ΓΕΝΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 2008

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΤΑΞΗ Β΄

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: « Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα » Μονάδες 15

Β. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΔ είναι η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β και ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta А\Delta$, τότε το τρίγωνο είναι ………….. Μονάδες 2

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου δίνεται από τον τύπο ……………… Μονάδες 2

γ. Η σχέση που συνδέει τη γωνία φ_ν ενός κανονικού πολυγώνου με την κεντρική γωνία του ω_ν είναι ………………………… Μονάδες 2

δ. Αν η πλευρά λ_ν και το απόστημα α_ν ενός κανονικού πολυγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_\nu = R\sqrt{3}$ και $\alpha_\nu = \frac{R}{2}$, τότε το πολύγωνο είναι …………….. Μονάδες 2

ε. Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α, Β, η σχέση που συνδέει τα ευθύγραμμα τμήματα ΡΕ, ΡΑ και ΡΒ είναι: ……………………………………. Μονάδες 2

Θέμα 2ο

α. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60°$, β = 5, γ = 3. Να υπολογιστεί η διάμεσός του μ_α Μονάδες 13

β. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α = 4, β = 16 και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x. Μονάδες 12

Θέμα 3ο

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ($\hat{A} = 90°$) είναι ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8.

α. Να βρείτε το εμβαδόν του Μονάδες 8

β. Να βρείτε το ύψος του υ_α Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δύο κύκλοι (Ο, 3R) και (Ο΄, R) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Φέρνουμε την κοινή εξωτερική εφαπτομένη ΒΓ αυτών.

α. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = 2R\sqrt{3}$ Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι είναι $\widehat{BOA} = 60°$, και $\widehat{AO'\Gamma} = 120°$ Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ όπου α, β, γ πλευρές τριγώνου ΑΒΓ τότε η γωνία Α είναι οξεία

β. Το θεώρημα των συνημιτόνων σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τη σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A$

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τη σχέση $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$

δ. Το απόστημα του κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) δίνεται από τη σχέση $\alpha_6 = R\sqrt{3}$

ε. Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ ενός κύκλου (Ο,R) ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ, τότε ισχύει: $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$

στ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΑΓ = 8

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο Μονάδες 7

β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ Μονάδες 9

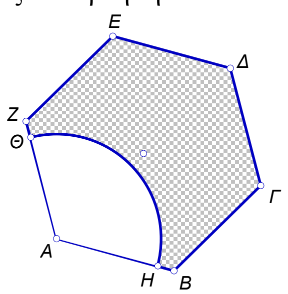
γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ

Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Σε κύκλο (Ο, R) και εκατέρωθεν του κέντρου του, θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ ώστε ΑΒ = R και ΓΔ = $R\sqrt{2}$. Να υπολογιστούν οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ, το ύψος του και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του R.

Θέμα 4ο



Δίνεται κανονικό εξάγωνο πλευράς 5m. Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα ίση με την ακτίνα του εγγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου φέρνω τόξο που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΖΑ στα Η και Θ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε:

α. Την ακτίνα του εγγεγραμμένου στο εξάγωνο κύκλου Μονάδες 5

β. Το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν του μικτόγραμμου ΗΒΓΔΕΖΘ Μονάδες 10

γ. Την περίμετρο του μικτόγραμμου σχήματος ΗΒΓΔΕΖΘ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα. Μονάδες 12

Β. Να δώσετε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**)

α. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $Ε = \frac{1}{2}αβημΑ$

β. Ο τύπος $Ε = \frac{δ_2 \,.\, δ_2}{2}$ όπου $δ_1$, $δ_2$ οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου ισχύει σε κάθε τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιους

γ. Οποιαδήποτε διάμεσος τυχαίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισεμβαδικά τρίγωνα.

γ. Η γωνία ενός κανονικού δεκαγώνου είναι 144° .

Μονάδες 8

Θέμα 2^o

Σε κύκλο ακτίνας R=10 είναι εγγεγραμμένο κανονικό εξάγωνο. Να βρεθούν:

α. Το εμβαδόν του εξαγώνου Μονάδες 10

β. Το εμβαδόν του μέρους του κύκλου που βρίσκεται έξω από το εξάγωνο. Μονάδες 15

Θέμα 3^o

Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ αντιστοίχως κατά τμήματα ΒΔ = ΒΑ, ΓΕ = ΓΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να δείξετε ότι:

α. (ΖΓΕ) = 2(ΑΒΓ) Μονάδες 15

β. Αν (ΑΒΓ) = 100 m^2 να βρείτε το εμβαδόν (ΔΕΖ) Μονάδες 10

Θέμα 4^o

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΑΒ = 6, ΒΓ = 12 και ΓΑ = 8.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι αμβλυγώνιο. Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς ΑΒ στην πλευρά ΑΓ.

Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 7

δ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{ο}

Α. Να αποδείξετε ότι: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα . Μονάδες 11

Β. Για το διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε τις ισότητες αφού πρώτα τις μεταφέρετε στη κόλλα σας.

α. $ΒΓ^2$ =.........+..........+2ΑΒ......

β. $ΒΓ^2 – ΒΑ^2$ = ...

(ώστε να εκφράζει το 2° θεώρημα των διαμέσων)

Είναι $\hat{A} > 90°$ και Μ μέσον της ΑΓ Μονάδες 4 + 4

Γ. Το τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ είναι οξυγώνιο αν:

i. $γ^2 < α^2 + β^2$ **ii.** $β < α < γ$ και $γ^2 < α^2 + β^2$ **iii.** $α^2 < β^2 + γ^2$

iv. $α < β < γ$ και $α^2 < β^2 + γ^2$ Μονάδες 1

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **Σ** η **Λ** τις προτάσεις.

α. Για ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με ύψος ΑΔ ισχύει: $ΑΒ^2 = ΒΓ\cdot ΒΔ$

β. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια ,τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητας.

γ. Δίνεται κύκλος (Κ, 10) και σημείο Α, ώστε ΑΚ =14. Τότε ισχύει: $Δ^{A}_{(K,10)}>0$

δ. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) ισχύει: $αυ_α = βγ$

ε. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ είναι: $E = \frac{αβγ}{2R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 5

Θέμα 2^{ο}

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ ΓΔ, ΑΒ < ΓΔ , $\hat{A} = \hat{Δ} = 90°$, ΑΒ = 4, ΑΔ = 3, ΒΓ = 5.
Να υπολογίστε :

α. Την προβολή ΕΓ της ΒΓ πάνω στη ΔΓ Μονάδες 8

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ Μονάδες 9

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ Μονάδες 8

Θέμα 3^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει ότι: $2α^2 + β^2 = γ^2$

α. Να δείξετε ότι $\hat{Γ} = 90°$ Μονάδες 8

β. Να δείξετε ότι $μ_γ = \frac{β}{2}$, όπου $μ_γ$ η διάμεσος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά γ. Μονάδες 9

γ. Αν επί πλέον ισχύει α = β να υπολογίσετε σε μοίρες τη γωνία Γ. Μονάδες 8

Θέμα 4^{ο}

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 30°$. Αν ο κύκλος με διάμετρο την ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε ,να δείξετε ότι:

α. $ΑΔ \cdot ΑΒ = ΑΕ \cdot ΑΓ$ Μονάδες 5

β. $\overset{\frown}{ΒΔΓ} = 90°$ Μονάδες 5

γ. $ΑΔ = \frac{ΑΓ\sqrt{3}}{2}$ και $ΑΕ = \frac{ΑΒ\sqrt{3}}{2}$ Μονάδες 8

δ. Να βρείτε το λόγο $\frac{(ΑΔΕ)}{(ΑΒΓ)}$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ = β, ΓΔ = Β και ύψος υ, υπολογίζεται με τον τύπο $E = \dfrac{(B+\beta)}{2}\cdot \upsilon$. Μονάδες 13

Β. Στον επόμενο πίνακα να συμπληρώσετε τις πλευρές και τα αποστήματα των αντίστοιχων κανονικών πολυγώνων συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου στο πολύγωνο κύκλου.

ν	**3**	**4**	**6**
λ_ν			
α_ν			

Μονάδες 12

Θέμα 2^o

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) με είναι ΑΒ = 8 και ΒΓ = 10. Αν ΑΔ είναι το ύψος του προς την υποτείνουσα, να βρείτε τα μήκη των τμημάτων:

Α. ΑΓ Μονάδες 07
Β. ΒΔ Μονάδες 09
Γ. ΑΔ Μονάδες 09

Θέμα 3^o

Σε τυχαίο τετράπλευρο ΑΒΓΔ έστω Κ, Λ, Μ, Ν τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

Α. $(\Delta MN) = \dfrac{1}{4}(A\Delta\Gamma)$ Μονάδες 09

Β. $(\Delta MN) + (BK\Lambda) = \dfrac{1}{4}(AB\Gamma\Delta)$ Μονάδες 08

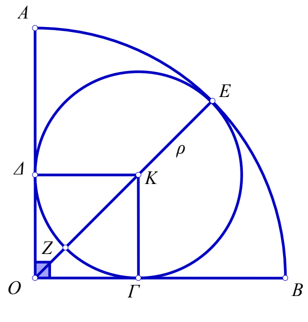
Γ. $(K\Lambda MN)=\dfrac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ Μονάδες 08

Θέμα 4^o

Στο διπλανό σχήμα ο κύκλος με κέντρο Κ καιακτίνα ρ εφάπτεται στα τμήματα ΟΑ, ΟΒ και στο τεταρτοκύκλιο ΑΕΒ. Αν η ακτίνα του τεταρτοκυκλίου είναι R, τότε:

Α. Να δείξετε ότι $\rho = R(\sqrt{2}-1)$.

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου ΔΟΓ από την ακτίνα R του τεταρτοκυκλίου.



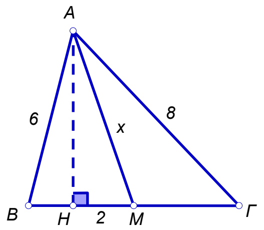
Μονάδες 13 + 12

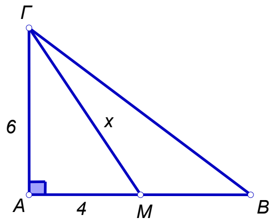
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι, η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή. Μονάδες 13

Β. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΒΓ και των διαμέσων x.





Μονάδες 12

Θέμα 2°

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ(προς το Γ) κατά τμήμα $ΓΔ = \frac{α}{2}$. Να δείξετε ότι ισχύει: $4(ΑΔ)^2 = 7(ΒΓ)^2$ (Υπόδειξη: Να φέρετε το ύψος ΑΗ)

Μονάδες 25

Θέμα 3°

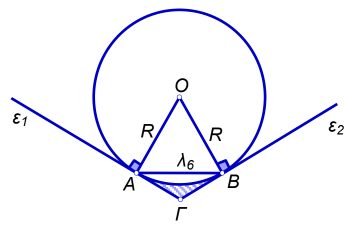
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 3γ. Αν η ΑΔ είναι διχοτόμος και η ΒΕ διάμεσος του τρίγωνου, να αποδείξετε ότι:

Α. $(ΑΒΔ) = \frac{1}{3}(ΑΔΓ)$ Μονάδες 12

Β. $(ΑΒΔ)\cdot(ΔΕΓ) = (ΑΔΓ)\cdot(ΒΕΔ)$ Μονάδες 13

Θέμα 4°

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια χορδή του $AB = λ_6$. Στα σημεία Α και Β φέρνουμε εφαπτόμενες που τέμνονται στο Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσά του, ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα. Μονάδες 13

Β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1^{\llcorner}$) με ύψος ΑΔ έχουμε: ΑΔ = x cm, ΒΔ = (x – 2) cm και ΓΔ = 2x cm. Να υπολογίσετε:

α. το ύψος ΑΔ Μονάδες 6

β. τα μήκη των κάθετων πλευρών. Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Α. Να βρείτε το είδος των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν:

α. $\alpha = 5$, $\beta = 12$ και $\gamma = 13$ Μονάδες 4

β. $\alpha = 4$, $\beta = 3$ και $\gamma = 6$. Μονάδες 4

Β. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\beta = 6$, $\gamma = 4$ και $\mu_\alpha = 4$.
Να υπολογίσετε:

α. την πλευρά α Μονάδες 4

β. την προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά α Μονάδες 6

γ. το συνημίτονο της γωνίας Α Μονάδες 7

Θέμα 3ο

Α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ όταν:

α. ΑΒ = 8, ΑΓ = 4 και $\hat{A} = 30^0$ Μονάδες 3

β) ΑΒ = 5, ΒΓ = 6 και ΑΓ = 7. Μονάδες 3

Β. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς 9 cm εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Να υπολογιστούν:

α. το μήκος του κύκλου (Ο, R) Μονάδες 4

β. το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται έξω από το τρίγωνο ΑΒΓ Μονάδες 6

γ. το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 6

δ. την περίμετρο P_6 του κανονικού εξαγώνου που εγγράφεται στον (Ο, R). Μονάδες 3

Θέμα 4ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ και ΓΑ κατά τμήμα ΓΔ = ΒΓ και $AK = \frac{1}{2}$ ΓΑ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της ΒΓ να δείξετε ότι:

α. $\frac{(ΓΚΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3}{2}$ Μονάδες 8

β. $\frac{(ΓΚΜ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{3}{4}$ Μονάδες 8

δ. Να βρεθεί ο λόγος $\frac{(ΜΚΔ)}{(ΑΒΓ)}$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του Μονάδες 17

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με «Σωστό» ή «Λάθος»

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90°$

β. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu B$

γ. Η γωνία ενός κανονικού ν – γώνου είναι $\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}$

δ. Το 1ο θεώρημα των διαμέσων σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ εκφράζεται από τον τύπο:

$\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2 + \frac{\mu_\alpha^2}{2}$ Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

Πολύγωνο	**Κεντρική γωνία ω_ν**	**Γωνία $\nu -$γώνου φ_ν**
Ισόπλευρο τρίγωνο		
Τετράγωνο		
Κανονικό εξάγωνο		

Μονάδες 16

Β. Να συμπληρώσετε τα κενά:

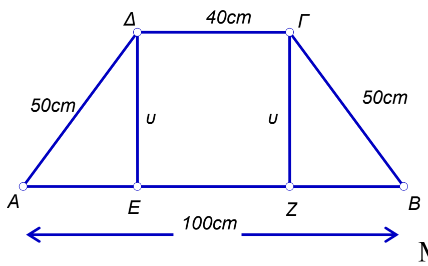
α. Ο τύπος του Ήρωνα είναι: $E = \sqrt{.............}$ όπου τ = ………… Μονάδες 3

β. Νόμος συνημιτόνων: $\alpha^2 = \beta^2 + ... - 2.... \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu...$ Μονάδες 3

γ. Τύπος διαμέσου: $\mu_\alpha^2 = \frac{...+...-\alpha^2}{4}$ Μονάδες 3

Θέμα 3ο

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο με ΑΒ //ΓΔ, ΑΒ = 100, ΓΔ = 40 και ΑΔ = ΒΓ = 50



α. Να υπολογίσετε το ύψος του και

β. το εμβαδόν του Ε Μονάδες 25

Θέμα 4ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α = 7, β = 5, γ = 3. Να βρείτε:

α. το είδος του τριγώνου

β. τη διάμεσο μ_α

γ. τη γωνία Α

δ. το εμβαδόν του τριγώνου (ΑΒΓ) Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν ένα τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) η πλευρά του είναι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και το απόστημά του $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Β. Χαρακτηρίστε ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)** τις προτάσεις :

α. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ και το απόστημα $\alpha_3 = \frac{R}{2}$

β. Η γωνία κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R)είναι $\varphi_6 = 120°$.

γ. Σε κάθε κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές ισχύει $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = R^2$ (λ_ν πλευρά , α_ν απόστημα, R ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου).

δ. Ισχύει πάντα $\omega_\nu + \varphi_\nu = 180°$, όπου είναι ω_ν κεντρική γωνία , φ_ν γωνία κανονικού εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R).

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ορθογώνιο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $AB = 4$ και $B\Gamma = 5$. Στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε το σημείο Δ έτσι ώστε $A\Gamma = \Gamma\Delta$.

α. Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = 3$

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΔ

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ , με $(AB\Gamma) = 30m^2$ και η διάμεσος του ΑΔ. Αν τα Κ, Λ είναι σημεία της ΑΔ τέτοια ώστε $AK = K\Lambda = \Lambda\Delta$:

α. Να αποδείξετε ότι, $(A\Gamma\Delta) = 15m^2$

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΒΚΛ.

Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $A\Gamma = 2\sqrt{3}$, $B\Gamma = 1$ και $\hat{\Gamma} = 30°$.

α. Να αποδείξετε ότι $AB = \sqrt{7}$

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο.

γ. Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΓΜ.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o

Α. Να υπολογίσετε την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο,R) , συναρτήσει της ακτίνας R. Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε **(Σ)** ή **(Λ)** τις προτάσεις:

α. Ένα τρίγωνο χωρίζεται από μια διάμεσό του σε δυο ισοδύναμα τρίγωνα.

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΜ διάμεσο, ισχύει $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

γ. Αν είναι $\widehat{A} > 90^o$ τότε $\alpha^2 + \beta^2 > \gamma^2$

δ. Δυο ισοδύναμα ορθογώνια τρίγωνα είναι πάντοτε ίσα.

ε. Σε κύκλο (Ο,R) για δυο σημεία Β, Γ αυτού ισχύει: $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120° \Leftrightarrow B\Gamma = R\sqrt{2}$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^o

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ΑΒ=6 , ΑΓ=8, ΒΓ=10.

Α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες. Μονάδες 10

Β. Να βρείτε την προβολή της πλευράς ΑΒ στη ΒΓ. Μονάδες 15

Θέμα 3^o

Σε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ συνδέουμε την κορυφή Α με τα μέσα Κ, Λ των Πλευρών ΓΔ και ΒΓ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

Α. $(A\Delta K) = \frac{1}{4}(AB\Gamma\Delta)$ Μονάδες 10

Β. $(AK\Gamma\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$ Μονάδες 15

Θέμα 4^o

Σε κύκλο (Ο, R) με R = 5cm. Φέρουμε διάμετρο ΒΓ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΓΕ = R = 5cm. Από το Ε φέρουμε την εφαπτομένη ΕΗ. Να υπολογίσετε:

Α. Την εφαπτομένη ΕΗ. Μονάδες 5

Β. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (ΟΓΗ) Μονάδες 10

Γ. Την περίμετρο του μεικτόγραμμου τριγώνου ΓΕΗ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθε των πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4\rho}$ όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου και α, β, γ τα μήκη των πλευρών του.

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A}>90°$.

γ. Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

δ. Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

ε. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει η σχέση: $\alpha_\nu^2+\dfrac{\lambda_\nu^2}{2}=R^2$. Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha=\sqrt{5}$, $\beta=\sqrt{2}$, $\gamma=1$.Φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ και το ύψος ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Μονάδες 6

β. Η γωνία $\hat{A}=135°$. Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το μήκος του ΔΜ . Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 7

Θέμα 3ο

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και εκατέρωθεν αυτής τις χορδές $A\Gamma=\lambda_4$ και $A\Delta=\lambda_3$. Να υπολογίσετε :

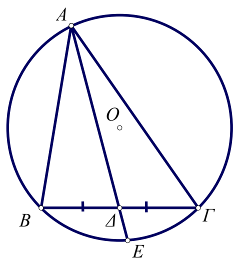
α. Τις γωνίες $\widehat{AO\Gamma}$ και $\widehat{AO\Delta}$. Μονάδες 6

β. Τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΓ και ΑΟΔ . Μονάδες 9

γ. Το εμβαδό του κυκλικού τμήματος με χορδή ΑΔ. Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Αν η προέκταση της διαμέσου ΑΔ του τριγώνου τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ε και είναι $A\Delta=5$, $\Delta E=1$ και $R=\sqrt{10}$ να αποδείξετε ότι:



α. $B\Gamma=2\sqrt{5}$.

β. $\widehat{BA\Gamma}=45°$.

γ. $AB^2+A\Gamma^2=60$.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 8 + 6 + 5 + 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να υπολογίσετε την πλευρά και το απόστημα ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R).

Β. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το τετράγωνο της υποτείνουσάς του ΒΓ ισούται με……..

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των τετραγώνων των δύο πλευρών ενός τριγώνου

είναι: $\beta^2 + \gamma^2 = ...\mu_\alpha{}^2 + \frac{\cdots}{2}$

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ισούται με: Ε =……=………=………

δ. Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με Ε =……….

ε. Η κεντρική γωνία ενός κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές ισούται με……….

στ. Το μήκος τόξου ενός κύκλου (Ο, R), είναι…………..

ζ. Το εμβαδόν ενός κύκλου (Ο,R), είναι…….. Μονάδες 12 + 14

Θέμα 2ο

Έστω κύκλος διαμέτρου ΑΒ = 2R = 5 και σημείο της Κ ούτως ώστε ΚΒ = 1,8.Φέρνουμε την κάθετο στη διάμετρο ΑΒ στο σημείο Κ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως. Να υπολογίσετε:

α. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΓΚ

β. Το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ

γ. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ Μονάδες 10 +7 +8

Θέμα 3ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο το μέσον της πλευράς του ΒΓ. Ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ και την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε.

α. Να αποδείξετε ότι: $A\Delta \cdot AB = \mu_\alpha{}^2 - \frac{\alpha^2}{4}$

β. Να αποδείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων (ΑΔΕ) και (ΔΕΓ) είναι:

$$\frac{(A\Delta E)}{(\Delta E\Gamma)} = \frac{AE}{E\Gamma}$$

Μονάδες 12 + 13

Θέμα 4ο

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με γωνία $\hat{\Gamma} = 30°$. Γράφουμε τον κύκλο (Β, ΒΑ), ο οποίος τέμνει την υποτείνουσα ΒΓ στο σημείο Δ και τον κύκλο (Γ, ΓΔ), ο οποίος τέμνει την ΑΓ στο σημείο Ε.

α. Να αποδείξετε ότι: $\beta = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$

β. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου ΑΔΕ συναρτήσει της πλευράς α του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10 +15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Σε κύκλο (Ο, R) να εγγράψετε τετράγωνο και να υπολογίσετε ως συνάρτηση της ακτίνας R., την πλευρά του και το απόστημά του. Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$. Μονάδες 5

β. Αν η γωνία φ_ν είναι μία από τις ίσες γωνίες ενός κανονικού ν-γώνου τότε:

$$\hat{\varphi}_\nu = 360° - \frac{180°}{\nu}$$ Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $AB = 6$, $B\Gamma = 12$ και $A\Gamma = 8$.

Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Μονάδες 8

Β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 8

Γ. Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = A\Gamma = 6$ και $\hat{A} = 120°$

Α. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

Β. Αν Ε είναι σημείο της πλευράς ΑΓ τέτοιο ώστε $AE = \frac{1}{3}A\Gamma$ και ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ. Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$). Από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ φέρνουμε $M\Delta \perp B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι : $\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = A\Gamma^2$ Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Έστω κύκλος (O, R)

α. Στον κύκλο να εγγράψετε κανονικό τετράγωνο

β. Να αποδείξετε ότι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ όπου λ_4 η πλευρά του τετραγώνου

γ. Να αποδείξετε ότι $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ όπου α_4 το απόστημα τετραγώνου. Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε κύκλο (O,R) το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα τόξου $\mu°$ δύνεται από τον τύπο

$$E = \frac{\pi R^2 \mu°}{180°}$$

β. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με τον λόγο ομοιότητας τους.

γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) τότε $\beta^2 = \gamma^2 - \alpha^2$

δ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} > 90°$) τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$

ε. Αν ℓ το μήκος τόξου $\mu°$ σε κύκλο (O,R) : τότε $\ell = \dfrac{\pi R \mu°}{360°}$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο ΑΒ και κέντρο Ο. Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε ημικύκλιο εντός του πρώτου. Από τυχόν σημείο Γ της ΟΑ φέρουμε κάθετο στην ΑΒ η οποία τέμνει το μικρότερο ημικύκλιο στο Δ και το άλλο ημικύκλιο στο Ε. Να αποδειχτεί ότι: $AE^2 = 2 \cdot A\Delta^2$.

Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς την ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε.

Α. Να υπολογίσετε τους λόγους των εμβαδών $\dfrac{(ABE)}{(AB\Gamma)}$ και $\dfrac{(ABE)}{(A\Delta E)}$

Μονάδες 15

Β. Να αποδείξετε ότι : $(ABE)^2 = (A\Delta E)\cdot(AB\Gamma)$

Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά του τόξα, $\overset{\frown}{AB} = 60°$, $\overset{\frown}{B\Gamma} = 90°$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta} = 120°$.

α. Να αποδειχτεί ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο και να υπολογιστούν οι πλευρές του. Μονάδες 5

β. Να αποδειχτεί ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ τέμνονται κάθετα.

Μονάδες 5

γ. Έστω Η το σημείο τομής των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ και Ζ το μέσο της πλευράς ΓΔ. Να αποδειχτεί ότι τα σημεία Η, Ο, Ζ είναι συνευθειακά. Μονάδες 8

δ. Αν το Μ είναι τυχαίο σημείο του τόξου ΑΒ να υπολογιστεί το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΜΒΑ, συναρτήσει της ακτίνας R. Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{ο}

Α. Αν από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΡΕ και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Α,Β τότε να δείξετε ότι ισχύει: $ΡΕ^2 = ΡΑ \cdot ΡΒ$ Μονάδες 9

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $α^2 < β^2 - γ^2$ τότε ……………………………………

β. Αν ΑΒΓ τρίγωνο και ΑΜ διάμεσος τότε ισχύει: $ΑΒ^2 + ΑΓ^2 =$………………....

γ. Αν ΒΔ ύψος τριγώνου ΑΒΓ με $\hat{Α} < 90°$ τότε $ΒΓ^2 =$……………………………

Μονάδες 6

Β. Να γράψετε πέντε διαφορετικούς τύπους για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 10

Θέμα 2^{ο}

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = 6, ΑΓ = 9 και ΒΓ = 7.

α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 5

β. Να βρεθεί η διάμεσος ΓΜ Μονάδες 5

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 10

δ. Να βρεθεί το ύψος ΓΔ του τριγώνου. Μονάδες 5

Θέμα 3^{ο}

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α = 10 είναι εγγεγραμένο σε κύκλο (Ο,R).

Αν Ε είναι το μέσον της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ. Τότε:

α. Να δείξετε ότι $ΒΕ = 5\sqrt{5}$. Μονάδες 9

β. Να δείξετε ότι ΒΕ = 5ΕΖ . Μονάδες 9

γ. Να βρείτε τη δύναμη του σημείου Ε ως προς τον κύκλο (Ο,R). Μονάδες 7

Θέμα 4^{ο}

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90^0$) δίνονται $ΑΒ=\sqrt{3}$ και ΑΓ=2ΑΒ. Αν Ρ το μέσον της ΒΓ, Μ το μέσον της ΑΒ και η ΑΡ τέμνει την ΓΜ στο Κ, τότε:

α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι: (ΑΚΓ)=(ΡΚΜΒ). Μονάδες 10

γ. Να δείξετε ότι: $(ΜΡΚ) = \frac{1}{12}(ΑΒΓ)$. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού εμβαδόν:

α. τετραγώνου

β. ορθογωνίου

γ. τραπεζίου

δ. παραλληλογράμμου Μονάδες 4

Β. α. Δώστε τον ορισμό της δύναμης ενός σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο, R)

Μονάδες 5

β. Τι συμπεραίνετε για τη θέση του σημείου Ρ ως προς κύκλο (Ο,R), όταν η δύναμη είναι:

i. θετική

ii. αρνητική

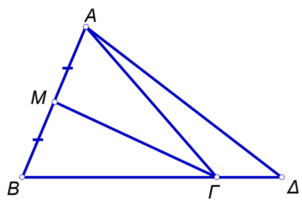
iii. ίση με μηδέν

(Να γίνει σχετικό σχήμα κατά περίπτωση) Μονάδες 6

Γ. Να αποδειχτεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Στο διπλανό σχήμα το Μ είναι μέσον της ΑΒ και ι σχύει ότι: $ΓΔ = \frac{1}{3}ΒΓ$, (ΑΒΓ) = 24.



Να υπολογιστούν τα εμβαδά:

α. (ΜΒΓ) Μονάδες 5

β. (ΑΓΔ) Μονάδες 10

γ. (ΑΜΓΔ) Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 5, β = 6, γ = 7

α. Να δειχθεί ότι (ΑΒΓ) = $6\sqrt{6}$ Μονάδες 7

Να υπολογιστούν:

β. το $υ_β$ Μονάδες 6

γ. η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 6

δ. η ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ Μονάδες 6

Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = $\sqrt{7}$, β = 2, γ = 1. Αν Μ μέσον της ΒΓ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου

α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ΑΒΓ ως προς τις γωνίες του Μονάδες 7

β. Να υπολογιστεί η γωνία Α Μονάδες 6

γ. Να υπολογιστεί η ΑΜ Μονάδες 6

δ. Να υπολογιστεί το ευθύγραμμο τμήμα ΔΜ Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)**.

α. Σε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των δύο κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

β. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν η γωνία $\hat{A} > 90°$

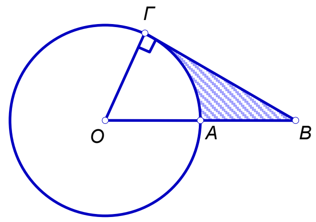
γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ_α ισχύει $\mu_\alpha = \dfrac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{4}$

δ. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες Α, Β, Γ ισχύει $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu B$

β. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ακτίνας R ισχύει $\alpha_\nu^2 + \lambda_\nu^2 = 4R^2$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ακτίνα ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ = R. Αν το ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο, όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα:



α. Να δείξετε ότι ΒΓ = $\sqrt{3}$ R Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι $\widehat{A O \Gamma} = 60°$ Μονάδες 5

γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

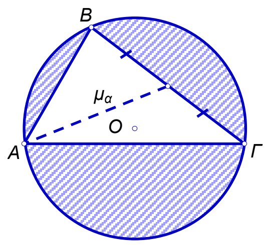
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται στο σημείο Θ.
Να αποδείξετε ότι:

α. (ΑΒΔ) = (ΑΔΓ) = (ΑΒΕ) Μονάδες (10)

β. (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) Μονάδες (15)

Θέμα 4

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, R), για το οποίο γνωρίζουμε ότι $\hat{A} = 60^o$, β = 5 και γ = 3.



α. Να δείξετε ότι $\alpha^2 = 19$. Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του τριγώνου μ_α Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου Μονάδες 5

δ. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος του κύκλου είναι

$\dfrac{76\pi - 45\sqrt{3}}{12}$ τ.μ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{o}

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου με βάσεις Β και β και ύψος υ είναι

$E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$ Μονάδες 15

Β. Να σημειώσετε Σωστό (Σ), Λάθος (Λ) στις παρακάτω προτάσεις

α. Η δύναμη σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (O,R) είναι $OP^2 - R^2$

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A$

γ. Το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ είναι $E = \frac{1}{2}\beta\gamma \cdot \eta\mu A$

δ. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα με επίκεντρη γωνία μ^o σε κύκλο (O,R) είναι $\frac{\pi R \mu}{180}$

ε. Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι $\lambda_6 = R\sqrt{3}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^{o}

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{A} = 90°$ ισχύει ΑΒ = 6, ΒΓ = 10. Αν ΑΔ το ύψος από την κορυφή Α να βρεθούν τα εξής: ΒΔ, ΓΔ, ΑΓ Μονάδες 25

Θέμα 3^{o}

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 + \gamma^2 = 5\alpha^2$ και οι διάμεσοι ΒΜ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Θ, να αποδείξετε:

α. $\hat{A} < 90°$ Μονάδες 10

β. $\widehat{B\Theta\Gamma} = 90°$ Μονάδες 15

Θέμα 4^{o}

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{A} = 90°$ με ΑΒ <ΑΓ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διάμεσο ΑΜ.

Αν ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΔΜ τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα και το ύψος ΑΔ έχει κοινό σημείο με την ΕΖ το σημείο Κ, να αποδείξετε:

α. $\frac{EB}{\Gamma Z} = \frac{AB}{A\Gamma}$ Μονάδες 15

β. $AK^2 = EK \cdot KZ$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχτεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα. Μονάδες 10

Β. Να γράψετε στο φύλλο σας τα γράμματα της στήλης Ι και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο:

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
α. Εμβαδόν τραπεζίου	**1.** $E = \tau\rho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$
δ. Εμβαδόν κυκλικού τομέα	**4.** $E = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$
ε. Εμβαδόν παραλληλογράμμου	**5.** $E = \frac{B+\beta}{2}\upsilon$

Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) ισχύει: ΑΒ = ΑΓ = 4

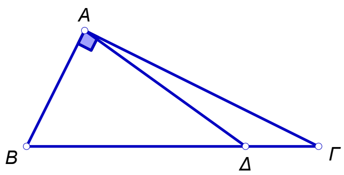
α. Να υπολογιστεί η ΒΓ. Μονάδες 10

β. Να υπολογιστεί το ύψος ΑΔ του τριγώνου Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$)

ισχύει: ΑΒ = 7, ΑΓ = 8 και $ΓΔ = \frac{1}{4}ΒΓ$.



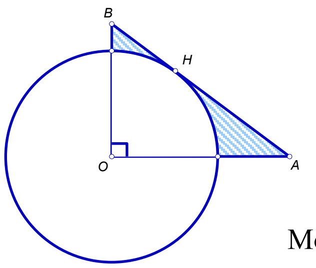
α. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΑΒΓ Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι: $\frac{(ΑΓΔ)}{(ΑΒΓ)} = \frac{1}{4}$ Μονάδες 12

γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΑΓΔ. Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο ($\hat{O} = 90°$), ΟΑ= 8, ΟΒ= 6 και η ΑΒ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο Η.



α. Να υπολογιστεί το ΑΒ Μονάδες 5

β. Να υπολογιστεί το ΟΑΒ Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι το ύψος ΟΗ είναι ίσο με $\frac{24}{5}$ Μονάδες 8

δ. Να υπολογιστεί το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχτεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών στην υποτείνουσα. Μονάδες 10

Β. Να γράψετε στο φύλλο σας τα γράμματα της στήλης Ι και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης ΙΙ που αντιστοιχεί στο σωστό τύπο:

ΣΤΗΛΗ Ι	ΣΤΗΛΗ ΙΙ
α. Εμβαδόν τραπεζίου	**1.** $E = \tau\rho$
β. Εμβαδόν τριγώνου	**2.** $E = \dfrac{\pi R^2 \mu}{360}$
γ. Εμβαδόν κανονικού πολυγώνου	**3.** $E = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$
δ. Εμβαδόν κυκλικού τομέα	**4.** $E = \dfrac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu$
ε. Εμβαδόν παραλληλογράμμου	**5.** $E = \dfrac{B+\beta}{2}\upsilon$

Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) ισχύει: ΑΒ = ΑΓ = 4

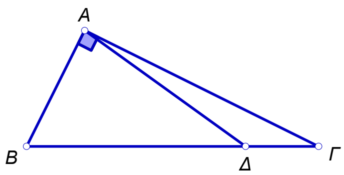
α. Να υπολογιστεί η ΒΓ. Μονάδες 10

β. Να υπολογιστεί το ύψος ΑΔ του τριγώνου Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$)

ισχύει: ΑΒ = 7, ΑΓ = 8 και $\Gamma\Delta = \dfrac{1}{4}B\Gamma$.



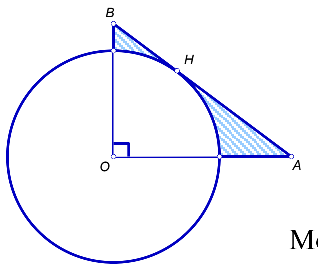
α. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΑΒΓ Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι: $\dfrac{(A\Gamma\Delta)}{(AB\Gamma)} = \dfrac{1}{4}$ Μονάδες 12

γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του ΑΓΔ. Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο ($\hat{O} = 90°$) , ΟΑ= 8, ΟΒ= 6 και η ΑΒ είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο Η.



α. Να υπολογιστεί το ΑΒ Μονάδες 5

β. Να υπολογιστεί το ΟΑΒ Μονάδες 5

γ. Να δείξετε ότι το ύψος ΟΗ είναι ίσο με $\dfrac{24}{5}$ Μονάδες 8

δ. Να υπολογιστεί το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του. Μονάδες 10

Β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90$) με ύψος ΑΔ, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)** , αν είναι αληθείς ή με **(Λ)**, αν είναι ψευδείς:

α. $AB^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$

β. $A\Delta^2 = \Gamma\Delta \cdot B\Delta$

γ. $A\Delta \cdot B\Gamma = AB \cdot A\Gamma$ Μονάδες 3

Γ. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει $B\Gamma = 6$, $A\Gamma = 5$, $AB = 4$, διάμεσο ΑΜ και ύψος ΑΔ.

α. Το AM^2 ισούται με : **Α.** $\frac{9}{2}$, **Β.** $\frac{21}{2}$, **Γ.** $\frac{23}{2}$, **Δ.** $\frac{15}{2}$, **Ε.** $\frac{7}{2}$

β. Το ΔΜ ισούται με: **Α.** $\frac{3}{4}$, **Β.** $\frac{4}{3}$, **Γ.** 2, **Δ.** 3, **Ε.** $\frac{5}{4}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις ερωτήσεις α και β. Μονάδες 6

δ. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας του προηγούμενου ερωτήματος **γ.**

Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ.
Να αποδείξετε ότι :

α. $AB^2 + \Gamma\Delta^2 = B\Delta^2 + A\Gamma^2$ Μονάδες 15

β. $\Delta M \cdot B\Gamma = \dfrac{B\Delta^2 - \Gamma\Delta^2}{2}$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Λ, Μ μέσα των ΑΒ και ΑΓ. Αν το Ρ είναι τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι :

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΛΜ.

Μονάδες 10

β. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΛΡΜ ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των τριγώνων ΛΒΡ και ΜΓΡ. Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Σε κύκλο με κέντρο Ο και ακτίνα R, δίνονται τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ έτσι ώστε να είναι:

$\overset{\frown}{AB} = 90°$ και $\overset{\frown}{B\Gamma} = 60°$. Η παράλληλη από το Α προς τη χορδή ΒΓ τέμνει τον κύκλο στο Δ.
Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R:

α. Τις πλευρές του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Μονάδες 15

β. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα. Μονάδες 13

β. Αντιστοιχίστε στην κόλα σας κάθε στοιχείο της στήλης Α΄ με ένα μόνο στοιχείο της στήλης Β΄. Μονάδες 12

ΣΤΗΛΗ Α΄	ΣΤΗΛΗ Β΄
1. μήκος τόξου μ° σε κύκλο ακτίνας R	**α.** $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$
2. εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° σε κύκλο ακτίνας R	**β.** $2\pi R^2$
3. εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	**γ.** $\frac{\pi R \mu}{180}$
	δ. πR^2
	ε. $\frac{\pi R \mu}{360}$

Θέμα 2ο

Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ε, να αποδειχτεί ότι :

α. $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$ Μονάδες 12

β. $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Σε ημικύκλιο (Ο, R) διαμέτρου ΑΒ φέρουμε την εφαπτομένη στο Α, όπου παίρνουμε τμήμα ΑΔ = ΑΟ. Αν η ΟΔ τέμνει τον κύκλο στο Γ, να υπολογιστεί ως συνάρτηση της ακτίνας R:

α. η περίμετρος του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΓΔ Μονάδες 12

β. το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ΑΓΔ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Ένα τρίγωνο αγρόκτημα ΑΒΓ έχει εμβαδό 48 στρέμματα. Θεωρούμε σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ ώστε . $A\Delta = \frac{2}{3}AB$, $BE = \frac{1}{4}B\Gamma$ και $\Gamma Z = \frac{1}{2}A\Gamma$. Να βρεθεί το εμβαδόν του αγροτεμαχίου ΔΕΖ. Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Α. Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας. Μονάδες 10

Β. Να συμπληρωθούν τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο……….επί ……….. της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

β. Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το ………. των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του , …………. κατά το διπλάσιο ………. της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Γ. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας (*ως συνάρτηση της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου*)

	Τετράγωνο	**Κανονικό εξάγωνο**	**Ισόπλευρο τρίγωνο**
Πλευρά λ_ν			
Απόστημα α_ν			

Δ. Να αντιστοιχίσετε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στη στήλη Β

Στήλη Α	**Στήλη Β**
1. Μήκος κύκλου ακτίνας R	**α.** $2\pi R$
2. Μήκος τόξου μ°(σε κύκλο ακτίνας R)	**β.** $\dfrac{\pi R\mu}{360}$
3. Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	**γ.** $\dfrac{\pi R\mu}{180}$
4. Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° (σε κύκλο ακτίνας R)	**δ.** $2\pi R^2$
	ε. $\dfrac{\pi R^2\mu}{360}$
	στ. πR^2

Μονάδες 5 + 6 + 4

Θέμα 2°

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$, $\gamma = 7$ οι πλευρές του

α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η γωνία Γ είναι 120°. Μονάδες 9

γ. Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 8

Θέμα 3°

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τα διαδοχικά σημεία του Α, Β, Γ ώστε $AB = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$.

α. Αποδείξτε ότι η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R) Μονάδες 5

β. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 8

γ. Αν η προέκταση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου τέμνει τον κύκλο (Ο,R) στο Δ, να αποδείξετε ότι: **i.** $AM = \dfrac{R\sqrt{7}}{2}$ **ii.** $M\Delta = \dfrac{3R\sqrt{7}}{14}$ Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $(MB\Delta) = \dfrac{3}{7}(AM\Gamma)$ Μονάδες 6

Θέμα 4°

Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο, R) φέρνουμε μια τέμνουσα ΑΒΓ έτσι ώστε ΑΒ = ΒΓ
Αν $OA = R\sqrt{7}$

α. Να δείξετε ότι $AB = R\sqrt{3}$ Μονάδες 6

β. Να υπολογίσετε τη γωνία ΓΟΒ Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΟΓ Μονάδες 8

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία ΓΟΒ. Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

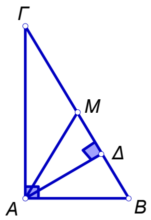
Θέμα 1ο

α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα. Μονάδες 15

β. Αν ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) είναι ορθογώνιο τρίγωνο με ΑΔ το ύψος του και ΑΜ τη διάμεσός του, να συμπληρώσετε τα κενά:

α. $ΑΔ^2 = ... \cdot ....$

β. $\dfrac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \dfrac{.....}{.....}$



γ. $ΑΒ^2 - ΑΓ^2 = 2...... \cdot ....$

δ. $ΒΓ^2 - ΑΒ^2 = ...$

ε. (ΑΒΓ) = …… Μονάδες $5 \times 2 = 10$

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60°$, ΑΒ = 2 και ΑΓ = 7

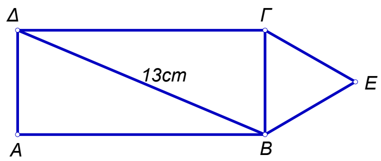
α. Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} > 90°$ Μονάδες 8

Θέμα 3ο

Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαγώνιο ΒΔ = 13 cm. Αν το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΒΓΕ είναι $\dfrac{25 \cdot \sqrt{3}}{4}$ cm^2, τότε:

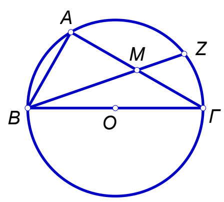


α. Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ Μονάδες 13

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν η πλευρά του ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου, ΑΒ = R και η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Ζ, τότε:



α. Να αποδείξετε ότι $ΒΜ = \dfrac{\sqrt{7} \cdot R}{2}$ Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι 7ΜΖ = 3ΜΒ Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε το λόγο $\dfrac{(ΑΜΒ)}{(ΖΜΓ)}$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή **(Σ)** ή λανθασμένη **(Λ)** κάθε μια τις προτάσεις που ακολουθούν:

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία $\beta^2+\gamma^2>\alpha^2 \Leftrightarrow \hat{A}>90°$.

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha^2-\dfrac{\alpha^2}{4}=\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{2}$

γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $R=\dfrac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{4E}$

δ. Σε κάθε κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R με πλευρά λ_ν και απόστημα α_ν ισχύει: $\alpha_\nu^2+\dfrac{\lambda_\nu^2}{2}=R^2$

ε. Ένα τόξο μ° έχει μήκος $l=\dfrac{2\pi\cdot R\cdot\mu}{360}$

στ. Ένα τετράγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R έχει πλευρά $\lambda_4=R\sqrt{2}$ και απόστημα $\alpha_4=\dfrac{\lambda_4}{2}$

Μονάδες 12

Θέμα 2°

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ τα μήκη των πλευρών του είναι ΑΒ = 4, ΒΓ = 8 και ΑΓ = 6.

α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο. Μονάδες 6

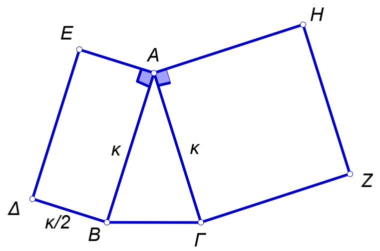
β. Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΑΜ. Μονάδες 6

γ. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας Α. Μονάδες 6

δ. Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΑΓ Μονάδες 7

Θέμα 3°

Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΒ = ΑΓ = κ και γωνία Α = 30°. Επί των πλευρών ΑΒ και ΑΓ και έξω από το τρίγωνο κατασκευάζουμε ορθογώνιο ΑΒΔΕ με $AE=\dfrac{\kappa}{2}$ και τετράγωνο ΑΓΖΗ αντίστοιχα.



α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΔΕ και το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΓΖΗ ως συνάρτηση του κ.

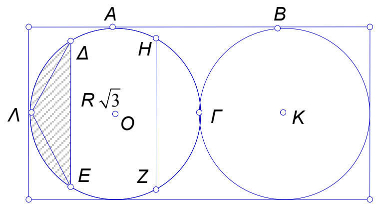
β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ ως συνάρτηση του κ.

γ. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΕΗ.

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΗ.

Θέμα 4°

Σε ορθογώνια πλατεία κατασκευάζονται δύο εφαπτόμενα κυκλικά παρτέρια με κέντρα Ο και Κ αντίστοιχα και ίσης ακτίνας R, όπως στο σχήμα.



α. Να υπολογιστεί η περίμετρος και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.

Αν στο ένα κυκλικό παρτέρι κατασκευαστεί πεζόδρομος με μήκη ευθύγραμμων παράλληλων πλευρών $\Delta E = HZ = R\sqrt{3}$, όπως στο σχήμα, τότε:

β. Να εξηγήσετε γιατί ΔΛΕ = 120°. Μονάδες 5

γ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος. Μονάδες 7

δ. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του πεζόδρομου Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:
Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους Μονάδες 2

β. Σε κύκλο (Ο, R) το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού τομέα μ° δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{\pi R^2\mu}{360}$

Μονάδες 2

γ. Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι ίση με $R\sqrt{3}$

Μονάδες 2

δ. Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E=\dfrac{1}{2}\alpha\beta\cdot\eta\mu B$

Μονάδες 2

ε. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha^2>\beta^2+\gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A}>90°$

Μονάδες 2

Θέμα 2ο

Τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου ΑΒΓ είναι ΒΓ = 10, ΑΓ = 13 και ΑΒ = 9

α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου , ως προς τις γωνίες Μονάδες 8

β. Να υπολογιστεί το μήκος της διαμέσου ΑΜ Μονάδες 9

γ. Να υπολογιστεί το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ

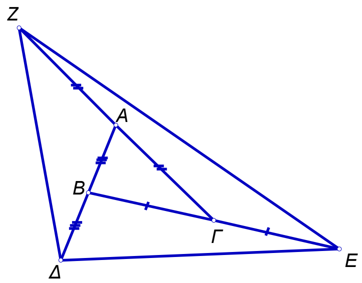
Μονάδες 8

Θέμα 3ο

Στο τρίγωνο ΑΒΓ, του διπλανού σχήματος, προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κατά τμήματα ΒΔ, ΓΕ, ΑΖ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΒΔ=ΑΒ, ΓΕ=ΒΓ και ΑΖ = ΓΑ. Να δείξετε ότι:

α. (ΒΔΕ) = 2(ΑΒΓ) Μονάδες 15

β. (ΔΕΖ) = 7(ΑΒΓ) Μονάδες 10



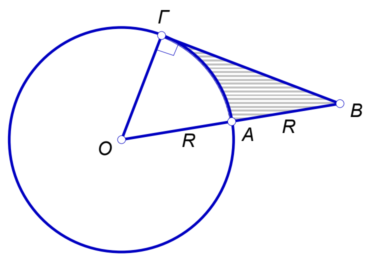
Θέμα 4ο

Σε κύκλο (Ο, R) προεκτείνουμε την ακτίνα ΟΑ κατά μήκος ΑΒ = R και φέρνουμε την εφαπτομένη ΒΓ του κύκλου

α. Να αποδείξετε ότι: $\hat{B}=30°$ Μονάδες 5

β. Να υπολογίσετε, συναρτήσει της ακτίνας R, την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 20



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{o}

Α. Να γράψετε δίπλα σε κάθε ένα από τους παρακάτω ισχυρισμούς ένα (α) για να δηλώσετε ότι είναι αληθής ή ένα (ψ) στην αντίθετη περίπτωση.

α. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές $\alpha = 3\lambda$, $\beta = 4\lambda$, $\gamma = 6\lambda$, $\lambda > 0$. Τότε $\hat{A} < 1\llcorner$ και $\hat{B} < 1\llcorner$.

Μονάδες 5

β. Το γνωστό θεώρημα: αν $\hat{B} < 1\llcorner$ τότε: $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha \cdot B\Delta$, όπου Δ το ίχνος του ύψους στη ΒΓ, ισχύει αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 1\llcorner$, για την πλευρά β.

Μονάδες 5

γ. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{5}$, $\beta = \sqrt{4}$, $\gamma = \sqrt{3}$ είναι $\hat{A} = 1\llcorner$. Μονάδες 5

Β. α. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ ισχύει $AB \cdot A\Gamma = B\Gamma \cdot x$. Τι αντιπροσωπεύει το x; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. Μονάδες 5

β. Σε ένα κυκλικό τομέα μ° και ακτίνας R ισχύει $\left(\overset{\frown}{OAB}\right) = \frac{1}{2} x \cdot R$ όπου $\left(\overset{\frown}{OAB}\right)$ το εμβαδόν του. Τι αντιπροσωπεύει το x; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Θέμα 2^{o}

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 6, η διάμεσος ΑΜ είναι κάθετη στην ΑΒ και ίση με αυτή.

α. Να υπολογίσετε τη γωνία Β. Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 15

Θέμα 3^{o}

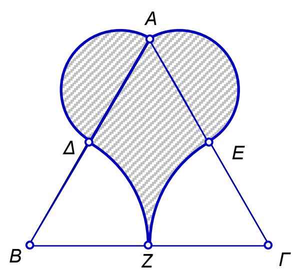
Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΔΓ), στο οποίο είναι ΑΔ =ΑΒ = ΒΓ = 5α, ΔΓ = 11α, α>0

α. Να υπολογίσετε το ύψος και τη διάμεσο του τραπεζίου Μονάδες 15

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του Μονάδες 10

Θέμα 4^{o}

Στο διπλανό σχήμα τα Δ, Ε, Ζ είναι μέσα των πλευρών ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ, που έχει εμβαδόν $(AB\Gamma) = \sqrt{3}$. Κατασκευάζουμε τα δύο ημικύκλια με διαμέτρους ΑΔ, ΑΕ στο εξωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ, και τους κυκλικούς τομείς $\left(\overset{\frown}{B\Delta Z}\right)$, $\left(\overset{\frown}{\Gamma Z E}\right)$ στο εσωτερικό του τριγώνου. Να υπολογιστούν:



α. η περίμετρος και

β. το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου γραμμοσκιασμένου χωρίου Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των καθέτων πλευρών του.

Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηριστούν με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τα παρακάτω:

α. Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε ο λόγος των εμβαδών τους είναι ίσος με το λόγο ομοιότητάς τους.

β. Σε κύκλο (Ο,ρ) το μήκος τόξου μ° δίνεται από το τύπο: $l=\frac{\pi\rho\mu}{360}$

γ. Η γωνία ενός κανονικού ν-γώνου και η κεντρική γωνία του είναι συμπληρωματικές γωνίες.

δ. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους προς την υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των τμημάτων στα οποία το ύψος χωρίζει την υποτείνουσα.

ε. Δύο κανονικά πολύγωνα με ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

Μονάδες 10

Γ. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ	λ_ν	α_ν
ισόπλευρο τρίγωνο		
τετράγωνο		
κανονικό εξάγωνο		

Μονάδες 6

Θέμα2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=1, ΑΓ=2 και $\hat{A}=60°$ τότε:

Α. Να δειχτεί ότι: $B\Gamma=\sqrt{3}$ Μονάδες 9

Β. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου. Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 8

Θέμα3ο

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με μήκη πλευρών

$\beta = 1+\sqrt{2}$, $\gamma = 2$ και εμβαδόν $(AB\Gamma) = \frac{\beta\gamma\sqrt{2}}{4}$

Α. Να αποδείξετε ότι: $\hat{A}=45°$ Μονάδες 10

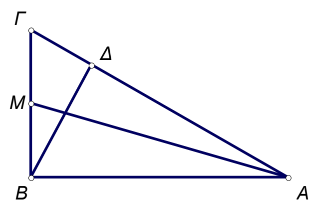
Β. Να αποδείξετε ότι: $\alpha=\sqrt{3}$. Μονάδες 10

Γ. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Μονάδες 5

Θέμα4ο

Στο παραπάνω τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ότι η πλευρά $\beta = \alpha\sqrt{3}$ και η διάμεσος $AM = \frac{3\alpha}{2}$. Να δείξετε ότι:



α. $\gamma = \alpha\sqrt{2}$

β. $\hat{B}=90°$

γ. Αν ΒΔ είναι το ύψος του τριγώνου **ν**α αποδείξετε ότι $A\Delta = \frac{2\beta}{3}$

δ. Να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{(A\Delta M)}{(AB\Gamma)}$. Μονάδες 10+5+5+5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι « Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ισούται με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα » Μονάδες 15

Β. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε η παρακάτω πρόταση να είναι αληθινή: « Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των 2 άλλων πλευρών του ελαττωμένο κατά το διπλάσιο …….της μιας από αυτές επί την………. της άλλης σε αυτή » Μονάδες 2,5

Γ. Αν η μεγάλη βάση τραπεζίου Β είναι διπλάσια της μικρής βάσης του β και το ύψος του είναι το $\frac{1}{3}$ της μικρής βάσης του, τότε το εμβαδόν Ε του τραπεζίου είναι:

α. $2B$ **β.** B^2 **γ.** $\frac{\beta^2}{2}$ **δ.** 2β

Να βρείτε τη σωστή απάντηση και να τη δικαιολογήσετε Μονάδες 5

Δ. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$)είναι $\hat{B}=2\hat{\Gamma}$, τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\gamma}$ των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με : **α.** $\frac{1}{2}$ **β.** 1 **γ.** $\sqrt{3}$ **δ.** 2 **ε.** 3

Να βρείτε τη σωστή απάντηση Μονάδες 2,5

Θέμα 2ο

Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο εκτός ορθογωνίου και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του, να δείξετε ότι:

α. $MA^2+M\Gamma^2=2MO^2+\frac{A\Gamma^2}{2}$ Μονάδες 7,5

β. $MB^2+M\Delta^2=2MO^2+\frac{\Delta B^2}{2}$ Μονάδες 7,5

γ. $MA^2+M\Gamma^2=MB^2+M\Delta^2$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΒΓ // ΑΔ και Μ το μέσο της ΑΒ. Αν η προέκταση της ΔΜ συναντά την προέκταση της ΒΓ στο Ε, να δείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΜΔ είναι ίσο με το τρίγωνο ΜΒΕ Μονάδες 10

β. Η ΜΓ είναι διάμεσος του τριγώνου ΔΕΓ Μονάδες 5

γ. (ΔΜΓ) = (ΜΕΓ) Μονάδες 5

δ. (ΜΔΓ) = $\frac{1}{2}$(ΑΒΓΔ) Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτό. Στη συνέχεια κύκλος εγγράφεται στο τρίγωνο. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R

α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 5

β. Την ακτίνα R΄του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 10

γ. Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^o:

Α. Να αποδείξετε το θεώρημα;

Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστό **(Σ)** ή Λάθος **(Λ)** τα παρακάτω :

α. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι αμβλυγώνιο, ισχύει $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$

β. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ τότε το τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο

γ. Το εμβαδόν ρόμβου με διαγώνιους δ_1, δ_2 είναι $\frac{\delta_1 \cdot \delta_2}{2}$

δ. Δύο τετράγωνα που είναι ισοδύναμα είναι και ίσα Μονάδες 8

Γ. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) και ΑΔ το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Γράψτε στο τετράδιο σας τα γράμματα της στήλης Α και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης Β, ώστε να προκύπτει ισότητα

Μονάδες 8

Στήλη Α	Στήλη Β
α. AB^2	1. $A\Gamma^2 + AB^2$
β. $A\Gamma^2$	2. $\frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$
γ. $\frac{AB^2}{A\Gamma^2}$	3. $B\Gamma \cdot B\Delta$
δ. $A\Delta^2$	4. $\frac{\Gamma\Delta}{B\Delta}$
	5. $B\Gamma \cdot A\Gamma$
	6. $B\Delta \cdot \Gamma\Delta$
	7. $B\Gamma^2 - AB^2$

Θέμα 2^o

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 9, ΑΓ = 7 και ΑΒ = 5.

α. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

β. Να αποδειχθεί ότι η διάμεσος ΑΜ είναι ίση με $\frac{\sqrt{67}}{2}$

γ. Να βρείτε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Μονάδες 9 + 8 + 8

Θέμα 3^o

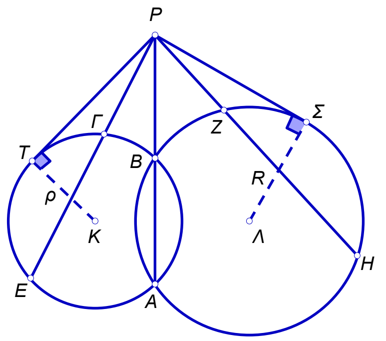
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6 και $\hat{A} = 120°$.

Α. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 8

Β. Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ με ΑΕ = $\frac{1}{2}$ΓΕ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου, να βρεθούν:

α. $\frac{E_{\Delta E\Gamma}}{E_{\Delta A\Gamma}}$ και **β.** Τα εμβαδά των τριγώνων ΔΕΓ και ΑΔΕ Μονάδες 8 + 9

Θέμα 4^o



Στο διπλανό σχήμα, από τυχόν σημείο Ρ της κοινής χορδής ΑΒ δύο τεμνομένων κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, R), έχουμε φέρει προς αυτούς, τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΤ και ΡΣ και δύο τυχούσες τέμνουσες ΡΓΕ και ΡΖΗ. Να αποδείξετε ότι:

α. Τα τμήματα ΡΤ, ΡΣ είναι ίσα.

β. Τα σημεία Γ, Ε, Η, Ζ είναι ομοκυκλικά.

γ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΖΗΤ εφάπτεται στο τμήμα ΡΤ. Μονάδες 9 + 8 + 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν δύο χορδές ΑΒ, ΓΔ τέμνονται σε ένα σημείο Ρ εσωτερικό του κύκλου (Ο, R), να αποδείξετε ότι ΡΑ·ΡΒ + ΡΓ·ΡΔ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)**.

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ ισχύει η σχέση $\beta^2 - \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$

β. Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου τότε ισχύει $R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$

γ. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta^2 - \gamma^2 < \alpha^2$ τότε $\hat{B} < 90°$

δ. Το απόστημα α_3 ενός ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι: $\alpha_3 = \frac{R}{2}$

ε. Αν σε δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ισχύει $\hat{A} + \hat{A}' = 90°$ τότε ισχύει πάντα $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο με $\beta = 6, \gamma = 8$ και $AM = 5$όπου ΑΜ η διάμεσος του τριγώνου.

α. Να υπολογίσετε την πλευρά α .

β. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου (ως προς τις γωνίες)

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

δ. Να υπολογίσετε την προβολή ΒΔ της ΑΒ πάνω στη ΒΓ

Μονάδες 7 + 6 + 6 + 6

Θέμα 3ο

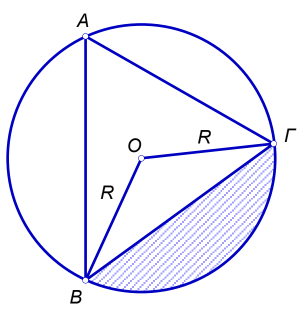
Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α. $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$ Μονάδες 10

β. $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν μεταξύ των πλευρών του α, β, γ ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ τότε:



α. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60°$.

β. Να αποδείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου τμήματος συναρτήσει του R.

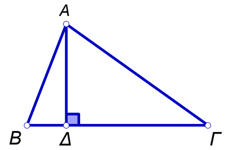
δ. Να υπολογίσετε την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου τμήματος συναρτήσει του R.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ΑΒΓΔ με βάσεις Β και β και ύψος υ δίνεται από την σχέση $E = \frac{(B+\beta)\cdot \upsilon}{2}$ Μονάδες 10

Β. Στο διπλανό σχήμα να συμπληρώσετε την παρακάτω σχέση σύμφωνα με τη γενίκευση του πυθαγόρειου θεωρήματος:



$AB^2 =$ .... Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90°$

β. Το εμβαδόν κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο : $E = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu B$

γ. Το μήκος τόξου μ^o σε κύκλο (O, R) δίνεται από τη σχέση: $l = \frac{\pi R^2 \mu°}{360°}$

δ. Η δύναμη σημείου Ρ ως προς κύκλο (O, R) δίνεται από τη σχέση: $\Delta^{P}_{(O,R)} = OP^2 + R^2$

ε. Το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 1 και ΒΓ=$\sqrt{3}$.

Να υπολογίσετε:

α. τη γωνία Α Μονάδες 10

β. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 5

γ. τη διάμεσο ΒΜ. Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Έστω κύκλος (O, R) μια χορδή του ΑΒ = R και η ευθεία (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Από το Β φέρνουμε κάθετη στην (ε) που την τέμνει στο σημείο Γ. Να υπολογίσετε:

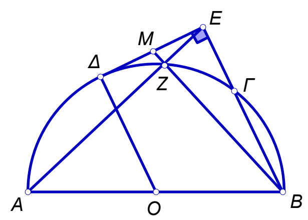
α. τη γωνία ΑΟΒ Μονάδες 5

β. το εμβαδόν του τραπεζίου ΟΑΓΒ (συναρτήσει του R). Μονάδες 10

γ. το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ (συναρτήσει του R). Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται ένα ημικύκλιο με κέντρο Ο και διάμετρο ΑΒ, Γ τυχαίο σημείο του ημικυκλίου και Δ το μέσο του τόξου ΑΓ. Από το σημείο Δ φέρουμε την κάθετη στη ΒΓ, που την τέμνει στο σημείο Ε. Αν η ΑΕ τέμνει τον κύκλο στο σημείο Ζ και η ΒΖ τέμνει το τμήμα ΔΕ στο σημείο Μ να αποδείξετε ότι:



α. $ME^2 = MZ \cdot MB$

β. ΟΔ // ΒΕ και ΜΕ = ΜΔ

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο , το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα .

Β. Για τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν είναι σωστές ή το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες .

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, τότε αυτό είναι αμβλυγώνιο .
2. Το εμβαδόν κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο : $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\,\eta\mu A$
3. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων ισούται με το λόγο ομοιότητας .
4. Το απόστημα κανονικού εξαγώνου ακτίνας R , είναι $\frac{R\sqrt{3}}{2}$
5. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $\beta^2 - \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}$, με $\beta > \gamma$

Μονάδες 15 + 10

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε ότι : $\beta = 3$, $\gamma = 5$ και $\mu_\alpha = \frac{7}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha = \sqrt{19}$

β. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^0$

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου .

δ. Να εξετάσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του .

Μονάδες 7 + 6 + 6 + 6

Θέμα 3ο

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) . Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ , να αποδείξετε ότι :

α. $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$ **β.** ΒΕ = 5 ΕΖ Μονάδες 10 + 15

Θέμα 4ο

Δίνετε κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο , R) . Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ έχει μήκος $2\sqrt{3}$, τότε :

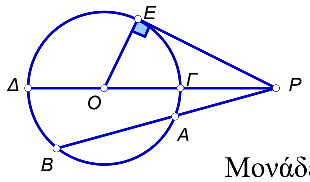
1. Να δείξετε ότι η πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι 2 .
2. Να υπολογίσετε το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου .
3. Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ που είναι μικρότερο του ημικυκλίου .
4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ($O.\overset{\frown}{AB}$) .
5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην οξεία γωνία $\widehat{AOB}$.

Μονάδες 5 + 5 + 5 + 5 +5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{ο}

Α. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος, η να αποδείξετε ότι $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ = ΡΕ^2$ αν ΡΕ εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (Ο,R)



Μονάδες 10

Β. Από σημείο Σ που απέχει απόσταση δ από το κέντρο Ο κύκλου (Ο, R) φέρουμε ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Α και Β. Να αντιστοιχίσετε κάθε θέση του σημείου Σ της στήλης Α με την τιμή του γινομένου $ΣΑ \cdot ΣΒ$ στήλης Β

ΣΤΗΛΗ Α (Το σημείο Σ είναι)	ΣΤΗΛΗ Β (Τιμή του $ΣΑ \cdot ΣΒ$)
α. εσωτερικό του κύκλου **β.** πάνω στο κέντρο **γ.** εξωτερικό του κύκλου **δ.** πάνω στον κύκλο	1. 0 2. $δ^2 - R^2$ 3. $R^2 - δ^2$ 4. $δ^2$ 5. R^2 6. $R^2 + δ^2$

Μονάδες 8

Γ. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $β^2 + γ^2 = 5α^2$, τότε:

α. $μ_α = \frac{α}{2}$, **β.** $μ_α = \frac{3α}{4}$, **γ.** $μ_α = \frac{3α}{2}$, **δ.** $μ_α = \frac{2α}{3}$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε τη Μονάδες 7

Θέμα 2^{ο}

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 90°$) με ΑΜ = διάμεσο και ΑΔ = ύψος είναι ΑΒ = 15 και ΒΔ = 9. Να υπολογιστούν:

α. το ύψος ΑΔ
β. η πλευρά ΒΓ
γ. η πλευρά ΑΓ
δ. η διάμεσος ΑΜ
ε. η προβολή της διαμέσου στη ΒΓ Μονάδες 25

Θέμα 3^{ο}

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και εξωτερικό σημείο Μ, ώστε ΜΟ = 2R. Από το Μ φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ και ΜΒ

α. Να υπολογίσετε τη χορδή ΑΒ συναρτήσει του R Μονάδες 12
β. Να υπολογίσετε συναρτήσει του R το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΜΑΒ (εφαπτομένη και κυρτογώνιο τόξο) Μονάδες 13

Θέμα 4^{ο}

Δίνεται κύκλος (Ο, R) και τα σημεία του Α, Β, Γ διαδοχικά, ώστε ΑΒ = $λ_6$ και ΒΓ = $λ_3$

α. Να εξηγήσετε γιατί η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου Μονάδες 6
β. Αν Μ μέσον της ΒΓ να βρεθεί το Ε(ΑΜΓ) Μονάδες 6
γ. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών των κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις χορδές ΑΒ και ΒΓ Μονάδες 6
δ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει τον κύκλο στο Δ, να βρεθεί το Ε (ΒΜΔ) τριγώνου Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

α. Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$). Αν το ΑΔ είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ΒΓ του τριγώνου, να αποδειχθεί ότι: $ΑΓ^2 = ΓΔ \cdot ΒΓ$ Μονάδες 15

β. Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα **(Σ)** αν τις θεωρείται σωστές ή με το γράμμα **(Λ)** αν τις θεωρείται λανθασμένες:

i. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα ΑΓ ισχύει $ΑΒ^2=ΒΓ^2-ΑΓ^2$

ii. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει η σχέση $β^2 > α^2 + γ^2$, τότε το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο

iii. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ ισχύει ότι: $συνΓ = \dfrac{α^2+β^2-γ^2}{2αβ}$

iv. Αν τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας λ, τότε $\dfrac{(ΑΒΓ)}{(ΔΕΖ)} = λ$

v. Αν ΑΒΓ τρίγωνο τότε: $(ΑΒΓ) = \dfrac{1}{2} α \cdot υ_α = \dfrac{1}{2} α \cdot β \cdot ημ\hat{A}$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές β = 7, γ = 6και διάμεσο $μ_α = \dfrac{7}{2}$

α. Να υπολογίσετε την πλευρά α του τριγώνου

β. Να εξετάσετε τι είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

γ. Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΒ πάνω στην πλευρά ΑΓ του τριγώνου

Μονάδες 9 + 7 + 9

Θέμα 3ο

Τρίγωνο ΑΒΓ έχει: $\hat{B} = 60°$, γ = 5 και α = 3.

α. Να υπολογίσετε την πλευρά β του τριγώνου

β. Να υπολογίσετε την ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ.

γ. Αν η διάμεσος ΒΜ του τριγώνου τέμνει τον περιγεγραμμένο του κύκλου στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $ΒΜ \cdot ΜΕ = \dfrac{19}{4}$. Μονάδες 8 +10 + 7

Θέμα 4ο

Στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε και Ζ ώστε: $ΒΔ = \dfrac{α}{4}$, $ΓΕ = \dfrac{β}{3}$ και $ΑΖ = \dfrac{γ}{2}$, όπου α, β, γ οι πλευρές του ΑΒΓ.

α. Να αποδείξετε ότι : $(ΑΖΕ)=\dfrac{1}{3}(ΑΒΓ)$, $(ΒΖΔ)=\dfrac{1}{8}(ΑΒΓ)$ και $(ΓΕΔ)=\dfrac{1}{4}(ΑΒΓ)$

β. αν (ΑΒΓ) = 480 τ.μ., να βρείτε το εμβαδόν (ΔΕΖ)

γ. αν η περίμετρος του τριγώνου ΔΕΖ είναι 40μ., να βρείτε τη διάμετρο του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΔΕΖ. Μονάδες 12 + 7 + 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^{o}

Α. Σε κύκλο (O,R) να εγγραφεί τετράγωνο και να υπολογιστούν η πλευρά και το απόστημά του ως συνάρτηση της ακτίνας R. Μονάδες 17

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη « Σωστό » ή « Λάθος » δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,\,R)} > 0$, όπου $\Delta^{P}_{(O,R)}$ είναι η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R)

β. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία:
$\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ αν και μόνο αν $\hat{A} < 90°$.

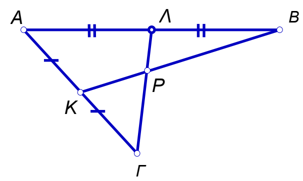
γ. Το εμβαδόν Ε κάθε τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu B$

δ. Σε κύκλο (O, R) το εμβαδόν Ε κυκλικού τομέα μ° δίνεται από τον τύπο $E = \frac{\pi R^2 \mu}{180}$

Μονάδες 8

Θέμα 2^{o}

Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Κ και Λ είναι μέσα των τμημάτων ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα.Να αποδείξετε ότι:



α. Ο λόγος των εμβαδών των τριγώνων ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσος με 1

β. Αν Ρ είναι το σημείο τομής των ΛΓ και ΚΒ , τότε τα τρίγωνα ΒΛΡ και ΚΓΡ έχουν ίσα εμβαδά Μονάδες 15 + 10.

Θέμα 3^{o}

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι β = 8, γ = 6 και $\mu_\alpha = \sqrt{14}$, να υπολογίσετε:

α. την πλευρά α Μονάδες 9

β. την προβολή της διαμέσου μ_α πάνω στην πλευρά α Μονάδες 8

γ. Να εξεταστεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του Μονάδες 8

Θέμα 4^{o}

Σε κύκλο (O,R) και εκατέρωθεν του κέντρου του θεωρούμε δύο παράλληλες χορδές ΑΒ και ΓΔ ώστε ΑΒ = R και $Γ\Delta = R\sqrt{3}$.Να υπολογιστούν:

α. Οι μη παράλληλες πλευρές ΑΓ και ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΔΓ

Μονάδες 8

β. Το ύψος του τραπεζίου ΑΒΔΓ Μονάδες 8

γ. Το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΔΓ ως συνάρτηση του R. Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να συμπληρώσετε τις προτάσεις:

α. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς είναι ίσο με το γινόμενο της ……………………….. επί την προβολή ……………………………………………

β. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το …………. του …………

γ. Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το ………………. του τετραγώνου της …………………….. που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το ………… του ………………. της τρίτης πλευράς. Μονάδες 6

Β. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ($\widehat{A}$ = 90°), με ύψος ΑΔ και διάμεσο ΑΜ, να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις με Σωστό ή Λάθος:

α. $AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma$

β. $AB^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

γ. $AB^2 = 2AM^2 + \dfrac{B\Gamma^2}{2} - A\Gamma^2$

δ. $AB^2 = AM^2 + BM^2$

ε. $AB^2 = B\Gamma^2 - A\Gamma^2$ Μονάδες 10

Γ. Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση:

α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ , το εμβαδόν του δίνεται από τη σχέση:

i. $\frac{1}{2}$αβημΑ, **ii.** $\frac{1}{2}$βγημΑ, **iii.** $\frac{1}{2}$αγημΑ, **iv.** $\frac{1}{2}$βγσυνΑ, **v.** $\frac{1}{2}$αβγ

β. Σε ρόμβο με διαγωνίους δ_1 και δ_2, το εμβαδόν του ισούται με:

i. $\dfrac{\delta_1+\delta_2}{2}$, **ii.** $\dfrac{\delta_1\cdot\delta_2}{2}$, **iii.** $\dfrac{\delta_1\cdot\delta_2}{4}$, **iv.** $\delta_1^2\cdot\delta_2^2$, **v.** $\delta_1\cdot\delta_2$ Μονάδες 3 + 3

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και οι διάμεσοί του ΑΔ και ΒΕ που τέμνονται στο Θ. Να αποδείξετε ότι:

α. (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ)

β. (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ)

γ. (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ) Μονάδες 9 + 8 + 8

Θέμα 3ο

Δίνεται κύκλος (Ο,R) με R= 4cm και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθούν:

α. Το μήκος λ_3 της πλευράς του τριγώνου,

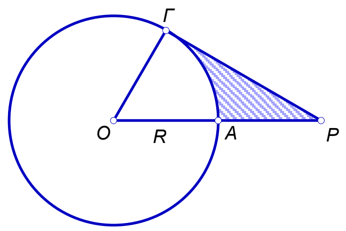
β. Το απόστημα α_3 του τριγώνου,

γ. Το εμβαδόν του τριγώνου,

δ. Το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Μονάδες 6 + 6 + 6 + 5

Θέμα 4ο

Σε κύκλο (Ο, R) θεωρούμε ακτίνα ΟΑ που προεκτείνουμε κατά ΑΡ = ΟΑ = R. Αν είναι ΡΓ η εφαπτομένη του κύκλου, να βρεθούν:



α. Το μήκος της ΡΓ,

β. Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΡΓ,

γ. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΑΡΓ. Μονάδες 8 + 7 + 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα Μονάδες 11

Β. α. Να δώσετε τον ορισμό της δύναμης σημείου P ως προς κύκλο (O,R) Μονάδες 6

β. Να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

Αν μ_α είναι η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ τότε:

1. $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 - 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$, **2.** $\mu_\alpha = \sqrt{\dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 + \alpha^2}{4}}$, **3.** $\mu_\alpha = \dfrac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}}{2}$

4. $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}$, **5.** $\mu_\alpha^2 = \dfrac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{2}$ Μονάδες 3

Γ. Να σημειώσετε ποιοι από τους παρακάτω τύπους εμβαδών ευθυγράμμων σχημάτων είναι σωστοί (Σ) και ποιοι είναι λανθασμένοι (Λ)

α. Τετραγώνου $E = \alpha \cdot \alpha$, **β.** Τριγώνου $E = \sqrt{2\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$

γ. Τριγώνου $E = \dfrac{\alpha\beta\gamma}{2R}$ όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

δ. Τραπεζίου $E = \dfrac{1}{2}(B+\beta)\cdot \upsilon$, **ε.** Ορθογωνίου τριγώνου $E = \dfrac{\alpha \cdot \beta}{2}$ (αν η $\hat{\Gamma} = 90°$)

Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ $\hat{B} = 60°$ και $\hat{\Gamma} = 45°$ και πλευρά $ΒΓ = 6\left(1+\sqrt{3}\right)$.Αν ΑΔ είναι το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Α και ονομάσουμε ΒΔ = x.

α. Η πλευρά ΑΒ συναρτήσει του x είναι:

x, 2x, 3x, 4x, $\dfrac{x}{2}$ Μονάδες 4

β. Το ύψος ΑΔ συναρτήσει του x είναι:

x, $x\sqrt{2}$, $x\sqrt{3}$, x^2, 2x Μονάδες 5

γ. Το τμήμα ΔΓ είναι ίσο με το τμήμα

ΑΒ, ΒΔ, ΑΔ, ΑΓ, ΒΓ Μονάδες 4

δ. Να υπολογίσετε το τμήμα ΒΔ = x Μονάδες 7

ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 5

Θέμα 3ο

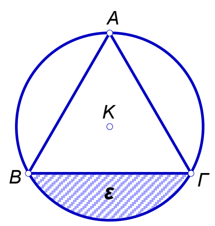
Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και διάμεσο ΑΜ = μ_α. Αν στο τρίγωνο ισχύει η σχέση $2\mu_\alpha^2 - \beta \cdot \gamma = \dfrac{\alpha^2}{2}$

α. Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta \cdot \gamma$ Μονάδες 15

β. Αν γνωρίζουμε από το νόμο των συνημιτόνων ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}\hat{A}$ να υπολογίσετε τη γωνία Α Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Σε κύκλο (Κ, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρί γωνο ΑΒΓ με πλευρά α = 12.Να υπολογίσετε:



α. την ακτίνα R του κύκλου Μονάδες 5

β. το εμβαδόν του ΑΒΓ (τριγώνου) Μονάδες 7

γ. το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου(Κ, R) Μονάδες 5

δ. το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ε Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, να δείξετε ότι ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Μονάδες 6

Β. Πότε ένα πολύγωνο ονομάζεται κανονικό . Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ ή Λ κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ανάλογα με το αν θεωρείτε την πρόταση Σωστή ή Λάθος**.**

α. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\alpha^2-\gamma^2 > \beta^2$ με α, β, γ πλευρές του τριγώνου τότε $\hat{B} < 90°$.

β . Η δύναμη του σημείου Ρ ως προς τον κύκλο (Ο, R) είναι θετικός αριθμός αν το Ρ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

γ. Το τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) είναι ισοδύναμο με το παραλληλόγραμμο που έχει ως βάση τη διάμεσο του τραπεζίου και αντίστοιχο ύψος ίσο με το ύψος του τραπεζίου.

δ . Σε κάθε κανονικό ν-γωνο ισχύει $\hat{\varphi}_\nu = \hat{\omega}_\nu + 180°$ με $\hat{\varphi}_\nu$, $\hat{\omega}_\nu$ η γωνία και η κεντρική γωνία αντίστοιχα του κανονικού ν-γωνου.

ε. Δύο ισοδύναμα πολύγωνα είναι πάντα ίσα. Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 5cm, ΑΓ = 7cm και ΒΓ = 6cm. Αν το ΑΔ είναι ύψος και ΑΜ διάμεσος να βρεθούν:

α. Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του Μονάδες 6

β. Το μήκος της διαμέσου ΑΜ Μονάδες 7

γ. Το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ πάνω στην ΒΓ Μονάδες 7

δ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 5

Θέμα 3ο

Α. Θεωρούμε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις τις ΑΔ, ΒΓ και $\hat{A} = \hat{B} = 90°$.
Αν είναι ΑΒ = α, ΒΓ = 4α και ΑΔ = 3α να υπολογίσετε:

α**.** Το εμβαδόν του τραπεζίου Μονάδες 4

β. Την περίμετρο του τραπεζίου Μονάδες 4

γ. Τη θέση του σημείου Κ επί της ΒΓ έτσι ώστε (ΑΔΚΒ) = (ΓΔΚ) Μονάδες 8

Β. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ ενός τριγώνου ΑΒΓ κατά τμήματα ΓΔ = ΓΒ, ΑΕ = ΑΓ και ΒΖ = ΒΑ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι (ΑΕΖ) + (ΕΓΔ) = 4(ΑΒΓ)
Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Με διάμετρο την πλευρά ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο που τέμνει τις πλευρές του τριγώνου στα σημεία Δ και Ε. Να υπολογίσετε:

α. το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από το τόξο και την χορδή ΒΔ
Μονάδες 8

β. την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΕ Μονάδες 5

γ. το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΔΕ Μονάδες 6

δ. Αν φέρουμε την εφαπτομένη ε του ημικυκλίου στο σημείο Γ και την ΕΖ ⊥ ε να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΓΕΖ Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιοδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ να αποδείξετε ότι

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 10

Β. Να δοθεί ο ορισμός της εκθετικής συνάρτησης Μονάδες

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. $\log x^2 = 2\log x$ για κάθε $x \in R$ Μονάδες 5

β. Ο βαθμός του γινομένου δύο πολυωνύμων P(x) Q(x) με $P(x) \neq 0$ και $Q(x) \neq 0$ είναι ίσος με το γινόμενο των βαθμών των δύο πολυωνύμων

γ. Το πολυώνυμο P(x) είναι μηδενικού βαθμού

δ. $\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu\alpha}{2} = \eta\mu^2\dfrac{\alpha}{2}$ για κάθε $\alpha \in R$

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και έχει ασύμπτωτη τον άξονα y΄y Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2\alpha x^2 - \beta x - 1$. Να βρεθούν οι τιμές των α, β ώστε να έχει παράγοντα το χ–1 και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x+1) είναι 2

Μονάδες 10

Β. Για $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

α. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 0$ Μονάδες 10

β. Ν α βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση του P(x) τέμνει τον x’ x

Μονάδες 5

Θέμα 3ο

Δίνεται η $\sigma\upsilon\nu 2\alpha + 3\eta\mu 2\alpha = 1$ με $\eta\mu\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$

α. Να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi\alpha = 3$ Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το συν2α Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $\varepsilon\varphi(\chi-\alpha) = 2$ Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = \sqrt{\ln 2x}$ και $g(x) = \ln\sqrt{2x}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$ Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $e^{2+2g(x)} \geq [f(e)]^2$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς

Μονάδες 10

Β. Να απαντήσετε στις παρακάτω σχέσεις με «Σωστό» ή «Λάθος».

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90°$ και $ΑΔ \perp ΒΓ$ ισχύουν:

α. $ΑΒ^2 = ΑΔ \cdot ΒΓ$

β. $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$

γ. $ΑΒ^2 = ΑΓ^2 - ΒΓ^2$

δ. $\dfrac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \dfrac{ΔΓ}{ΔΒ}$

ε. $ΑΔ^2 + ΑΒ^2 = ΒΓ^2$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Σε κύκλο (Ο,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ} = 90°$, $\overset{\frown}{ΒΓ} = 60°$, $\overset{\frown}{ΓΔ} = 90°$. Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R:

α. Οι πλευρές του ΑΒΓΔ Μονάδες 12

β. Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $α = 7$, $β = 5$ και $γ = 4$

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $(ΑΒΓ) = 4\sqrt{6}$ Μονάδες 7

β. Να βρεθεί το ύψος $υ_α$ Μονάδες 6

Β. Να βρεθεί η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

Μονάδες 6

Γ. Να βρεθεί η ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου Μονάδες 6

Θέμα 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με βαρύκεντρο Κ και ο κύκλος που διέρχεται από τα Β, Γ και εφάπτεται στις ΚΒ και ΚΓ. Αν Δ το μέσο της ΒΓ και α το μήκος της ΒΓ να δείξετε ότι:

α. Η ακτίνα του κύκλου είναι α. Μονάδες 8

β. $ΜΑ^2 = 2ΜΔ^2 + \dfrac{α^2}{2}$ Μονάδες 12

γ. $ΜΑ^2 = ΜΒ^2 + ΜΓ^2$, όπου Μ σημείο του κύκλου Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. Μονάδες 13

Β. Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) να εξετάσετε αν είναι Σωστές ή Λανθασμένες καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

α. $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$

β. $ΑΒ^2 = ΒΓ^2 + ΑΓ^2$

γ. $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΔΒ$ Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Α. Να αντιστοιχίσετε το κάθε σχήμα της 1ης στήλης με τον τύπο του εμβαδού του στην 2η στήλη.

ΠΙΝΑΚΑΣ

1η στήλη	2η στήλη
1. τετράγωνο πλευράς α **2.** ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς α **3.** κύκλος ακτίνας ρ	**i.** $α^2$ **ii.** $πρ^2$ **iii.** $\frac{πρ^2}{2}$ **iv.** $2α^2$ **v.** $\frac{α^2\sqrt{3}}{4}$

Μονάδες 9

Β. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ($\hat{A} = 90°$) έχουν μήκος 3cm και 4cm. Να βρείτε :

α. Την υποτείνουσα του Μονάδες 5

β. Την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Μονάδες 5

γ. Την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Μονάδες 5

Θέμα 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΒΓ = 4 , ΑΒ = 3 , ΑΓ = 2. Να βρεθούν:

α. Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 7

β. Η διάμεσος ΓΜ Μονάδες 8

γ. Η προβολή της διαμέσου ΓΜ πάνω στην πλευρά ΑΒ. Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά. Να βρείτε ως συνάρτηση της ακτίνας R:

Α. Την περίμετρο Μονάδες 10

Β. το εμβαδόν Μονάδες 15

του σχήματος που περικλείεται από τους δυο κύκλους και μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη τους.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. α. Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ με διάμεσο ΑΜ να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς,

δηλαδή: $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2}$ Μονάδες 10

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ να συμπληρώσετε τη σχέση $A\Gamma^2 - AB^2 = \ldots\ldots$ ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων Μονάδες 2,5

Β. Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα B_1 και B_2

α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται $\beta = 8$, $\gamma = 6$ και $\mu_\alpha = 5$. Η πλευρά α είναι ίση με:

Α. 7 Β. 4 Γ. 10 Δ. 9 Ε. 11 Μονάδες 6,5

β. Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι: $\alpha = 4$, $\beta = 7$, $\gamma = 5$, ΑΔ το ύψος και ΑΜ η διάμεσος. Η προβολή ΔΜ της διαμέσου ΑΜ πάνω στην πλευρά α είναι ίση με:

Α. 4 Β. 8 Γ. $\frac{8}{3}$ Δ. 5 Ε. 3 Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R). Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:

α. $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$ Μονάδες 12

β. ΒΕ = 5ΕΖ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Θεωρούμε τρεις διαδοχικές γωνίες $\widehat{xOy}$, $\widehat{yOz}$, $\widehat{zOx}$ έτσι ώστε $\widehat{xOy} = \widehat{yOz} = 150°$. Στις ημιευθείες Ox, Oy, Oz παίρνουμε τα σημεία Α, Β, Γ αντίστοιχα ώστε ΟΑ = 2, ΟΒ = 4 και ΟΓ = 6

α. Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E_{O\Gamma A}$, του τριγώνου ΟΓΑ Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το λόγο των εμβαδών $\frac{E_{OAB}}{E_{OB\Gamma}}$ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Σε κύκλο (Ο,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ = 15. Να υπολογίσετε:

α. την ακτίνα R του κύκλου Μονάδες 6

β. το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου(O,R) Μονάδες 6

γ. το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 6

δ. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο

Μονάδες 7