

**ΓΕΝΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 2008**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΤΑΞΗ Β'**

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Μονάδες 5
- B.** Έστω δύο διανύσματα  $\vec{a} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι συντελεστές διεύθυνσής τους αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$  Μονάδες 10
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- α.** Ισχύει:  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{v}} \vec{v}$  Μονάδες 2
- β.** Αν  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$  και  $\vec{a} \neq \vec{0}$ , τότε είναι  $\vec{b} = \vec{\gamma}$  Μονάδες 2
- γ.** Αν  $\vec{a} = (x, y)$ , τότε  $|\vec{a}| = x^2 + y^2$  Μονάδες 2
- δ.** Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$  Μονάδες 2
- ε.** Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες  $E'(-\gamma, 0)$ ,  $E(\gamma, 0)$  και σταθερό άθροισμα 2  $a$  είναι  $\frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$  με  $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$  Μονάδες 2

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(-1, 10)$ ,  $B(1, 1)$  και  $\Gamma(5, 3)$ .

- α.** Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου  $AM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 12
- β.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0$  (1), όπου  $\lambda$  πραγματικός αριθμός.

- α.** Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων Μονάδες 5
- β.** Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων που ορίζονται από την (1) ανήκουν στην ευθεία  $y = -x$ ,  $x \neq 0$ , καθώς το  $\lambda$  μεταβάλλεται στο  $\mathbb{R}^*$  Μονάδες 8
- γ.** Να βρείτε το  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $\varepsilon : y = x + 1$  να εφαπτεται στον κύκλο  $C : x^2 + y^2 + \lambda x - \lambda y = 0$  Μονάδες 12

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $C : y^2 = 4x$

- α.** Να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα της παραβολής Μονάδες 3
- β.** Να βρεθούν τα σημεία  $A$  και  $B$  της παραβολής τα οποία απέχουν από την εστία της απόσταση ίση με 2 Μονάδες 12
- γ.** Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A$  και  $B$  τέμνονται στον άξονα  $x'x$  Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε την ισοδυναμία  $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ , όπου  $\lambda_1 = \lambda_{\vec{a}}$  και  $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$  εφόσον

$$\vec{a}, \vec{\beta} \parallel y'y$$

Μονάδες 13

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τις λέξεις Σωστό ή Λάθος

**α.** Η εξίσωση της παραβολής με εστία  $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  και διευθετούσα  $\delta : x = -\frac{p}{2}$  είναι  $y^2 = 2px$

Μονάδες 3

**β.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $x^2 = 2py$  στο σημείο της  $M(x_1, y_1)$  είναι

$$xx_1 = P(y + y_1)$$

Μονάδες 3

**γ.** Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

Μονάδες 3

**δ.** Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + y_1y_2$

Μονάδες 3

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  ώστε  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $|\vec{\gamma}| = \sqrt{2}$  με  $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

**α.** Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$

Μονάδες 12

**β.** Να υπολογιστεί η γωνία  $\hat{\varphi} = \left(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\gamma}}\right)$

Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$  (1)

**α.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

Μονάδες 13

**β.** Να δείξετε ότι το σημείο  $M(1, -3)$  είναι εσωτερικό του κύκλου και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία να έχει μέσο το  $M(1, -3)$

Μονάδες 12

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση (1)  $x^2 - y^2 - 4\mu y - 2\mu x - 3\mu^2 = 0$  με  $\mu \in \mathbb{R}$

**A.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει δύο ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  κάθετες μεταξύ τους

Μονάδες 13

**B.** Έστω A, B τα σημεία τομής των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  με τον άξονα  $x'x$  αντιστοίχως και Γμ το σημείο τομής των  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

**α.** Να βρεθεί η τιμή του  $\mu$  ώστε τα A, B, Γμ να συμπίπτουν

Μονάδες 6

**β.** Για κάθε άλλη τιμή του  $\mu$ , εκτός της περίπτωσης α) να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓμ έχουν εμβαδόν που δίνεται από τη σχέση  $(AB\Gamma\mu) = 4\mu^2$

Μονάδες 6

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να δείξετε ότι κάθε ευθεία στο καρτεσιανό επίπεδο συντεταγμένων έχει τη μορφή  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  Μονάδες 10
- B.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:
- α.** Το σημείο  $M(-2, 3)$  ανήκει στη γραμμή με εξίσωση  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$
- β.** Αν  $\vec{a} = (x_1, y_1)$ ,  $\vec{b} = (x_2, y_2)$  τότε  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 y_1 + x_2 y_2$
- γ.** Αν οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  και είναι μεταξύ τους κάθετες τότε  $\lambda_1 \lambda_2 + 1 = 0$
- δ.** Το κέντρο του κύκλου  $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A^2 + B^2 > 4\Gamma$  είναι το σημείο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$
- β.** Η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = -12x$  έχει εστία το σημείο  $E(-3, 0)$

Μονάδες 15

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda^2 - 2\lambda)x + (\lambda^2 - 5\lambda + 6)y + \lambda + 1 = 0$  (1).
- α.** Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η (1) παριστάνει ευθεία γραμμή;
- β.** Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η ευθεία είναι παράλληλη στον  $x'x$ ;
- γ.** Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0, 0)$ ;
- Μονάδες 8 + 9 + 8

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- Έστω  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  διανύσματα με  $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$
- α.** Να υπολογισθεί το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$
- β.** Να βρείτε τα μέτρα των  $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$
- γ.** Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$
- Μονάδες 5 + 10 + 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

- Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 4 = 0$   $\lambda \in \mathbb{R}$ . (1)
- α.** Ναδειχτεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- β.** Ναδειχτεί ότι ο κύκλος διέρχεται από 2 σταθερά σημεία.
- γ.** Να βρείτε τον αριθμό  $\lambda$  ώστε η ευθεία  $y = x - 2$  να εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο
- δ.** Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει ως εστίες τα σταθερά σημεία του ερωτήματος (β) και μεγάλο άξονα μήκους 10.

Μονάδες 6 + 6 + 7 + 6

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \rho^2$  παίρνει την μορφή  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής:  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$  παριστάνει κύκλο Μονάδες 15
- B.** Για τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  δώστε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις
- α.** Υπάρχουν  $\theta \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε τα διανύσματα  $\vec{a} = (\frac{1}{\sin\theta}, \frac{1}{\eta\mu\theta})$  και  $\vec{\beta} = (\eta\mu\theta, \sin\theta)$  να είναι κάθετα
- β.** Η ευθεία  $x + \lambda(x - y) - \lambda = 0$  τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας  $xOy$  για κάθε τιμή του αριθμού  $\lambda$
- γ.** Αν  $A \neq B$ , τότε η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει πάντοτε ευθεία
- δ.** Τα σημεία  $(-2, 2)$  και  $(4, 2)$  του κύκλου  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$  είναι αντιδιαμετρικά
- ε.** Το σημείο  $(\frac{\eta\mu\theta}{2}, \frac{\sin\theta}{2})$  ανήκει στον κύκλο  $4(x - \eta\mu\theta)^2 + 4(y - \sin\theta)^2 = 1$  για κάθε πραγματικό αριθμό  $\theta$ . Μονάδες 5

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- A.** Για τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  να αποδείξετε την ισοδυναμία:  
 $|\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a}| + |\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{a} \uparrow \vec{\beta}$  Μονάδες 8
- B.** Αν για τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$ ,  $\vec{\gamma}$  ισχύουν  $\vec{a} + \vec{\beta} + \vec{\gamma} = \vec{0}$  και  $\frac{|\vec{a}|}{2} = \frac{|\vec{\beta}|}{3} = \frac{|\vec{\gamma}|}{5}$   
να αποδείξετε ότι:  $\vec{a} \uparrow \vec{\beta}$  Μονάδες 10
- Γ.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (3, 4)$ ,  $\vec{\beta} = (-2, 2)$ . Να υπολογίσετε το διάνυσμα προβ <sub>$\vec{a}$</sub> ( $\vec{\beta}$ ) Μονάδες 7

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- A.** Δίνονται τα σημεία  $A(4\lambda-2, 2\lambda)$  και  $B(10\lambda+2, 6\lambda-4)$ . Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  του τμήματος  $AB$ . Μονάδες 10
- B.** Δίνονται οι ευθείες:  $(\epsilon_1): 4x-3y = 5$  και  $(\epsilon_2): 7x + y = 10$   
Να βρείτε την οξεία γωνία των  $(\epsilon_1)$  και  $(\epsilon_2)$ . Μονάδες 5
- Γ.** Δίνονται η ευθεία  $(\epsilon)$  με εξίσωση  $y = x + 2$  και το σημείο  $A(1, 4)$ . Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου  $A$  ως προς την ευθεία  $(\epsilon)$ . Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

- Δίνονται τα σημεία  $A(-1, 0)$ ,  $B(3, 4)$  και η ευθεία  $(\epsilon): x + y + 1 = 0$ . Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A, B$  και τέμνει την ευθεία  $(\epsilon)$  ορίζοντας σε αυτή χορδή μήκους  $8\sqrt{2}$  Μονάδες 25

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ . Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες :
- α.** Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:  
 $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
- β.** Αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, τότε ισχύει η ισότητα :  
 $\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$
- γ.** Η ευθεία με εξίσωση  $x - 2y - 3 = 0$  διέρχεται από το σημείο  $M(-1, -2)$
- δ.** Η εφαπτομένη της παραβολής  $y^2 = 2px$  στο σημείο της έχει εξίσωση  $yy_1 = \rho(x + x_1)$ .
- ε.** Η παραβολή με εστία το σημείο  $E(0, 1)$  έχει εξίσωση  $x^2 = 2y$  Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύουν  $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$  και  $\vec{\beta} \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ , τότε:

- A.** Να αποδείξετε ότι  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$  Μονάδες 12
- B.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(3, 4), B(-1, 2)$  και  $\Gamma(5, 0)$

- A.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon$ , που διέρχεται από το σημείο  $A$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $B\Gamma$ . Μονάδες 13
- B.** Αν η ευθεία  $\varepsilon$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $(AB\Gamma) = (\Delta B\Gamma) = 10$  τετραγωνικές μονάδες. Μονάδες 12

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + 4\lambda^2 = 0$  (1). Να αποδείξετε ότι:

- A.** Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 8
- B.** Κάθε κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (1) εφάπτεται στον άξονα  $y'y$ . Μονάδες 6
- Γ.** Τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της. Μονάδες 7
- Δ.** Από το σημείο  $O(0, 0)$  άγονται προς κάθε κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1) δύο εφαπτόμενες. Μονάδες 4

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και  $M(x, y)$  το μέσο του  $AB$ . Να δείξετε ότι:

**α.**  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$  Μονάδες 7

**β.** Η απόσταση  $(AB)$  των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  είναι ίση με:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Μονάδες 6}$$

**B.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{a} = (\kappa - 1, 4\kappa + 3)$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε το  $\kappa$  ώστε:

**α.** Το διάνυσμα  $\vec{a}$  να έχει συντελεστή διεύθυνσης 2 Μονάδες 4

**β.** Το διάνυσμα  $\vec{a}$  να είναι κάθετο στο  $\vec{\beta} = (-1, 2)$  Μονάδες 4

**γ.** Το διάνυσμα  $\vec{a}$  να είναι παράλληλο με το  $\vec{\gamma} = (2, 1)$  Μονάδες 4

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-1, 2)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $\Gamma(4, -\frac{1}{2})$ . Αν η εξίσωση μιας πλευράς του είναι

$x + 2y - 3 = 0$  να βρείτε:

**α.** Την εξίσωση του ύψους του  $B\Delta$  Μονάδες 15

**β.** Την απόσταση  $B\Delta$  Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 1 = 0$  (1)

**α.** Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο του οποίου να

βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. Μονάδες 12

**β.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων της (1) Μονάδες 6

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που προκύπτει από την (1) στο σημείο  $A(1, \sqrt{2})$ , για  $\lambda = 2$ . Μονάδες 7

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι ακέραιοι  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

**α.** Αν  $\alpha, \beta$  είναι διαδοχικοί άρτιοι, να δείξετε ότι ο  $\frac{\alpha \cdot \beta}{8}$  είναι ακέραιος.

Μονάδες 13

**β.** Αν  $\gamma = 2\kappa - 1$  και  $\delta = 3\gamma + 1$ ,  $\kappa \in \mathbb{Z}$ , να δείξετε ότι ο μόνος θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1 που διαιρεί τους  $2\gamma$  και  $\delta$  είναι ο 2.

Μονάδες 12

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. α.** Δώστε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία  $E'$  και  $E$ . Μονάδες 3
- β.** Ποια είναι η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία  $E'(-\gamma, 0)$  και  $E(\gamma, 0)$  και σταθερό άθροισμα  $2\alpha$ ; Ποιες τιμές παίρνει το  $x$  και ποιες το  $y$ ; Μονάδες 6
- γ.** Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα της έλλειψης;  
Πότε δύο ή περισσότερες ελλείψεις λέγονται όμοιες; Μονάδες 4
- B.** Δίνεται η υπερβολή  $C: \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ .
- α.** Να γράψετε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της. Μονάδες 2
- β.** Τι λέγεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής αυτής; Μονάδες 2
- γ.** Ποιες είναι οι κορυφές της υπερβολής αυτής; Μονάδες 2
- Γ. α.** Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο  $E(\frac{p}{2}, 0)$  και διευθετούσα την ευθεία  $\delta: x = -\frac{p}{2}$ . Μονάδες 3
- B.** Τι λέει η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής; Μονάδες 3

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με γωνία  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$ . Αν  $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$  να βρεθούν:

- A.**  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  **B.**  $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$  Μονάδες 12
- Γ.**  $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$  **Δ.**  $(-2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$  Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $B(4, 4), A(1, 1)$  και  $\Gamma(8, 1)$ .

- A.** Να βρείτε το μέσο  $M$  της πλευράς  $AG$ . Μονάδες 5
- B.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BM$ . Μονάδες 5
- Γ.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας  $AG$ . Μονάδες 5
- Δ.** Να βρείτε την εξίσωση του ύψους  $BD$ . Μονάδες 5
- E.** Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 5

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 - |2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = 0$  (1), όπου  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά διανύσματα με ίσα μέτρα και η γωνία που σχηματίζουν είναι  $60^\circ$ .

- A.** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο ( $C$ ), του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. Μονάδες 9
- B.** Αν ο παραπάνω κύκλος ( $C$ ) διέρχεται από το σημείο  $A(1, 0)$ , δείξτε ότι:
- α.**  $|\vec{\alpha}| = 1$ . Μονάδες 6
- β.** Η εξίσωση  $2|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|x - |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|y + \sqrt{60} = 0$  εφάπτεται στο κύκλο ( $C$ ). Μονάδες 10



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

**α.** Αν  $\alpha \mid \beta$  και  $\beta \mid \gamma$ , τότε  $\alpha \mid \gamma$

**β.** Αν  $\alpha \mid \beta$ , τότε  $\alpha \mid \lambda\beta$  για κάθε ακέραιο  $\lambda$

**γ.** Αν  $\alpha \mid \beta$  και  $\alpha \mid \gamma$ , τότε  $\alpha \mid (\beta + \gamma)$

Μονάδες 15

**B.** Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

**α.** Είναι  $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta}$  αν και μόνο αν  $\lambda\vec{\alpha} = \vec{\beta}$

**β.** Είναι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$  αν και μόνο αν  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

**γ.** Ο κύκλος κέντρου  $O(0,0)$  και ακτίνας  $\rho$  έχει εξίσωση:  $x^2 + y^2 = \rho$

**δ.** Αν  $\vec{\alpha} = (x, y)$ , τότε  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

**A.** Αν  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

**α.**  $\vec{B\Gamma} + \vec{AB} = \dots$

**β.**  $\vec{AB} - \vec{\Gamma B} = \dots$

**γ.**  $\vec{AB} + \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \dots$

**δ.**  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta A} = \dots$

**ε.**  $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \dots$

Μονάδες 10

**B.** Δίνονται τα σημεία  $A(3, -2)$ ,  $B(6, -4)$ ,  $\Gamma(1,5)$ ,  $\Delta(-1,2)$

**α.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$

Μονάδες 10

**β.** Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{AB}$  και  $\vec{\Gamma\Delta}$  ;

Μονάδες 5

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

**α.** Όταν έχει κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = \sqrt{2}$

**β.** Όταν έχει κέντρο  $O(0,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(2\sqrt{2}, 1)$

**γ.** Όταν έχει κέντρο  $K(2, -3)$  και εφάπτεται στον άξονα  $y'y$

**δ.** Όταν έχει κέντρο  $K(1,0)$  και διέρχεται από το σημείο  $A(5, -3)$

**ε.** Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα  $A(1, -1)$  και  $B(3,3)$

Μονάδες 25

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(1,1)$  και  $B(3, -1)$

**α.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα  $A$  και  $B$

Μονάδες 5

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου ( $\epsilon$ ) του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$

Μονάδες 10

**γ.** Έστω σημείο  $K(0, -2)$ . Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $K$  και είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$

Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  είναι η  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 10
- B. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο μη μηδενικών διανυσμάτων. Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Η παραβολή  $y^2 = 2px$ , έχει εστία  $E(O, \frac{p}{2})$
- β.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{\beta}$
- γ.  $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$
- δ. Αν η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο, τότε έχει κέντρο το σημείο  $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$
- ε. Αν η AM είναι διάμεσος σε τρίγωνο ABΓ, τότε  $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{AG}}{2}$  Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- Αν είναι  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 3$ ,  $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$  και τρίγωνο ABΓ με διάμεσο AM και  $\overline{AB} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$ ,  $\overline{AM} = 3\vec{a} + \vec{\beta}$
- α. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  Μονάδες 4
- β. Να εκφράσετε το  $\overline{AG}$  ως γραμμικό συνδυασμό των  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$ . Μονάδες 7
- γ. Να υπολογίσετε το  $|\overline{AM}|$  Μονάδες 7
- δ. Να δείξετε ότι  $(\overline{AM}, \vec{a}) = \frac{\pi}{6}$  Μονάδες 7

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(2x + y + 4) + \kappa(x - 2y - 3) = 0$

- α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία, για κάθε  $\kappa \in \mathbb{R}$ . Μονάδες 7
- β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε. Μονάδες 6
- γ. Για  $\kappa = 0$  να βρείτε τις τομές της ευθείας με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ . Μονάδες 6
- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τα παραπάνω σημεία τομής και την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

- α. Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. Μονάδες 7
- β. Να βρείτε την εξίσωση ενός νέου κύκλου ομόκεντρου του C και ο οποίος να εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon: y = x$  Μονάδες 8
- γ. Να βρείτε την εξίσωση των παραβολών, οι οποίες περνάνε από το κοινό κέντρο των κύκλων και να τις σχεδιάσετε. Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A<sub>1</sub>.** Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που

σχηματίζουν γωνία  $\theta$ , να αποδείξετε ότι:  $\text{syn}\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{(\sqrt{x_1^2 + y_1^2}) \cdot (\sqrt{x_2^2 + y_2^2})}$

Μονάδες 13

**A<sub>2</sub>.** Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση:

Η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 10$  στο σημείο του  $M(1, -3)$  έχει εξίσωση:

**i.**  $x + 3y = 10$ , **ii.**  $5x - y = 8$ , **iii.**  $x - 3y = 10$ , **vi.**  $3x + 2y = 3$ , **v.**  $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 2

**A<sub>3</sub>.** Χαρακτηρίστε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις προτάσεις που ακολουθούν:

**α.** Το σημείο  $(1, -1)$  ανήκει στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 2$

**β.** Ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$  και η ευθεία  $y = 2x$  εφάπτονται

**γ.** Η παραβολή  $y^2 = 2px$  έχει διευθετούσα την  $x = 2p$

**δ.** Η εξίσωση  $(\eta\mu\alpha)x + (\sigma\upsilon\nu\alpha)y = 2$  παριστάνει ευθεία, για κάθε  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

**ε.** Η ευθεία  $x = x_0$  έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με 1.

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(-2, 4)$ ,  $B(3, 2)$ ,  $\Gamma(1, -3)$ . Να βρεθούν:

**α.** Τα διανύσματα  $\vec{AB}$ ,  $\vec{A\Gamma}$

Μονάδες 5

**β.** Η γωνία  $A$  του τριγώνου  $AB\Gamma$

Μονάδες 10

**γ.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Αν η διαίρεση του ακεραίου αριθμού  $a$  με το 3 δεν είναι τέλεια, να αποδείξετε ότι:

**α.**  $a^2 = 3\mu + 1$

Μονάδες 12

**β.** Ο αριθμός  $\frac{a^4 + 2a^2 + 9}{3}$  είναι ακέραιος

Μονάδες 13

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση:  $x^2 - y^2 - 4\lambda y - 2\lambda x - 3\lambda^2 = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**α.** Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο ευθείες κάθετες μεταξύ τους.

**β.** Να βρεθεί το σημείο τομής τους  $M(x, y)$ .

**γ.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του  $M(x, y)$  για τις διάφορες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 10 + 5 + 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 13
- B.** Δώστε τον ορισμό του συντελεστή διεύθυνσης ή κλίσης μιας ευθείας  $\varepsilon$ . Πότε είναι θετικός, αρνητικός και πότε ίσος με το μηδέν; Μονάδες 6
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Έστω  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου, τότε ισχύει η ισοδυναμία:  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$
- β.** Η εξίσωση της παραβολής  $y^2 = 2px$  έχει διευθετούσα  $\delta: y = -\frac{p}{2}$
- γ.** Στην εκκεντρότητα της έλλειψης  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$  αν  $\gamma = 0$ , τότε η έλλειψη γίνεται κύκλος με κέντρο  $E$  και ακτίνα  $a$ . Μονάδες 6

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = (1, -\sqrt{3})$  και  $\vec{\beta} = (2, 2\sqrt{3})$  του καρτεσιανού επιπέδου.
- α.** Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  Μονάδες 5
- β.** Να βρεθεί η γωνία των  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  Μονάδες 8
- γ.** Αν  $\vec{x} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$  και  $\vec{y} = -4\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$  να βρεθούν τα μέτρα τους και να δείξετε ότι είναι κάθετα μεταξύ τους. Μονάδες 12

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(1, 2)$ ,  $B(3, 4)$  και η μεσοκάθετη της  $A\Gamma$  με εξίσωση  $y = x + 2$ .
- α.** Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$  είναι  $(0, 3)$ . Μονάδες 15
- β.** Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

- Δίνεται η παραβολή  $C: y = \frac{1}{4}x^2$  και το σημείο της  $M(2, 1)$ . Αν  $K$  η προβολή του  $M$  στη διευθετούσα τότε:
- α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $K$  και  $E$  ( $E$  η εστία της παραβολής), τις εξισώσεις των ευθειών  $EK$  και της μεσοκαθέτου αυτής. Μονάδες 10
- β.** Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος της  $EK$  είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο  $M(2, 1)$ . Μονάδες 5
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $E, M, K$ . Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ .

Μονάδες 10

**B.** Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\alpha} \cdot \lambda_{\beta} = -1$ , για  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  μη παράλληλα στον άξονα  $y', y$ .

Μονάδες 15

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών,  $(\varepsilon_1): 4x + y - 7 = 0$  και  $(\varepsilon_2): 3x - 4y - 10 = 0$  και είναι κάθετη προς την ευθεία  $(\varepsilon_3)$  που ορίζεται από τα σημεία  $A(1, -5)$  και  $B(3, 2)$

Μονάδες 25

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  έχουν:  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ . Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Μονάδες 25

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Έστω ο κύκλος  $C: x^2 + y^2 = 9$  και το σημείο  $A(3, 1)$ :

**A.** Να δείξετε ότι το σημείο  $A$  είναι εξωτερικό του κύκλου  $C$ . Μονάδες 10

**B.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου  $C$  που διέρχονται από το σημείο  $A$ .

Μονάδες 15

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Αν  $\vec{a}, \vec{v}$  είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με  $\vec{a} \neq \vec{0}$  και η προβολή του  $\vec{v}$  στο  $\vec{a}$  συμβολίζεται με  $\text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$  να αποδείξετε ότι  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$

Μονάδες 10

**B.** Χαρακτηρίστε τις επόμενες προτάσεις με την ένδειξη σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).

**α.** Κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $A(1, 3)$  έχει εξίσωση μόνο την:

$$y - 3 = \lambda(x - 1) \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

**β.** Ο κύκλος  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 1$  εφάπτεται του άξονα  $y'y$ .

**γ.** Τα σημεία  $A(-5, -2), B(3, -1), \Gamma(11, 0)$  είναι συνευθειακά.

**δ.** Στα προηγούμενα σημεία τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  είναι αντίστοιχα τα  $M(-1, -\frac{3}{2})$  και

$$N(7, -\frac{1}{2})$$

**ε.** Στα προηγούμενα σημεία  $\overline{MN} \cdot \overline{A\Gamma} = 0$

Μονάδες 15

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(1, 1), B(3, 2), \Gamma(2, 6)$ . Να βρείτε:

**α.** Την εξίσωση της ευθείας  $AB$

Μονάδες 7

**β.** Την εξίσωση ευθείας του ύψους  $\Gamma\Delta$

Μονάδες 9

**γ.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

Μονάδες 9

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Έστω τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}} = \frac{\pi}{3}$ . Να βρείτε:

**α.** Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

**β.** Τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{u} = \vec{a} + \vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$

Μονάδες 10

**γ.** Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 5

**δ.** Το συνημίτονο της γωνίας  $\widehat{u, v}$

Μονάδες 5

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$  (1)

**α.** Δείξτε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

Μονάδες 6

**β.** Δείξτε ότι το σημείο  $M(1, -3)$  είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Μονάδες 5

**γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου η οποία έχει το  $M$  μέσο.

Μονάδες 9

**δ.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που διέρχεται από το σημείο

$$N(0, -6)$$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:  $P(A') = 1 - P(A)$   
Μονάδες 15

**B.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) τις παρακάτω προτάσεις.

**α.** Η διάμεσος είναι μέτρο θέσης. **Σ**   **Λ**

**β.** Σε ένα δείγμα τιμών μίας οιασδήποτε μεταβλητής X το εύρος ορίζεται από τη σχέση: R = μεγαλύτερη παρατήρηση + μικρότερη παρατήρηση. **Σ**   **Λ**

**γ.** Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε  
 $0 \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$ . **Σ**   **Λ**

**δ.** Αν  $A \subseteq B$  τότε  $P(A) > P(B)$ . **Σ**   **Λ**

**ε.** Αν το ενδεχόμενο A', συμπληρωματικό του A πραγματοποιείται τότε δεν πραγματοποιείται το A. **Σ**   **Λ**

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$  Να βρείτε:

**A.** Το πεδίο ορισμού της f(x) Μονάδες 10

**B.** Το  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ . Μονάδες 15

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

10, 4, 6, 5, 14, 15, 11, 12, 10, 13. Να βρείτε:

**α.** Την μέση τιμή Μονάδες 7

**β.** Τη διάμεσο Μονάδες 3

**γ.** Το εύρος Μονάδες 3

**δ.** Την διακύμανση Μονάδες 8

**ε.** Την τυπική απόκλιση Μονάδες 4

Σημείωση: Δίνεται ότι  $\sqrt{13,2} \approx 3,6$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι:

$P(A) = \frac{1}{5}$ ,  $P(B) = \frac{2}{3}$  και  $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$  Να βρεθούν:

**α.**  $P(B')$  Μονάδες 8

**β.**  $P(A \cup B)$  Μονάδες 8

**γ.**  $P(A - B)$  Μονάδες 9

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο  $A(x_1, y_1)$  είναι

$$xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Μονάδες 10

**B. α.** Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου 2 διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

**β.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα Σ (σωστό) ή Λ (λάθος)

**i.** Αν  $\vec{\alpha} \uparrow \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$

**ii.** Οι ευθείες  $x = 2$  και  $x + y = 1$  είναι κάθετες.

**iii.** Ο κύκλος με εξίσωση  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 9$  έχει το κέντρο του στην ευθεία  $y = x$ .

**iv.** Αν για μια ευθεία ( $\varepsilon$ ) είναι  $d(K, \varepsilon) = \rho$  τότε η ευθεία ( $\varepsilon$ ) εφάπτεται στον κύκλο με

κέντρο  $K$  και ακτίνα  $\rho$ .

Μονάδες 15

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Αν  $|\vec{\alpha}| = 5$ ,  $|\vec{\beta}| = 4$ ,  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και  $\vec{u} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ ,  $\vec{v} = \lambda\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

**α.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

**β.** Να υπολογίσετε το  $|\vec{u}|$

Μονάδες 8

**γ.** Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε  $\vec{u} \perp \vec{v}$

Μονάδες 12

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(2, 6)$ ,  $B(1, 1)$ , και  $\Gamma(3, 2)$ . Να βρείτε:

**α.** Την εξίσωση της  $B\Gamma$  και την εξίσωση της ευθείας του ύψους  $A\Delta$

Μονάδες 12

**β.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$

Μονάδες 13

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$  (1)

**α.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου ( $C$ ) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

Μονάδες 8

**β.** Να δείξετε ότι το σημείο  $M(2, 1)$  είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου ( $C$ ) και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία να έχει μέσο το σημείο  $M(2, 1)$

Μονάδες 8

**γ.** Να βρεθεί η εξίσωση των εφαπτομένων του κύκλου ( $C$ ) που άγονται από το σημείο

$P(3, 6)$

Μονάδες 9



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$ .

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Αν  $\vec{a} \perp \vec{\beta}$  τότε  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$  και αντιστρόφως.

β. Η απόσταση των σημείων  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  είναι  $(AB) = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

γ. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ , δίνεται από τον τύπο:  $y - y_0 = \lambda(x + x_0)$

δ. Ο συντελεστής διεύθυνσης  $\lambda$  μιας ευθείας ( $\epsilon$ ) που διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$  και

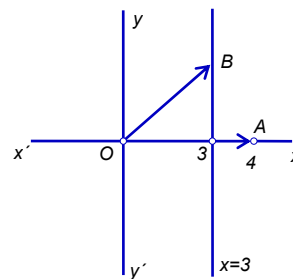
$$B(x_2, y_2) \text{ με } x_1 \neq x_2 \text{ είναι } \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

ε. Η ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη με το διάνυσμα  $\vec{a} = (-A, B)$

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων, το διάνυσμα  $\vec{OA}$  και τυχόν σημείο B της ευθείας  $x = 3$ . Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$  και να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.



Μονάδες 25

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

A. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , η εξίσωση,  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)y - \lambda + 3 = 0$  παριστάνει ευθεία.

Μονάδες 7

B. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές  $A(-1, 2)$ ,  $B(1, 4)$  και  $\Gamma(3, -2)$ . Να βρείτε:

α. Την εξίσωση του ύψους ΓΗ του τριγώνου ABΓ.

Μονάδες 9

β. Την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.

Μονάδες 9

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος,  $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$  και η ευθεία  $y = x$ . Να βρείτε:

α. Το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.

Μονάδες 7

β. Το σημείο τομής της ευθείας και του κύκλου.

Μονάδες 9

γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης στον κύκλο στο σημείο του  $A(-3, 3)$  καθώς και τα σημεία τομής της με τους άξονες.

Μονάδες 5+4

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει

εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 10

**B.** Τι ορίζουμε ως συντελεστή διεύθυνσης ή ως κλίση μιας ευθείας ( $\epsilon$ );

Μονάδες 3

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε με σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

**α.**  $\vec{a} \uparrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$

**β.** Η ευθεία με εξίσωση  $x = x_0$  είναι παράλληλη με τον άξονα  $x'x$

**γ.** Οι ασύμπτωτες της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  είναι οι ευθείες  $y = \frac{a}{b}x$  και  $y = -\frac{a}{b}x$

**δ.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο, όταν  $A^2 + B^2 - 4\Gamma < 0$

Μονάδες 12

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Αν τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά, να αποδείξετε ότι:

**α.**  $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{\beta}) \Leftrightarrow \sin(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{|\vec{a}|}{|\vec{\beta}|}$  Μονάδες 12

**β.** Αν  $\vec{a} = (1, 3)$  και  $\vec{\beta} = (8, -6)$  να αναλύσετε το  $\vec{\beta}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις

οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το  $\vec{a}$  Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$  και τα σημεία της  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ .

**α.** Να βρείτε την εστία  $E$  και τη διευθετούσα  $\delta$  Μονάδες 5

**β.** Αν  $A, B, E$  συνευθειακά να δείξετε ότι  $y_1 \cdot y_2 = -4$  Μονάδες 10

**γ.** Αν  $y_1 + y_2 = 3$  να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $OAB$  Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$ ,  $B(2, 4)$  και  $M$  τυχαίο σημείο του επιπέδου ώστε  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 4$

**α.** Να βρείτε την προβολή του  $\overrightarrow{AM}$  στο  $\overrightarrow{AB}$  Μονάδες 7

**β.** Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  Μονάδες 8

**γ.** Να βρείτε το σημείο του γεωμετρικού τόπου που απέχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A. α.** Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}.$$

Μονάδες 4

**β.** Να γράψετε την αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ .

Μονάδες 3

**γ.** Να αποδείξετε ότι:  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$  (με τις γνωστές προϋποθέσεις)

Μονάδες 8

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α.**  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\alpha} = |\vec{\alpha}|^2$

**β.**  $(3\vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = 3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

**γ.**  $(3\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha}(\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$

**δ.**  $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \vec{\beta}^2$

**ε.**  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{0} \text{ ή } \vec{\beta} = \vec{0}$

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία A(4, 0) και B(0, 2).

**α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Δ του ευθύγραμμου τμήματος AB.

Μονάδες 5

**β.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

Μονάδες 10

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης της ευθείας AB.

Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$

**α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και την ακτίνα του.

Μονάδες 5

**β.** Αν A(0, 1) είναι σημείο του επιπέδου, να βρείτε αν είναι εσωτερικό ή εξωτερικό του κύκλου.

Μονάδες 15

**γ.** Να βρεθεί το κοινό σημείο του κύκλου με τον άξονα y'y.

Μονάδες 5

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 2px$ . Θεωρούμε την ευθεία ε που είναι κάθετη στον άξονα x'x πάνω στην εστία E της παραβολής και η οποία τέμνει την παραβολή στα σημεία A και A'.

**α.** Να δείξετε ότι  $(AA') = 2p$

Μονάδες 10

**β.** Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες  $e_1$  και  $e_2$  της παραβολής στα σημεία A και A' αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 15

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 9

**B. α.** Δίνονται τα σημεία  $A(\lambda+2, \mu+3)$  και  $B(2\lambda, 2\mu+3)$ .

Το διάνυσμα  $\overline{AB}$  έχει συντεταγμένες :

**i.**  $(-2\lambda + 2, -\mu)$  **ii.**  $(3\lambda + 2, 3\mu)$  **iii.**  $(3\lambda, 3\mu)$  **iv.**  $(\lambda-2, \mu)$

**β.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Η γωνία των διανυσμάτων  $\overline{AB}$ ,  $\overline{B\Gamma}$  έχει μέτρο:

**i.**  $60^\circ$  **ii.**  $90^\circ$  **iii.**  $120^\circ$  **iv.**  $150^\circ$

**γ.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{a} = (3, -2)$ .

Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι παράλληλο προς  $\vec{a}$  :

**i.**  $\vec{\beta} = (8, 4)$  **ii.**  $\vec{\gamma} = (6, -1)$  **iii.**  $\vec{\delta} = (-6, 3)$  **iv.**  $\vec{\varepsilon} = (-6, 4)$

**δ.** Δίνεται το διάνυσμα  $\vec{a} = (x, -y)$ .

Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι κάθετο προς το  $\vec{a}$  ;  $(x, y, \lambda \neq 0)$

**i.**  $\vec{\beta} = (-x, y)$  **ii.**  $\vec{\gamma} = (y, 2x)$  **iii.**  $\vec{\delta} = (-\lambda x, \lambda y)$  **iv.**  $\vec{\varepsilon} = (\lambda y, \lambda x)$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση στις ερωτήσεις α, β, γ, δ. Μονάδες 8

**Γ.** Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας του προηγούμενου ερωτήματος Β.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Μονάδες 8

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  με μέτρα  $|\vec{a}| = 1$  και  $|\vec{\beta}| = 2$

Αν τα διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{a} + \vec{\beta}$ ,  $\vec{w} = \vec{a} - 3\vec{\beta}$ , είναι κάθετα τότε:

**α.** Να δείξετε ότι:  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -2$

Μονάδες 15

**β.** Να εξετάσετε αν τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι ομόρροπα ή αντίρροπα. Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος (C) με εξίσωση:  $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$

και ευθεία (ε) με εξίσωση:  $3x - 4y + \lambda = 0$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

**α.** Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου (C) και την ακτίνα του.

Μονάδες 5

**β.** Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε η ευθεία (ε) να είναι εφαπτομένη του κύκλου (C)

Μονάδες 10

**γ.** Αν οι εφαπτομένες του κύκλου (C) που βρήκατε στο β. ερώτημα τέμνουν την ευθεία  $y = x$  στα σημεία A και B να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου KAB ισούται με 10 τ.μ.

Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η έλλειψη (C<sub>1</sub>) με εξίσωση:  $x^2 + 2y^2 = 2$  και η παραβολή (C<sub>2</sub>) με εξίσωση:  $y^2 = 4\sqrt{6}x$ .

**α.** Να βρεθούν: το σταθερό άθροισμα, η εστιακή απόσταση και η εκκεντρότητα της έλλειψης Μονάδες 10

**β.** Αν η ευθεία  $y = x$  τέμνει την έλλειψη (C<sub>1</sub>) σε σημείο A του πρώτου τεταρτημορίου, να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της έλλειψης στο A, διέρχεται από την εστία E της παραβολής (C<sub>2</sub>) Μονάδες 15

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Θεωρούμε τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  του καρτεσιανού επιπέδου και  $M(x, y)$  το

μέσο του  $AB$ . Να αποδείξετε ότι:  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$  Μονάδες 10

**B.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δυο διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{\beta}$ . Μονάδες 5

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε Σωστό (**Σ**) ή Λάθος (**Λ**) τις προτάσεις:

**i.** Αν  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , τότε  $\overrightarrow{AB} = (y_2 - y_1, x_2 - x_1)$

**ii.** Αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$  τότε  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$

**iii.** Το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$  είναι παράλληλο στην ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$

**iv.** Η εξίσωση  $(\mu - 1)x - (2\mu - 2)y + \mu = 0$  παριστάνει ευθεία για κάθε  $\mu \in \mathbb{R}$ .

**v.** Η παραβολή  $y^2 = 2px$  έχει εστία το  $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$  Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνετε το διάνυσμα  $\vec{a} = (1, -3)$

**α.** Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{v}$  ώστε να είναι  $\vec{v} \perp \vec{a}$  και  $|\vec{v}| = 2\sqrt{10}$  Μονάδες 10

**β.** Να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{u}$  ώστε να είναι  $\vec{u} // \vec{a}$  και  $\vec{a} \cdot \vec{u} = 20$  Μονάδες 15

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνετε η εξίσωση  $(2x + y - 2) + \lambda(x - y + 5) = 0, (1) \lambda \in \mathbb{R}$

**α.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει ευθεία για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Μονάδες 8

**β.** Να δείξετε ότι όλες οι ευθείες που παριστάνει η (1) διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο να βρείτε. Μονάδες 8

**γ.** Να βρείτε ποια από τις ευθείες που ορίζονται από την (1) είναι κάθετη στην ευθεία  $x + 2y - 1 = 0$ . Μονάδες 9

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 6\lambda x + 2\lambda y = 0 (1), \lambda \in \mathbb{R}^*$

**α.** Να δείξετε ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  η (1) παριστάνει κύκλο, που διέρχεται από  $O(0, 0)$  του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 9

**β.** Να δείξετε ότι κάθε κύκλος που ορίζεται από την (1) εφάπτεται της ευθείας  $(\varepsilon): \psi = 3x$ . Μονάδες 8

**γ.** Να βρείτε τον  $\gamma$ . τ. των κέντρων των κύκλων που ορίζονται από την (1) Μονάδες 8

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- Α. α.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 10
- β.** Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  Μονάδες 5
- Β.** Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις.
- α.** Αν  $\varepsilon$  ευθεία  $Ax + By + \Gamma = 0$  και  $M_0(x_0, y_0)$  σημείο εκτός αυτής τότε  $d(M_0, \varepsilon) = \dots\dots\dots$  Μονάδες 2
- β.**  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots$  Μονάδες 2
- γ.** Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \dots$  Μονάδες 2
- δ.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο όταν ισχύει  $\dots\dots\dots$  Μονάδες 2
- ε.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $c: y^2 = 2px$  στο σημείο  $M(x_1, y_1)$  είναι  $\dots\dots\dots$  Μονάδες 2

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(-1, 2)$ ,  $B(7, 0)$  και  $\Gamma(1, 4)$

Έστω  $\Delta$  το μέσο της διαμέσου  $AM$  και  $E$  σημείο για το οποίο ισχύει  $\overrightarrow{2AE} = \overrightarrow{E\Gamma}$

- α.** Να βρείτε το μέτρο της διαμέσου  $AM$  Μονάδες 8
- β.** Να δείξετε ότι το σημείο  $E$  έχει συντεταγμένες  $\left(-\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right)$  Μονάδες 8
- γ.** Να δείξετε ότι τα σημεία  $B, \Delta, E$  είναι συνευθειακά. Μονάδες 9

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

**α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία  $E' \left(-\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$ ,

$E \left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, 0\right)$  και εκκεντρότητα  $\frac{\sqrt{6}}{3}$  είναι  $x^2 + 3y^2 = 4$  Μονάδες 6

- β.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης οι οποίες είναι κάθετες στην ευθεία  $y = 3x$ . Μονάδες 10
- γ.** Ένα τετράγωνο έχει τις κορυφές του στην παραπάνω έλλειψη. Να βρείτε το εμβαδόν του. Μονάδες 9

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Η παραβολή με εξίσωση  $y^2 = ax$  διέρχεται από το σημείο  $A(3, 6)$  όπου  $a \in \mathbb{R}$

- α.** Να αποδείξετε ότι η εστία της παραβολής είναι το σημείο  $E(3, 0)$  Μονάδες 6
- β.** Έστω  $E'$  το συμμετρικό της εστίας  $E$  προς τον άξονα  $y'y$ . Αν  $M(x, y)$  είναι ένα οποιοδήποτε σημείο για το οποίο ισχύει  $\frac{ME}{ME'} = 2$  να αποδείξετε ότι το σημείο  $M(x, y)$  ανήκει σε κύκλο με κέντρο το  $K(-5, 0)$  και ακτίνα  $\rho = 4$  Μονάδες 9
- γ.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων του παραπάνω κύκλου που διέρχονται από το σημείο  $O(0, 0)$ . Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- α.** Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$  ισχύει:  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$
- β.** Αν  $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ , τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1y_1 + x_2y_2$
- γ.** Αν  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ , τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
- δ.** Η εκκεντρότητα της έλλειψης  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  είναι  $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$  όπου  $\gamma^2 = a^2 - b^2$
- ε.** Η παραβολή  $x^2 = 2py$  έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x'x$  Μονάδες  $2 \times 5 = 10$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $A(4, 3)$ ,  $B(0, 6)$  και  $\Gamma(2, 2)$ .

- α.** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς  $B\Gamma$  Μονάδες 10
- β.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το  $A$  που εφάπτεται στην πλευρά  $B\Gamma$  Μονάδες 15

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 1$

- α.** Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \frac{1}{2}$  Μονάδες 10
- β.** Να υπολογίσετε τη γωνία  $(\widehat{\vec{\alpha} - \vec{\beta}, \vec{\beta}})$  Μονάδες 15

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι κύκλοι  $C_1: (x + 3)^2 + y^2 = 1$  και  $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

- α.** Να βρείτε τα κέντρα  $K$ ,  $\Lambda$  και τις ακτίνες  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  των κύκλων  $C_1$ ,  $C_2$  αντιστοίχως και να δείξετε ότι εφάπτονται εξωτερικά Μονάδες 8
- β.** Να βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής  $C$  με εστία το σημείο  $\Lambda$ , που διέρχονται από το σημείο  $K$  Μονάδες 10
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινούνται τα σημεία  $M$  του επιπέδου για τα οποία ισχύει  $(M\Lambda) + (MK) = 10$  Μονάδες 7

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να γράψετε (χωρίς απόδειξη), με πόσο ισούται η απόσταση (AB) των σημείων A(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>) και B(x<sub>2</sub>, y<sub>2</sub>). Μονάδες 3
- B.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων O(0, 0) και ακτίνα ρ έχει εξίσωση x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> = ρ<sup>2</sup>. Μονάδες 9
- Γ.** Να γράψετε (χωρίς απόδειξη), την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου x<sup>2</sup> + y<sup>2</sup> = ρ<sup>2</sup> στο σημείο του Λ(x<sub>1</sub>, y<sub>1</sub>). Μονάδες 3
- Δ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μια τις προτάσεις που ακολουθούν:
- α.** Η απόσταση του σημείου M<sub>0</sub>(x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>) από την ευθεία ε: Ax + By + Γ = 0 είναι:  

$$d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
- β.** Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι κάθετα τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$ .
- γ.** Αν det( $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$ ) είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  τότε ισχύει η ισοδυναμία  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 1$ .
- δ.** Αν A, B, Γ οι κορυφές τριγώνου ABΓ, τότε το εμβαδόν του είναι:  

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AG})|$$
- ε.** Αν το O είναι σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{AB}$  έχουμε:  

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}$$
 Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- A.** Να δείξετε ότι ο αριθμός  $\frac{v \cdot (v^2 + 2)}{3}$  είναι ακέραιος, για κάθε v ≥ 2. Μονάδες 13
- B.** Να δείξετε ότι ο 4<sup>v</sup> + 6v - 1 είναι πολλαπλάσιο του 9, για κάθε v ∈ N\*. Μονάδες 12

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ ,  $\vec{AG} = -3\vec{\beta}$ , όπου  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$
- A.** Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ ,  $(2\vec{\beta} + \vec{\alpha})^2$ ,  $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ . Μονάδες 8
- B.** Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ, να δείξετε ότι:  

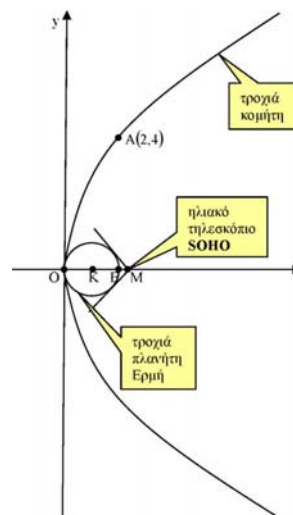
$$\vec{AM} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \text{ και } \vec{BG} = -2\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$$
 Μονάδες 6
- Γ.** Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{AM}$ ,  $\vec{BG}$ . Μονάδες 11

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy προσομοιώνεται το φαινόμενο της παραβολικής τροχιάς κομήτη προς την κυκλική τροχιά του πλανήτη Ερμή. Ο κομήτης κινείται σε παραβολική τροχιά της μορφής y<sup>2</sup> = 2px, p > 0 και παρατηρήθηκε στη θέση A(2,4), του ορθοκανονικού συστήματος

- A.** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής
- B.** Αν η τροχιά του κομήτη δίνεται από την εξίσωση y<sup>2</sup> = 8x να βρεθεί η κυκλική τροχιά του Ερμή, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O(0,0) και την εστία E της παραβολής, ώστε τα σημεία O, E να είναι αντιδιαμετρικά.
- Γ.** Να βρεθεί το σημείο M του θετικού ημιάξονα Ox, θέση του ηλιακού τηλεσκοπίου SOHO, ώστε οι εφαπτόμενες ακτίνες από το σημείο M προς την τροχιά του Ερμή να είναι κάθετες.

Μονάδες 5 + 10 + 10





**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι αριθμοί. Να αποδείξετε ότι αν  $\alpha / \beta$  και  $\alpha / \gamma$  τότε  $\alpha / (\beta + \gamma)$   
 Μονάδες 7
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό ή Λάθος
- α.** Η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$  στο σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xy + x_1y_1 = \rho^2$   
 Μονάδες 3
- β.** Η ευθεία  $y = \lambda x$  είναι κάθετη στην ευθεία  $y + \lambda x = 0$ , για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  Μονάδες 3
- γ.** Αν  $\varphi$  είναι η γωνία δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}| \cdot \sin \varphi$   
 Μονάδες 3
- Γ.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τα γράμματα της στήλης (A), που είναι η σχετική θέση των διανυσμάτων  $\vec{x}, \vec{y}$  και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της στήλης (B), που αντιστοιχεί στο σωστό εσωτερικό γινόμενο Μονάδες 9

<b>Στήλη A:</b> Σχετική θέση των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$	<b>Στήλη B:</b> Εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων $\vec{x}, \vec{y}$
<b>α.</b> $\vec{x} \uparrow \uparrow \vec{y}$	<b>1.</b> $\vec{x} \cdot \vec{y} =  \vec{x}   \vec{y} $
<b>β.</b> $\vec{x} \perp \vec{y}$	<b>2.</b> $\vec{x} \cdot \vec{y} = - \vec{x}   \vec{y} $
<b>γ.</b> $\vec{x} \uparrow \downarrow \vec{y}$	<b>3.</b> $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$
	<b>4.</b> $\vec{x} \cdot \vec{y} =  \vec{y}   \vec{x} $

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(2, 1)$ ,  $B(4, 3)$  και  $\Gamma(1, 4)$ . Να βρείτε:

- α.** Την εξίσωση της ευθείας  $AB$  Μονάδες 5
- β.** Την εξίσωση του ύψους  $\Gamma\Delta$  Μονάδες 10
- γ.** Την εξίσωση της διαμέσου  $BM$  Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  με  $|\vec{\alpha}| = 2$ ,  $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{4}$

- α.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  Μονάδες 5
- β.** Να δείξετε ότι  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{8}$  Μονάδες 10
- γ.** Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{v}$  όπου  $\vec{v} = 2 \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$  Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος  $C_1: x^2 + y^2 + 6x + 1 = 0$  και η παραβολή  $C_2: y^2 = -4x$

- α.** Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου καθώς επίσης η εστία και η διευθετούσα της παραβολής Μονάδες 4
- β.** Να βρείτε τα κοινά σημεία  $A, B$  του κύκλου και της παραβολής Μονάδες 6
- γ.** Αν  $A$  είναι το σημείο με θετική τεταγμένη, να αποδείξετε ότι ο κύκλος και η παραβολή έχουν κοινή εφαπτομένη σε αυτό Μονάδες 15

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

Να γράψετε δίπλα σε κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς ένα (α) για να δηλώσετε ότι είναι αληθής ή ένα (ψ) στην αντίθετη περίπτωση.

**α.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  παριστάνει κύκλο. Μονάδες 5

**β.** Η εξίσωση του κύκλου κέντρου  $K(1, -1)$  ο οποίος διέρχεται από το σημείο  $A(-1, 1)$

είναι:  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 8$  Μονάδες 5

**γ.** Η εξίσωση  $(x+y)^2 = 2xy + a$  παριστάνει κύκλο για κάθε  $a \in \mathbb{R}$  Μονάδες 5

**δ.** Η εφαπτομένη του κύκλου (c):  $x^2 + y^2 = 4$ , που διέρχεται από το σημείο  $A(3,4)$  είναι:

(ε)  $3x + 4y = 4$  Μονάδες 5

**ε.** Ο κύκλος (C):  $(x-3)^2 + (y-2)^2 = \rho^2$ , εφάπτεται στον άξονα  $x'x$ , συνεπώς  $\rho = 3$ .

Μονάδες 5

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

**α.** Θεωρούμε δύο σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$  του καρτεσιανού επιπέδου. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου  $M$  του  $AB$ . Μονάδες 10

**β.** Σε ένα σύστημα συντεταγμένων, οι τετμημένες δύο σημείων  $A$  και  $B$  είναι ρίζες της εξίσωσης:  $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$ .

Να βρείτε την τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε το μέσο του τμήματος  $AB$  να έχει τετμημένη 4

Μονάδες 15

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

**α.** Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{\beta}$

Μονάδες 10

**β.** Για τα διανύσματα  $\vec{u}, \vec{v}$  να αποδείξετε ότι:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{4} \cdot (|\vec{u} + \vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2)$

Μονάδες 15

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

**α.** Να βρείτε την ευθεία η οποία συνδέει το σημείο  $A(2,3)$  με το σημείο τομής των ευθειών:

$(\varepsilon_1): \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$  και  $(\varepsilon_2): \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$  Μονάδες 10

**β.** Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής από την ευθεία (ε):  $5x + 5y = 1$

Μονάδες 15

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να διατυπωθεί και να αποδειχθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  Μονάδες 15

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λανθασμένες (Λ):

**α.**  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) \neq 0$  Μονάδες 2,5

**β.**  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| |\vec{\beta}|$  Μονάδες 2,5

**γ.** Αν  $\vec{\alpha}(x_1, y_1)$  και  $\vec{\beta}(x_2, y_2)$  τότε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 - y_1 y_2$  Μονάδες 2,5

**δ.** Αν  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα τότε :

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \quad \text{Μονάδες 2,5}$$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Αν  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$  και  $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$  να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων

$$\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta} \text{ και } \vec{v} = \vec{\alpha} - \vec{\beta} \quad \text{Μονάδες 25}$$

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο  $n$  ισχύει:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{Μονάδες 25}$$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$  (1)

**α.** Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει εξίσωση κύκλου (C) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του Μονάδες 10

**β.** Να δείξετε ότι το σημείο  $M(1, -3)$  είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (C)

Μονάδες 5

**γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του κύκλου (C) η οποία να έχει μέσο το σημείο

$$M(1, -3) \quad \text{Μονάδες 10}$$

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  με συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1, \lambda_2$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$ . Μονάδες 10
- β. Αν τα E, E' είναι σημεία του επιπέδου, τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E, E'; Μονάδες 5
- γ. Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:
- i. Η παραβολή  $x^2 = 2py$  έχει διευθετούσα την ευθεία  $x = -\frac{p}{2}$ .
- ii. Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει η ισοδυναμία  $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ .
- iii. Η εφαπτόμενη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 4$  στο σημείο του  $M(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xy + x_1y_1 = 4$ . Μονάδες 6
- δ. Αν για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  ισχύει η σχέση  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$  να επιλέξετε ποιά από τα παρακάτω συμπεράσματα είναι το σωστό:  
A.  $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$     B.  $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$     Γ.  $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$     Δ.  $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$     E.  $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$  Μονάδες 4

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία του επιπέδου A(3, 6), B(2, -5), Γ(-1, -2). Να βρείτε:

- i. Την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 13
- ii. Την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 12

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι ακέραιοι αριθμοί  $\alpha, \beta, \kappa$ .

- i. Αν  $15/(\alpha + 4)$  και  $15/(\beta + 49)$ , να δείξετε ότι  $15/(\alpha - \beta)$ . Μονάδες 12
- ii. Αν  $\alpha = 4\kappa + 2$  και  $\beta = 2\kappa - 7$  να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $\alpha + \beta$  με το 6. Μονάδες 13

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x + 4y = 0$ . (1)

- i. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C) του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. Μονάδες 8
- ii. Να δείξετε ότι το σημείο M(4, -3) είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (C) και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία έχει μέσον το M. Μονάδες 8
- iii. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου (C) που άγονται από το σημείο N(2, 2). Μονάδες 9

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $\alpha, \beta$  ακέραιοι. Να δείξετε ότι: Αν  $\alpha \mid \beta$  και  $\beta \mid \alpha$ , τότε  $\alpha = \beta$  ή  $\alpha = -\beta$   
Μονάδες 8

**B.** Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής  
Μονάδες 5

**Γ.** Να γράψετε στην κόλλα σας τη σωστή απάντηση στις προτάσεις:

**α.** Ποια από τις ισότητες δεν ισχύει για κάθε διάνυσμα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$

1.  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$     2.  $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$     3.  $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) = (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$

4.  $(\lambda \cdot \vec{\alpha}) \vec{\beta} = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$ , με  $\lambda \in \mathbb{R}$

**β.** Η εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι ευθεία κάθετη στον  $xx'$  αν:

1.  $A = 0$  και  $B \neq 0$     2.  $A \neq 0$  και  $B = 0$     3.  $A \neq 0$  και  $B \neq 0$     4.  $\Gamma = 0$

**γ.** Το κέντρο του κύκλου:  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  είναι:

1.  $\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$     2.  $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$     3.  $\left(\frac{B}{2}, \frac{A}{2}\right)$     4.  $\left(-\frac{B}{2}, -\frac{A}{2}\right)$

**δ.** Για κάθε  $\alpha, \beta, \gamma$  μη μηδενικούς ακέραιους ισχύει ότι:

1. Αν  $\alpha / \beta$  τότε  $\gamma \alpha / \beta$     2. Αν  $\alpha / \beta$  τότε  $\alpha > \beta$     3. Αν  $\alpha / \gamma \beta$  τότε  $\alpha / \beta$

4. Αν  $\alpha / \beta$  τότε  $\alpha / \gamma \beta$     Μονάδες 12

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η ευθεία: (ε):  $3x - 6y + 5 = 0$  και το σημείο  $A(-1, 2)$

**α.** Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας (κ) που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε)  
Μονάδες 10

**β.** Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το A και εφάπτεται στην (ε)  
Μονάδες 15

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Αν για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  ισχύει ότι:  $|\vec{\alpha}| = 2, |\vec{\beta}| = 5, \widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$  και το διάνυσμα  $\vec{\delta}$  εί-

ναι  $\vec{\delta} = 5\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ , να υπολογιστούν:

**α.** Το  $|\vec{\delta}|$     Μονάδες 15

**β.** Η προβολή του  $\alpha$  στο  $\delta$     Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Έστω η εξίσωση:  $x^2 + y^2 + \lambda x = 1$ , με  $\lambda$  πραγματικό αριθμό

**α.** Να δείξετε ότι είναι εξίσωση κύκλου για κάθε τιμή του  $\lambda$     Μονάδες 7

**β.** Να βρεθεί η εξίσωση της γραμμής στην οποία ανήκουν τα κέντρα τους  
Μονάδες 9

**γ.** Αν  $\lambda = 2$  να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που διέρχονται από το σημείο  $A(2, 0)$     Μονάδες 9

**ΘΕΜΑΤΑ**

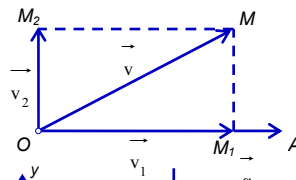
**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ , δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ .  
 β. Αν  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ , δύο μη μηδενικά διανύσματα, να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της 1<sup>ης</sup> στήλης, με την ισοδύναμη συνθήκη της 1<sup>ης</sup> γραμμής, βάζοντας x στο αντίστοιχο ορθογώνιο.

Μονάδες 6 + 8

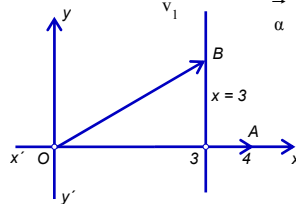
Σχέσεις 1 <sup>ης</sup> Στήλης	Συνθήκες 1 <sup>ης</sup> γραμμής			
	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} =  \vec{a}  \cdot  \vec{\beta} $	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = - \vec{a}  \cdot  \vec{\beta} $	$ \vec{a} \cdot \vec{\beta}  =  \vec{a}  \cdot  \vec{\beta} $	$\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$
$\vec{a} \perp \vec{\beta}$				
$\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$				
$\vec{a} \nearrow \searrow \vec{\beta}$				
$\vec{a} // \vec{\beta}$				

- γ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{v} = \overrightarrow{OM}$ ,  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  και έχουμε αναλύσει το διάνυσμα  $\vec{v}$  σε δύο κάθετες συνιστώσες  $\vec{v}_1 = \overrightarrow{OM_1}$  και  $\vec{v}_2 = \overrightarrow{OM_2}$ .  
 Να αποδείξετε ότι  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$



Μονάδες 6

- δ. Στο διπλανό σχήμα έχουμε στο καρτεσιανό επίπεδο το διάνυσμα OA και τυχόν σημείο B της ευθείας x = 3.  
 Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  και να τεκμηριώσετε πλήρως την απάντησή σας.



Μονάδες 5

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων xOy δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = (2, 0)$  και  $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . Να υπολογίσετε:

- α. Τα μέτρα  $|\vec{a}|$ ,  $|\vec{\beta}|$  των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . Μονάδες 4  
 β. Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$  των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . Μονάδες 4  
 γ. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . Μονάδες 5  
 δ. Τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . Μονάδες 3  
 ε. Τη γωνία φ που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{\beta}$  με τον άξονα x'x. Μονάδες 5  
 ζ. Τους συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_{\vec{a}}$ ,  $\lambda_{\vec{\beta}}$  των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . Μονάδες 4

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

- A. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(-1, 2), B(3, -2) και Γ(1, 4). Να βρείτε:  
 α. Την εξίσωση του ύψους BH του τριγώνου ABΓ  
 β. Την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ  
 B. Για ποιες τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση  $(\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1)y - \lambda + 3 = 0$  παριστάνει ευθεία;

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Μονάδες 9 + 9 + 7

Έστω ο κύκλος  $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$  και η ευθεία  $y = x$

- α. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του .  
 β. Να βρεθούν τα σημεία τομής της ευθείας και του κύκλου  
 γ. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης στον κύκλο στο σημείο του A(-3, 3) καθώς και τα σημεία τομής της με τους άξονες . Μονάδες 7 + 9 + 9<sup>6+3</sup>

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Δίνεται ο κύκλος και ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$ . Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $(C)$  στο  $A$ , έχει εξίσωση  $(\epsilon): x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$  Μονάδες 10

**B.** Αν  $E$  και  $E'$  δύο σημεία του επιπέδου, τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία αυτά; Μονάδες 5

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό **(Σ)** ή λάθος **(Λ)**.

**α.** Για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  του επιπέδου ισχύει  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$

**β.** Η εξίσωση  $x^2 = 2py, p > 0$  παριστάνει παραβολή με άξονα συμμετρίας  $x'x$ .

**γ.** Η παράσταση  $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$  παριστάνει διάνυσμα.

**δ.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο για οποιαδήποτε τιμή των γραμμάτων  $A, B, \Gamma$ .

**ε.** Η ευθεία με εξίσωση  $x = x_0$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $90^\circ$ . Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  στο καρτεσιανό επίπεδο με  $A(3, 2)$  και εξισώσεις πλευρών  $B\Gamma: x + y - 1 = 0$  και  $\Delta\Gamma: x - y + 3 = 0$ . Να βρεθούν:

**α.** Οι συντεταγμένες της κορυφής  $\Gamma$ . Μονάδες 6

**β.** Η εξίσωση της ευθείας  $A\Delta$  και οι συντεταγμένες του σημείου  $\Delta$ . Μονάδες 9

**γ.** Η απόσταση του σημείου  $\Delta$  από τη διαγώνιο  $A\Gamma$  Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  για τα οποία ισχύει:  $|\vec{a}| = 4, |\vec{\beta}| = 5$  και  $\text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta} = \frac{5}{8}\vec{a}$ .

**α.** Να αποδειχθεί ότι  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 10$  Μονάδες 6

**β.** Να βρεθεί η γωνία  $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$ . Μονάδες 7

**γ.** Αν  $\vec{u} = \vec{a} - \vec{\beta}$  να υπολογισθεί το  $|\vec{u}|$  Μονάδες 7

**δ.** Αν το διάνυσμα  $\vec{v} = (\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{a} - \kappa \cdot \vec{\beta}, \kappa \in \mathbb{R}$  είναι κάθετο στο  $\vec{\beta}$ , να βρεθεί η τιμή του  $\kappa$ . Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 4**

Δίνονται στο καρτεσιανό επίπεδο:

Η έλλειψη  $(C_1): \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$  με  $\alpha > \beta$  η οποία έχει μεγάλο άξονα  $(AA') = 6\sqrt{2}$ .

Ο κύκλος  $(C_2): x^2 + y^2 = \beta^2$  ο οποίος διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης  $(C_1)$

**A<sub>1</sub>.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha = 3\sqrt{2}$  και  $\beta = 3$ . Μονάδες 8

**A<sub>2</sub>.** Να βρεθεί η εκκεντρότητα της έλλειψης  $(C_1)$ . Μονάδες 5

**B<sub>1</sub>.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης  $(\epsilon)$  του κύκλου  $(C_2)$  στο σημείο του

$\Sigma\left(\frac{6}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ . Μονάδες 5

**B<sub>2</sub>.** Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης  $(C_1)$  που είναι παράλληλες στην ευθεία  $(\epsilon)$  που βρήκατε στο ερώτημα  $B_1$ . Μονάδες 5

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι κάθε ευθεία του επιπέδου γράφεται στην μορφή  $Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$  Μονάδες 10
- B.** Να γράψετε τον τύπο που δίνει την απόσταση  $d(M, \varepsilon)$  ενός σημείου  $M(x_0, y_0)$  από την ευθεία  $(\varepsilon): Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A \neq 0$  ή  $B \neq 0$ . Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστό ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ ) τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Αν  $\vec{a}^2 = \vec{\beta}^2 \Rightarrow \vec{a} = \vec{\beta}$  ή  $\vec{a} = -\vec{\beta}$
- β.** Αν  $\vec{a}, \vec{\beta} \neq 0$  και  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = 0 \Rightarrow \lambda = \mu = 0$   $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- γ.** Αν  $\lambda \cdot \mu < 0$ ,  $\vec{a}, \vec{\beta} \neq 0$  και  $\lambda\vec{a} + \mu\vec{\beta} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
- δ.** Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου  $x^2 + y^2 = \rho^2$ , που διέρχεται από το σημείο  $A(x_1, y_1)$ , είναι πάντα  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
- ε.** Η ισοσκελής υπερβολή έχει εκκεντρότητα  $\varepsilon = \sqrt{2}$  Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίδονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  που έχουν μέτρα  $|\vec{a}|=1, |\vec{\beta}|=2$  και σχηματίζουν γωνία  $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$  και τα διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ . Να βρεθούν τα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  και το  $\text{syn}(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ . Μονάδες 25

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Να αποδείξετε ότι οι ευθείες  $\varepsilon_1: \lambda^2 x - \lambda y = 6$  και  $\varepsilon_2: 3\lambda x + y = \frac{2}{\lambda}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}^*$  τέμνονται σε ένα σημείο  $N$ , το οποίο, όταν το  $\lambda$  μεταβάλλεται, ανήκει σε παραβολή, της οποίας να βρεθεί η εστία και η διευθετούσα. Μονάδες 25

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίδεται η εξίσωση  $C: x^2 + y^2 - 4x\eta\mu\theta - 6y\sigma\upsilon\nu\theta + 4\eta\mu^2\theta = 0$  με  $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Να δείξετε ότι:

- α.** Η εξίσωση  $C$  παριστάνει κύκλο, για κάθε  $\theta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ . Μονάδες 5
- β.** Ο κύκλος  $C$  εφάπτεται στο άξονα  $x'x$ . Μονάδες 5
- γ.** Τα κέντρα των κύκλων ανήκουν σε έλλειψη, της οποίας να βρείτε τις εστίες και την εκκεντρότητα. Μονάδες 10
- δ.** Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $M(0, 8)$ . Μονάδες 5



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Να αποδείξετε ότι σε όλες τις περιπτώσεις, η εξίσωση  $Ax+By+\Gamma=0$  με  $A \neq 0$ , ή  $B \neq 0$ , παριστάνει ευθεία. Μονάδες 13
- B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με το γράμμα Σ αν είναι σωστές, και με το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες :
1. Η απόσταση του σημείου  $M(x_0, y_0)$  με  $x_0 \neq y_0$  από την ευθεία  $(\varepsilon): Ax+By+\Gamma=0$ , δίνεται από τον τύπο  $d(M, \varepsilon) = \frac{|Ay_0 + Bx_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .
2. Αν τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι αντίρροπα, τότε ισχύει  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$ .
3. Ισχύει  $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$  για όλα τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .
4. Η εξίσωση  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ , παριστάνει έλλειψη.
5. Ο κύκλος με εξίσωση  $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$  έχει κέντρο το  $K(2,1)$  και ακτίνα  $\rho=4$ .
6. Η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} = 1$ , έχει τις εστίες της στον άξονα  $x'x$ .

Μονάδες 12

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ , για τα οποία ισχύει  $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 2$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ .

- A. Να αποδείξετε ότι  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 2$ . Μονάδες 5
- B. Να αποδείξετε ότι  $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}| = 2\sqrt{3}$ . Μονάδες 8
- Γ. Να αποδείξετε ότι  $(2\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 6$ . Μονάδες 7
- Δ. Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων  $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$  και  $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ . Μονάδες 4

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι ευθείες  $(\varepsilon_1): y = 2x + 1$  και  $(\varepsilon_2): y = (\lambda^2 - 2)x + 3$ .

- A. Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε  $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2$ . Μονάδες 5
- B. Για  $\lambda=2$
1. Να βρείτε το σημείο  $K$  που η ευθεία  $\varepsilon_2$  τέμνει τον άξονα  $y'y$ . Μονάδες 5
2. Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $K$  από την ευθεία  $\varepsilon_1$ . Μονάδες 6
3. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το σημείο  $K$  και εφάπτεται στην ευθεία  $\varepsilon_1$ . Μονάδες 9

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $C_1: y^2 = 8x$ .

- A. Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας της  $E$  και την εξίσωση της διευθετούσας της  $(\delta)$ . Μονάδες 5
- B. Να βρείτε την εξίσωση  $C_2$  της έλλειψης με κέντρο το  $O(0,0)$ , που η μία της εστία είναι η  $E$  και το μήκος του μεγάλου άξονα είναι  $2a = 6$ . Μονάδες 10
- Γ. Αν  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα σημεία τομής της παραβολής  $C_1$  και της έλλειψης  $C_2$ , και  $K'$ ,  $\Lambda'$  οι προβολές τους πάνω στη διευθετούσα της παραβολής, να αποδείξετε ότι  $(KK') + (\Lambda\Lambda') + (KE') + (\Lambda E') = 12$  Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Έστω  $\varepsilon$  η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ . Αν  $x_1 \neq x_2$  να δείξε-

τε ότι η εξίσωσή της είναι  $\varepsilon : y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1)$  Μονάδες 9

**B.** Να γραφούν οι εξισώσεις των ευθειών:

**α.** που διέρχονται από τα σημεία  $(4, -1)$  και  $(2, 3)$

**β.** που είναι κάθετες στην ευθεία  $3x - 4y = 1$

**γ.** που διέρχονται από το σημείο  $(4, -1)$

**δ.** που είναι κάθετες στο διάνυσμα  $\vec{a} = (-1, -2)$  Μονάδες 8

**Γ.** Ποιοι ισχυρισμοί είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς

**α.** οι ευθείες  $x = 5$  και  $y = 2$  είναι κάθετες

**β.** η ευθεία  $3x + 4y - 1 = 0$  δε διέρχεται από την αρχή των αξόνων

**γ.** η ευθεία  $x = 2$  τέμνει τον  $y'$

**δ.** οι ευθείες  $2x + y + 2 = 0$  και  $2x - y + 2 = 0$  είναι παράλληλες Μονάδες 8

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το σημείο  $M(1, 2)$  και σχηματίζουν με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν  $E = 4$  Μονάδες 25

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $c : y^2 = 4x$

Να βρεθούν τα σημεία  $A$  και  $B$  της παραβολής τα οποία απέχουν από την εστία της απόσταση ίση με 2 Μονάδες 25

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Κύκλος εφάπτεται ευθείας  $\varepsilon : 4x + 3y + 2 = 0$  στο σημείο  $M(-2, 2)$ . Το κέντρο του βρίσκεται

στην εφαπτομένη της έλλειψης  $c : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$  στο σημείο  $N(3, 0)$ . Να βρεθούν:

**α.** η εξίσωση ευθείας κάθετης στην  $\varepsilon$  που διέρχεται από το  $M$

**β.** η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο  $N$

**γ.** το κέντρο του κύκλου

**δ.** η ακτίνα του κύκλου

**ε.** η εξίσωση του κύκλου Μονάδες 25

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A. Να αποδείξετε ότι για  $\alpha, \beta, \gamma$  ακεραίους, ισχύουν:

α. Αν  $\alpha \mid \beta$  και  $\beta \mid \alpha$ , τότε  $\alpha = \beta$  ή  $\alpha = -\beta$ .

β. Αν  $\alpha \mid \beta$  και  $\alpha \mid \gamma$ , τότε  $\alpha \mid (\beta + \gamma)$ .

Μονάδες 14

B. Επιλέξτε την σωστή απάντηση

α. Η παραβολή  $x^2 = 2py$ , έχει εστία:

i.  $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$    ii.  $E\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$    iii.  $E\left(0, \frac{p}{2}\right)$    iv.  $E\left(0, -\frac{p}{2}\right)$    v.  $E\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right)$

β. Η παραβολή  $y^2 = 2px$  έχει διευθετούσα ευθεία

i.  $y = x$    ii.  $y = \frac{p}{2}$    iii.  $x = \frac{p}{2}$    iv.  $x = -\frac{p}{2}$    v.  $y = -\frac{p}{2}$

Μονάδες 6

Γ. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$

Μονάδες 5

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η ευθεία ( $\epsilon$ ) με εξίσωση  $2x + 3y = 3$ .

α. Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης της και τα σημεία στα οποία τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $yy'$ .

Μονάδες 15

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη στην ( $\epsilon$ ) και διέρχεται από το σημείο  $A(4, -1)$ .

Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

α. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ , με  $|\vec{a}| = 2, |\vec{\beta}| = 3$  και  $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ . Να υπολογίσετε τον  $\kappa \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$  και  $\vec{v} = \kappa^2\vec{a} + 3\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.

Μονάδες 13

β. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος  $\vec{u}$  πάνω στο διάνυσμα  $\vec{a}$ .

Μονάδες 12

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4\lambda x + (2\lambda - 2)y + 6\lambda^2 - 2\lambda = 0$  (1)  $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τον  $\lambda \in \mathbb{R}$ , ώστε η (1) να παριστάνει κύκλο. Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι τα κέντρα των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε ευθεία, της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 8

γ. Από τους παραπάνω κύκλους, να βρείτε την εξίσωση εκείνου που εφάπτεται στην ευθεία  $3x - 4y + 14 = 0$ . Μονάδες 9

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, με τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.

**β.** Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

**γ.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

**δ.** Η εκκεντρότητα  $e$  της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(1 + \lambda)x - (1 - \lambda)y - 2\lambda = 0$

**α.** Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή του  $\lambda \in \mathbb{R}$

**β.** Να δείξετε ότι όλες οι πιο πάνω ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο  $M$  το οποίο να προσδιορίσετε.

**γ.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το  $M$  και εφάπτεται του άξονα  $x'x$  στο σημείο  $A(2, 0)$ .

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης  $3x^2 + y^2 = 4$ , οι οποίες:

**α.** είναι παράλληλες προς την ευθεία  $y = -3x + 1$

**β.** διέρχονται από το σημείο  $M(0, 4)$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$

**α.** Να δείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο την εστία που εφάπτεται στη διευθετούσα της παραβολής, έχει εξίσωση  $(x - 1)^2 + y^2 = 4$

**β.** Να βρεθούν τα κοινά σημεία  $A, B$  του κύκλου και της παραβολής.

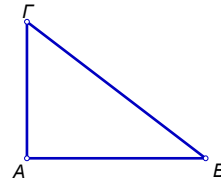
**γ.** Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία  $A$  και  $B$  τέμνονται σε σημείο του άξονα  $x'x$ .

**δ.** Να προσδιορίσετε σημείο  $M$  του  $x'x$  ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $MAB$  να είναι  $4 \tau. \mu.$

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- α. Δείξτε ότι η εφαπτομένη κύκλου  $C: x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση (ε):  $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$
- β. Πώς ορίζεται το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων;
- γ. Αν  $\vec{a} = (-3, -2)$  τότε το  $\vec{a}^2$  είναι ίσο με :
- i. το διάνυσμα  $(-9, -4)$ , ii. τον αριθμό  $-13$ , iii. τον αριθμό  $13$ , iv. το διάνυσμα  $(9, 4)$   
 v. τον αριθμό  $6$ .
- δ. Αν στο διπλανό σχήμα είναι  $|\overline{AB}| = 3$ ,  $|\overline{AG}| = 4$ ,  
 $|\overline{BG}| = 5$  τότε το  $\overline{AB} \cdot \overline{AG}$  είναι ίσο με:
- i.  $12$ , ii.  $1$ , iii.  $-12$ , iv.  $7$ , v.  $0$ .
- ε. Η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{a} = (1, 0)$ ,  $\vec{\beta} = (2, 2)$  είναι:
- i.  $90^\circ$  ii.  $135^\circ$  iii.  $60^\circ$  iv.  $30^\circ$  v.  $45^\circ$
- στ. Ποιο από τα παρακάτω διανύσματα είναι παράλληλο προς το διάνυσμα  $(5, -3)$ ;
- i.  $(10, 6)$  ii.  $(-1, \frac{3}{5})$  iii.  $(6, -2)$  iv.  $(5, 3)$  v.  $(-5, -3)$
- ζ. Ποια από τις επόμενες σχέσεις πρέπει να ισχύει για να είναι τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$ , αντίρροπα; i.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{a}$  ii.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$  iii.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$  iv.  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$



Μονάδες  $7 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

- α. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 0)$ ,  $B(-1, \rho)$ ,  $\Gamma(4, \rho - 2)$ . Αν  $(AB\Gamma) = 3\tau.μ.$  να βρείτε το  $\rho$ .
- β. Αν  $\rho > 0$  τότε να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής  $y^2 = 2\rho x$  η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $2x - y = 0$ . Μονάδες  $10 + 15$

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 2)$  και  $B(3, -2)$ . Να βρείτε:

- α. Την εξίσωση της ευθείας  $AB$ .
- β. Την εξίσωση της μεσοκαθέτου (η) του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .
- γ. Το σημείο τομής της ευθείας (η) και της ευθείας (ε) με εξίσωση  $y = 4x - 8$ .
- δ. Την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία  $A, B$  και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία (ε). Μονάδες  $3 + 6 + 6 + 10$

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων  $O$ , διέρχεται από το σημείο  $A(1, \sqrt{3})$ .

- α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.
- β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου που είναι παράλληλη προς την ευθεία  $OA$
- γ. Αν ο κύκλος τέμνει τον άξονα  $xx'$  στα σημεία  $E'$  και  $E$ , να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία  $E'$  και  $E$  και μεγάλο άξονα  $8$ .

Μονάδες  $5 + 10 + 10$

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου  $C : x^2 + y^2 = \rho^2$  σε ένα σημείο του  $A(x_1, y_1)$  έχει εξίσωση  $xx_1 + yy_1 = \rho^2$  Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή και (Λ) αν η πρόταση είναι λανθασμένη, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  ( $A, B, \Gamma$  σημεία του καρτεσιανού επιπέδου) δίνεται από τον τύπο  $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det \overline{AB}, \overline{A\Gamma}|$ .
- β.** Η εξίσωση της παραβολής  $C$  με εστία  $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$  και διευθετούσα  $\delta : x = -\frac{p}{2}$  είναι  $y^2 = 2px^2$
- γ.** Έστω  $\alpha, \beta$  δύο ακέραιοι με  $\beta \neq 0$ . Θα λέμε ότι ο  $\beta$  διαιρεί τον  $\alpha$  ( $\beta/\alpha$ ), όταν η διαίρεση του  $\alpha$  με τον  $\beta$  είναι τέλεια, δηλαδή όταν υπάρχει ακέραιος  $\lambda$ , τέτοιος ώστε  $\alpha = \lambda\beta$ .
- δ.** Έστω  $\alpha, \beta, \gamma$  ακέραιοι. Τότε ισχύει η ιδιότητα: Αν  $\frac{\alpha}{\beta}$  τότε  $\frac{\alpha}{\lambda\beta}$  για κάθε ακέραιο  $\lambda$ .
- ε.** Έστω διάνυσμα  $AB$  και ένα σημείο αναφοράς  $O$ , τότε η διανυσματική ακτίνα του μέσου  $M$  του τμήματος  $AB$  δίνεται από τον τύπο  $\overline{OM} = \frac{\overline{OA} + \overline{OB}}{2}$  Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(3,6)$   $B(8,6)$   $\Gamma(9,1)$   $\Delta(2,1)$

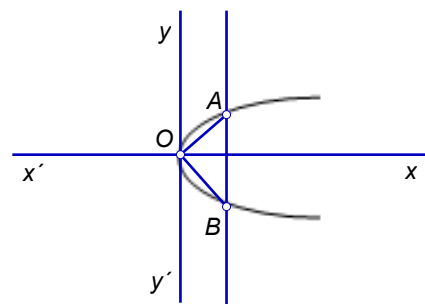
- α.** Να αποδείξετε ότι τα  $A, B, \Gamma, \Delta$  είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου
- β.** Να βρείτε το μήκος της διαμέσου  $MN$  αυτού
- γ.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου  $(O, ON)$  όπου  $O$  το μέσο της  $MN$

Μονάδες 10 + 5 + 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Έστω η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και σημεία της  $A, B$  έτσι ώστε η γωνία  $AOB = 90^\circ$

- α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών  $OA$  και  $AB$  Μονάδες 8
- β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων  $A, B$  Μονάδες 10
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $AB$  Μονάδες 3



- δ.** Να αποδείξετε ότι η  $AB$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε σταθερό σημείο. Μονάδες 4

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Για κάθε  $n \in \mathbb{N}^*$  να αποδείξετε ότι:

- α.**  $4^n + 6n - 1 = \text{πολ}9$  Μονάδες 15
- β.**  $2^{2n} + 15n - 1 = \text{πολ}9$  Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1°**

**A.** Να γράψετε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$  και έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda$ .

**α.** Ποια είναι η εξίσωση της κατακόρυφης ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $A(x_0, y_0)$ ;

**β.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο  $K(x_0, y_0)$  και ακτίνα  $\rho$ .

Μονάδες 5

**B.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ , τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και έχουν συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1$  και  $\lambda_2$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 10

**Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας την λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.**  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$  ή  $\vec{\beta} = 0$ .

**β.** Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

**γ.** Η εστία της παραβολής  $x^2 = 2py$  είναι το  $E(\frac{p}{2}, 0)$ .

**δ.** Αν  $\det(\vec{a}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{a}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία  $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$ .

**ε.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  παριστάνει κύκλο όταν  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ .

Μονάδες 10

**Θέμα 2°**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  με  $2|\vec{a}| = |\vec{\beta}| = 2$  και  $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{2\pi}{3}$ .

**α.** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 12

**β.** Αν  $\vec{u} = \vec{a} + \lambda\vec{\beta}$  και  $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$  να βρείτε το  $\lambda$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  να είναι ορθογώνια

Μονάδες 13

**Θέμα 3°**

Δίνονται τα σημεία  $A(1, 1)$ ,  $B(2\mu + 1, \lambda - 2)$ ,  $\Gamma(4, 0)$  και  $M(3, 2)$ , όπου  $M$  είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  και  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε:

**α.** Τις τιμές των  $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 9

**β.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Μονάδες 8

**γ.** Την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο  $\Delta(-1, 2)$  και είναι κάθετη στο διάνυσμα  $A\Gamma$ .

Μονάδες 8

**Θέμα 4°**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2(2+\lambda)y + 4\lambda + 4 = 0$  (1),  $\lambda \in \mathbb{R}^*$

**α.** Να δείχτεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του.

Μονάδες 8

**β.** Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  ώστε ο κύκλος που ορίζεται από την (1) να έχει δύο κοινά σημεία με την ευθεία  $y = x - 1$ .

Μονάδες 9

**γ.** Για  $\lambda = -2$  να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει εστία το κέντρο του κύκλου (1) καθώς και η εφαπτομένη στο σημείο  $A(-2, 4)$  της παραβολής.

Μονάδες 8

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Εάν  $\vec{a}, \vec{v}$  δυο διανύσματα του επιπέδου με  $\vec{a} \neq \vec{0}$  δείξτε ότι:  $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$   
Μονάδες 10
- B. Δώστε τον ορισμό της παραβολής  
Μονάδες 10
- Γ. Μεταφέρετε στην κόλλα σας τον αριθμό της κάθε μιας από τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας δίπλα Σ ή Λ εάν η αντίστοιχη πρόταση είναι Σωστή ή Λάθος:
- α. Αν  $\lambda \vec{a} = \mu \vec{a}$ ,  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ,  $\vec{a} \neq \vec{0}$  τότε  $\lambda = \mu$
- β. Για τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$  ισχύει  $(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot (\vec{\gamma} \cdot \vec{\delta}) = [(\vec{a} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}] \cdot \vec{\delta}$
- γ. Η γωνία  $\varphi$  που σχηματίζει μια ευθεία με τον  $x'x$  είναι  $0 \leq \varphi \leq \pi$
- δ. Η ευθεία  $\varepsilon: Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη με το διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$
- ε. Η εξίσωση  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = p^2$  παριστάνει κύκλο για κάθε  $p \in \mathbb{R}$

Μονάδες 5

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Έστω  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου ώστε  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{\beta}| = 2$ , και  $|3\vec{a} + \vec{\beta}| = |\vec{a} - \vec{\beta}|$

- α. Να βρείτε την γωνία  $\omega = (\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}})$   
Μονάδες 12
- β. Να βρείτε το  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{v} = \vec{a} + \lambda \vec{\beta}$  και  $\vec{k} = \vec{a} + 2\vec{\beta}$  να είναι κάθετα

Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με A (2, 4), B (4, 3) και H (2, 1) το σημείο τομής των υψών του.

- α. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του Γ  
Μονάδες 10
- β. Να βρεθεί το συμμετρικό του B ως προς την ΑΓ.  
Μονάδες 10
- γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΗΒ  
Μονάδες 5

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται η ευθεία ( $\varepsilon$ ):  $5x + 3y - 2 = 0$  και ο κύκλος (C):  $x^2 + y^2 - x - 2 = 0$  που τέμνονται στα σημεία M, N

- α. Ναδειχθεί ότι για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$  η εξίσωση ( $C_1$ ):  $x^2 + y^2 - x - 2 + \lambda \cdot (5x + 3y - 2) = 0$  παριστάνει κύκλο  
Μονάδες 6
- β. Για ποια τιμή του  $\lambda$  ο κύκλος ( $c_1$ ) περνά από την αρχή των αξόνων;  
Μονάδες 5
- γ. Ναδειχθεί ότι τα κέντρα των κύκλων ανήκουν σε ευθεία  
Μονάδες 6
- δ. Ναδειχθεί ότι ο κύκλος ( $c_1$ ) περνά από τα σημεία M, N  
Μονάδες 7



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με κέντρο το σημείο  $O(0, 0)$  και ακτίνα  $\rho$  έχει εξίσωση

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \quad \text{Μονάδες } 10$$

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με  $\Sigma$  (Σωστό) ή  $\Lambda$  (Λάθος)

**α.**  $\vec{a} // \vec{\beta}$  αν και μόνο αν  $\det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 1$

**β.**  $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$  αν και μόνο αν  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| |\vec{\beta}|$

**γ.** Αν  $(\vec{a}, \vec{\beta}) > \frac{\pi}{2}$  τότε  $\vec{a} \cdot \vec{\beta} < 0$

**δ.** Στην ευθεία  $y = y_0$  δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης

**ε.** Η παραβολή  $y^2 = 2px$  έχει διευθετούσα την ευθεία  $x = \frac{p}{2}$  Μονάδες 15

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$  με  $\vec{a} = (2, -2)$ ,  $\vec{\beta} = (8, 6)$  και τα διανύσματα  $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \vec{\beta}$  και

$$\vec{v} = \vec{a} - \left(\frac{2}{3}\right)\vec{\beta}$$

**α.** Να υπολογίσετε τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{u}$  Μονάδες 12

**β.** Να βρεθεί το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  Μονάδες 13

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται η εξίσωση  $(\lambda + 3)x + (1 - 2\lambda)y - (2\lambda + 15) = 0$

**α.** Να δείξετε ότι η εξίσωση παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου  $\lambda$  Μονάδες 10

**β.** Να βρείτε την τιμή του  $\lambda$  για την οποία η ευθεία που παριστάνει η παραπάνω εξίσωση διέρχεται από το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος που έχει άκρα τα σημεία  $A(3, -4)$  και  $B(-1, -2)$  Μονάδες 15

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$

**α.** Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του Μονάδες 5

**β.** Να βρεθούν οι εφαπτόμενες του κύκλου που περνούν από το σημείο  $O(0, 0)$  Μονάδες 10

**γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής με κορυφή το σημείο  $O(0, 0)$ , άξονα συμμετρίας τον  $x'x$  και εστία το σημείο τομής  $E$  του άξονα  $x'x$  με την ευθεία που περνά από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{v} = (3, -1)$  Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A. Στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  δίνονται τα σημεία  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ . Αν  $M(x, y)$  είναι το μέσο του  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$  και  $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ . Μονάδες 8

B. Αν  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  είναι δύο διανύσματα, να ορίσετε το εσωτερικό τους γινόμενο. Μονάδες 7

Γ. Σε κάθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το  $\Sigma$  (σωστή) ή το  $\Lambda$  (λανθασμένη).

α. Η υπερβολή  $C: \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1$  έχει ασύμπτωτες τις ευθείες με εξισώσεις  $y = \frac{\alpha}{\beta}x$  και

$$y = -\frac{\alpha}{\beta}x.$$

Μονάδες 2

β. Κάθε σημείο μιας παραβολής ισαπέχει από τη διευθετούσα και από την κορυφή της.

Μονάδες 2

γ. Η ευθεία με εξίσωση  $Ax + By + \Gamma = 0$  είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\vec{\delta} = (B, -A)$ .

Μονάδες 2

δ. Μια εξίσωση με δύο αγνώστους  $x$  και  $y$  λέγεται εξίσωση μιας γραμμής  $C$ , όταν οι συντεταγμένες των σημείων της  $C$ , και μόνο αυτές, την επαληθεύουν.

Μονάδες 2

ε. Αν  $\vec{\alpha} = (x, y)$ , τότε  $|\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Μονάδες 2

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Αν  $\vec{u} = (5, 12)$ , να βρείτε το διάνυσμα  $\vec{v}$ , το οποίο είναι παράλληλο προς το  $\vec{u}$  και έχει τριπλάσιο μέτρο από αυτό. Μονάδες 25

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται δύο κωνικές τομές, η παραβολή  $y^2 = 2x$  και η έλλειψη  $4x^2 + 2y^2 = 3$ .

A. Να αποδείξετε ότι οι εστίες  $E$  και  $E'$  της έλλειψης είναι τα σημεία  $E(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$  και

$$E'(0, -\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Μονάδες 7

B. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής  $K$  και  $\Lambda$  των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία

$$K(\frac{1}{2}, 1) \text{ και } \Lambda(\frac{1}{2}, -1).$$

Μονάδες 10

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες των δύο κωνικών τομών στο σημείο  $K(\frac{1}{2}, 1)$  είναι κά-

θετες μεταξύ τους. Μονάδες 8

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε τα σημεία  $B(5, 2)$ ,  $\Gamma(7, 2)$  και έστω  $A$  το σημείο τομής της ευθείας  $y = x - 1$  και της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος  $B\Gamma$ .

α. Να βρεθεί η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς  $B\Gamma$ .

Μονάδες 5

β. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου  $A$  είναι  $(6, 5)$  και στη συνέχεια

να βρείτε το μήκος του ύψους  $AD$  στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

Μονάδες 5

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας  $AB$ .

Μονάδες 5

δ. Να βρεθεί το μήκος του ύψους  $GE$  στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ .

Μονάδες 5

ε. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που έχει για διάμετρο την πλευρά  $AB$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Μονάδες: 5

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

Θεωρούμε δύο μη μηδενικά διανύσματα  $\vec{a}, \vec{\beta}$

**α.** Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου των  $\vec{a}, \vec{\beta}$

Μονάδες 15

**β.** Να αποδείξετε ότι αν ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης  $\lambda_1, \lambda_2$  των  $\vec{a}, \vec{\beta}$  αντίστοιχα

τότε ισχύει  $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 8x$

**α.** Να βρεθεί η εστία της

Μονάδες 8

**β.** Να βρεθεί η διευθετούσα της

Μονάδες 8

**γ.** Να βρεθεί η εφαπτομένη της στο σημείο της  $P\left(\frac{1}{2}, -2\right)$

Μονάδες 9

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνονται τα σημεία  $A(2,1), B(4,3)$ , η ευθεία  $(\varepsilon) : \lambda x - y = 0$  και ο κύκλος

$(C) : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 2$

**A.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει

$$\overrightarrow{AM}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \text{ είναι ο κύκλος } (C)$$

Μονάδες 15

**B.** Να βρείτε τις τιμές του  $\lambda$  για τις οποίες:

**α.** Η ευθεία  $(\varepsilon)$  και ο κύκλος  $(C)$  έχουν δύο κοινά σημεία

Μονάδες 5

**β.** Η ευθεία  $(\varepsilon)$  και ο κύκλος  $(C)$  έχουν δύο κοινά σημεία  $\Gamma, \Delta$  έτσι ώστε  $(\Gamma\Delta) = 2\sqrt{2}$

Μονάδες 5

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνονται οι ευθείες:  $(\varepsilon_1) y = ax$ ,  $(\varepsilon_2) y = \beta x$  και το σημείο  $P(\kappa, \lambda)$  που δεν ανήκει στις

$(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ . Τα  $a, \beta, \kappa, \lambda$  θεωρούνται γνωστοί αριθμοί με  $a \neq \beta$

**A.** Τυχόν σημείο της  $(\varepsilon_1)$  έχει τετμημένη  $t$ . Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό του ως προς κέντρο συμμετρίας το σημείο  $P$  έχει συντεταγμένες  $2\kappa - t, 2\lambda - at$ .

Μονάδες 5

**B.** Τα σημεία  $A, B$  ανήκουν στις  $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$  αντιστοίχως και το σημείο  $P$  είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .

**α.** Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των  $A, B$

Μονάδες 10

**β.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές την αρχή των αξόνων και τα  $A,$

$$B \text{ είναι } 2 \left| \frac{(a\kappa - \lambda)(\beta\kappa - \lambda)}{a - \beta} \right|$$

Μονάδες 10

