες 6

β. Να παραγοντοποιήσετε το P(x) Μονάδες 4

γ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$ Μονάδες 7

δ. Να λύσετε την εξίσωση: $10^{3\log x} - 7 \cdot 10^{\log x} - 6 = 0$ Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^x + 3\right)$ και $g(x) = \ln 3 + \ln\left(e^x - 1\right)$

α. Να βρείτε τα παιδία ορισμού των συναρτήσεων

Μονάδες 7

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$ Μονάδες 10