

ΓΕΝΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΛΥΚΕΙΟ 2008
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤ. ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΑΞΗ Γ'

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Έστω f συνάρτηση με πεδίο ορισμού A παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και c πραγματική σταθερά. Να αποδείξετε ότι: $(cf(x))' = cf'(x)$ Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Αν A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Μονάδες 2
- β.** Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν: $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$ Μονάδες 2
- γ.** Αν f, g είναι δύο παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε για το γινόμενο τους ισχύει:
 $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x)$ Μονάδες 2
- δ.** Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$ Μονάδες 2
- ε.** Για δύο ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Δίνεται ο πίνακας:

Κλάσεις (,)	Κεν. κλά- σης x_i	Συχ. v_i	Αθρ. Συχν. N_i	Σχετ. συχν. $f_i \%$	Σχ. Αθ. Συχνοτ $F_i \%$	$x_i \cdot v_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$v_i \cdot (x_i - \bar{x})^2$
0 – 10		10							
10 – 20		20							
20 – 30		15							
30 – 40		5							
Σύνολα									

- α.** Να συμπληρωθεί ο πίνακας Μονάδες 18
- β.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} , τη διακύμανση s^2 , την τυπική απόκλιση s και το συντελεστή μεταβολής $CV \%$. Είναι το δείγμα ομοιογενές ; Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Από ένα σύνολο 100 φοιτητών ενός τμήματος πανεπιστημίου, οι 50 παρακολουθούν το μάθημα των Μαθηματικών, οι 30 το μάθημα της Φυσικής ενώ οι 20 παρακολουθούν και τα δύο μαθήματα. Επιλέγουμε τυχαία ένα φοιτητή και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

- α.** Ο φοιτητής να παρακολουθεί Μαθηματικά ή Φυσική
- β.** Ο φοιτητής να παρακολουθεί Μαθηματικά αλλά όχι Φυσική
- γ.** Ο φοιτητής να μην παρακολουθεί Μαθηματικά ούτε Φυσική
- Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(B)$ και $P(\Gamma)$. Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$

- α.** Βρείτε το πεδίο ορισμού της
- β.** Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ Μονάδες 10

B. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + 4$

- α.** Να βρεθεί η παράγωγος $g'(x)$
- β.** Να μελετηθεί η g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχτεί ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$ Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τις λέξεις Σωστό ή Λάθος

α. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

α₁. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ Μονάδες 3

α₂. $P(A - B) = P(A) - P(B)$ Μονάδες 3

β. $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$ Μονάδες 3

γ. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ Μονάδες 3

Θέμα 2^ο

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 10, 14, 12, 15, 16, 10, 12, 15, 16, 20

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο και την τυπική απόκλιση. Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \cong 2,5$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή των αθροιστικών συχνοτήτων της μεταβλητής αριθμός αδελφών από ένα δείγμα 50 μαθητών

x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$
0		10		
1		30		
2		45		
3		50		
Σύνολο				

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας Μονάδες 15

β. Εκλέγουμε τυχαία ένα μαθητή από τους πενήντα. Να βρεθεί η πιθανότητα να έχει τουλάχιστον 2 αδέρφια Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Το κόστος x μονάδων προϊόντος για μια βιομηχανία είναι $K(x) = 10x^2$ ευρώ, ενώ τα έσοδα

από την πώληση x μονάδων είναι $E(x) = 20x^2 - \frac{x^3}{3}$ ευρώ. Να βρεθούν οι x (x > 0) μονάδες

προϊόντος, ώστε η βιομηχανία να έχει το μέγιστο κέρδος και πόσο είναι αυτό το κέρδος

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Αν A και A' δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε να δείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$

Μονάδες 13

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**) κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις:

α. Αν $f_1, f_2, f_3, \dots, f_k$ είναι οι σχετικές συχνότητες μιας μεταβλητής X τότε

$$f_1 + f_2 + f_3 + \dots + f_k = 1$$

β. Η συνάρτηση $f(x) = \ln\sqrt{x}$, $x > 0$ έχει παράγωγο συνάρτηση την: $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

γ. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει πάντα $P(A) + P(B) = P(A \cup B)$

δ. Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X είναι

$$\bar{X} = n \cdot \sum_{i=1}^n t_i \quad \text{όπου } t_1, t_2, \dots, t_n \text{ είναι οι τιμές των παρατηρήσεων της μεταβλητής } X$$

Μονάδες 12

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \eta \mu x}$, $x \in A = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

A. Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$, $x \in A$

Μονάδες 12

B. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα στο A

Μονάδες 13

Θέμα 3°

Το Υπουργείο Μεταφορών έκανε δειγματοληπτικό έλεγχο σε εταιρείες μεταφορών και τα στοιχεία που προέκυψαν ως προς τον αριθμό των οχημάτων κάθε εταιρείας είναι αυτά που φαίνονται στον παρακάτω ελλειπή πίνακα συχνοτήτων

x_i	Συχνότητα (v_i)	$v_i x_i$	Σχετική Συχνότητα ($f_i\%$)	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$
1	12			
2	15			
3	8			
4	5			
5	10			
Αθροίσματα				

α. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

β. Να βρείτε τη μέση τιμή της κατανομής των οχημάτων του δείγματος

γ. Να βρείτε τη διάμεσο των οχημάτων του δείγματος

δ. Πόσες εταιρείες έχουν περισσότερα από τρία οχήματα;

ε. Να βρείτε το ποσοστό των εταιρειών που έχουν τουλάχιστον δύο οχήματα

Μονάδες 25

Θέμα 4°

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με $A \cap B \neq \emptyset$

A. Σε ένα διάγραμμα **Venn** να σημειώσετε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A - B$ και $B - A$

Μονάδες 12

B. Να δείξετε ότι: $P[(A - B) \cup (B - A)] = P(A \cup B) - P(A \cap B)$

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$ Μονάδες 10
 B. Να γράψετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

$\ln x$, $\sin x$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ Μονάδες 4

- Γ. Να γράψετε στη κόλα σας τα γράμματα της στήλης A και δίπλα τον αριθμό της στήλης B που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση Μονάδες 4

ΣΤΗΛΗ A Συνάρτηση		ΣΤΗΛΗ B Πρώτη παράγωγος		
α. $x^2 + 3$	β. $x + \sin x$	1. $1 - \eta\mu x$	2. $\frac{-x^3 + 7x^2 - 8x}{e^x}$	3. $\frac{3x^2 - 8x}{e^{2x}}$
γ. $x \eta\mu x$	δ. $\frac{x^3 - 4x^2}{e^x}$	4. $\eta\mu x - x \cos x$	5. $2x$	6. $3x^2 - 4x$
			7. $\eta\mu x + x \cos x$	

- Δ. α. Να δώσετε τον ορισμό του συντελεστή μεταβολής «CV» Μονάδες 2
 β. Πότε ένα δείγμα τιμών μιάς μεταβλητής θεωρείται ομοιογενές; Μονάδες 2
 γ. Στη περίπτωση της κανονικής κατανομής ποιο ποσοστό παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$; Μονάδες 3

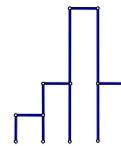
Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

- α. Να βρείτε την παράγωγό της.
 β. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της. Μονάδες 5 + 10 + 10
 γ. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης.

Θέμα 3^ο

Στο διαγώνισμα του 1^{ου} τετραμήνου στο μάθημα «Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής» η βαθμολογία των μαθητών έχει ομαδοποιηθεί σε κλάσεις και δίνεται από το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων v_i :



- α. Να μεταφέρετε στη κόλα σας και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

Μονάδες 11

Κλάσεις Βαθμολογίας	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα f_i	Αθροιστική συχνότητα N_i	Αθροιστική σχετ. συχνότητα F_i
[4, 8)					
[8, 12)					
[12, 16)					
[16, 20)					
Σύνολο					

- β. Να βρείτε τη μέση τιμή των βαθμών Μονάδες 8
 γ. Πόσοι μαθητές έχουν βαθμό μέχρι και 10 Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Από τη μελέτη του δείγματος μαθητών ηλικίας 15 ετών ως προς τη μεταβλητή X «ύψος σε cm» εκτιμήθηκε ότι περίπου το 50% των μαθητών έχουν ύψος τουλάχιστον 160 cm, ενώ το 34% αυτών έχουν ύψος μεταξύ 160 cm και 165 cm. Υποθέτουμε ότι η κατανομή του ύψους των μαθητών είναι περίπου κανονική.

- α. Να υπολογίσετε το μέσο ύψος και την τυπική απόκλιση του ύψους των μαθητών.
 β. Σε τι ποσοστό οι μαθητές έχουν ύψος μεταξύ 155cm και 170 cm.
 γ. Αν κατά την ανωτέρω μέτρηση του ύψους οι μαθητές φορούσαν παπούτσια με ύψος 3cm να βρείτε: i) το πραγματικό μέσο ύψος και ii) τον πραγματικό συντελεστή μεταβολής.

Μονάδες 8 + 7 + 5 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες :

α. Αν $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

β. Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου, τότε ισχύει η ισότητα :

$$\vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \text{προβ}_{\vec{\beta}} \vec{\alpha}$$

γ. Η ευθεία με εξίσωση $x - 2y - 3 = 0$ διέρχεται από το σημείο $M(-1, -2)$

δ. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της έχει εξίσωση $yy_1 = \rho(x + x_1)$.

ε. Η παραβολή με εστία το σημείο $E(0, 1)$ έχει εξίσωση $x^2 = 2y$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Αν για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν $\vec{\alpha} \perp (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})$ και $\vec{\beta} \perp (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$, τότε:

A. Να αποδείξετε ότι $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ Μονάδες 12

B. Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα σημεία $A(3, 4), B(-1, 2)$ και $\Gamma(5, 0)$

A. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε , που διέρχεται από το σημείο A και είναι παράλληλη στην ευθεία $B\Gamma$. Μονάδες 13

B. Αν η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο Δ , να αποδείξετε ότι $(AB\Gamma) = (\Delta B\Gamma) = 10$ τετραγωνικές μονάδες. Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + 4\lambda^2 = 0$ (1). Να αποδείξετε ότι:

A. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 8

B. Κάθε κύκλος που προκύπτει από την εξίσωση (1) εφάπτεται στον άξονα $y'y$. Μονάδες 6

Γ. Τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της. Μονάδες 7

Δ. Από το σημείο $O(0, 0)$ άγονται προς κάθε κύκλο που προκύπτει από την εξίσωση (1) δύο εφαπτόμενες. Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι:

α. Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

β. Αν $A \subseteq B$, τότε $P(A) \leq P(B)$

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν:

α. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{g'(x)}$

β. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

γ. $(x^3 - 4x^2 + 5)' = 3x^2 - 8x$

δ. $(e^x)' = x \cdot e^{x-1}$

ε. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x}{x+1}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 3

β. Να βρείτε την $f'(x)$

Μονάδες 10

γ. Να υπολογίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο $A(2, f(2))$

Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε 5 μαθήματα είναι: 8, 14, 20, 12, 16. Να υπολογίσετε

α. Τη μέση βαθμολογία του μαθητή.

Μονάδες 7

β. Τη διάμεσο

Μονάδες 4

γ. Την τυπική απόκλιση

Μονάδες 10

δ. Το εύρος

Μονάδες 4

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2a - 1, & x = 1 \end{cases}$.

A. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Μονάδες 12

B. Να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. α.** Δώστε τον ορισμό της έλλειψης με εστίες τα σημεία E' και E . Μονάδες 3
- β.** Ποια είναι η εξίσωση της έλλειψης που έχει εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$ και $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα $2a$; Ποιες τιμές παίρνει το x και ποιες το y ; Μονάδες 6
- γ.** Τι ονομάζουμε εκκεντρότητα της έλλειψης;
Πότε δύο ή περισσότερες ελλείψεις λέγονται όμοιες; Μονάδες 4
- B.** Δίνεται η υπερβολή $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$.
- α.** Να γράψετε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της. Μονάδες 2
- β.** Τι λέγεται ορθογώνιο βάσης της υπερβολής αυτής; Μονάδες 2
- γ.** Ποιες είναι οι κορυφές της υπερβολής αυτής; Μονάδες 2
- Γ. α.** Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x = -\frac{p}{2}$. Μονάδες 3
- B.** Τι λέει η ανακλαστική ιδιότητα της παραβολής; Μονάδες 3

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$. Αν $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ να βρεθούν:

- A.** $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ **B.** $\vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2$ Μονάδες 12
- Γ.** $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ **Δ.** $(-2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(3\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B(4, 4), A(1, 1)$ και $\Gamma(8, 1)$.

- A.** Να βρείτε το μέσο M της πλευράς AG . Μονάδες 5
- B.** Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM . Μονάδες 5
- Γ.** Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας AG . Μονάδες 5
- Δ.** Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BD . Μονάδες 5
- E.** Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 - |2\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|^2 = 0$ (1), όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά διανύσματα με ίσα μέτρα και η γωνία που σχηματίζουν είναι 60° .

- A.** Να αποδείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο (C), του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα. Μονάδες 9
- B.** Αν ο παραπάνω κύκλος (C) διέρχεται από το σημείο $A(1, 0)$, δείξτε ότι:
- α.** $|\vec{\alpha}| = 1$. Μονάδες 6
- β.** Η εξίσωση $2|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|x - |\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}|y + \sqrt{60} = 0$ εφάπτεται στο κύκλο (C).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω α, β, γ ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες.

α. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\beta \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid \gamma$

β. Αν $\alpha \mid \beta$, τότε $\alpha \mid \lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ

γ. Αν $\alpha \mid \beta$ και $\alpha \mid \gamma$, τότε $\alpha \mid (\beta + \gamma)$

Μονάδες 15

B. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Είναι $\vec{a} \parallel \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\lambda\vec{a} = \vec{\beta}$

β. Είναι $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ αν και μόνο αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$

γ. Ο κύκλος κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας ρ έχει εξίσωση: $x^2 + y^2 = \rho$

δ. Αν $\vec{a} = (x, y)$, τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Αν A, B, Γ και Δ είναι τέσσερα σημεία, να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $\vec{B\Gamma} + \vec{AB} = \dots$

β. $\vec{AB} - \vec{GB} = \dots$

γ. $\vec{AB} + \vec{B\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \dots$

δ. $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{\Gamma\Delta} + \vec{\Delta A} = \dots$

ε. $\vec{AB} + \vec{B\Gamma} + \vec{A\Delta} - \vec{\Gamma\Delta} = \dots$

Μονάδες 10

B. Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$, $B(6, -4)$, $\Gamma(1,5)$, $\Delta(-1,2)$

α. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{\Gamma\Delta}$

Μονάδες 10

β. Τι συμπεραίνετε για τη γωνία των διανυσμάτων \vec{AB} και $\vec{\Gamma\Delta}$;

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. Όταν έχει κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = \sqrt{2}$

β. Όταν έχει κέντρο $O(0,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(2\sqrt{2}, 1)$

γ. Όταν έχει κέντρο $K(2, -3)$ και εφάπτεται στον άξονα $y'y$

δ. Όταν έχει κέντρο $K(1,0)$ και διέρχεται από το σημείο $A(5, -3)$

ε. Όταν έχει διάμετρο το τμήμα με άκρα $A(1, -1)$ και $B(3,3)$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα σημεία $A(1,1)$ και $B(3, -1)$

α. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα A και B

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου (ϵ) του ευθύγραμμου τμήματος AB

Μονάδες 10

γ. Έστω σημείο $K(0, -2)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο K και είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι η $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ Μονάδες 10
- B. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο μη μηδενικών διανυσμάτων. Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Η παραβολή $y^2 = 2px$, έχει εστία $E(O, \frac{p}{2})$
- β. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}}\vec{\beta}$
- γ. $\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0$
- δ. Αν η εξίσωση $C: x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο, τότε έχει κέντρο το σημείο $K(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2})$
- ε. Αν η AM είναι διάμεσος σε τρίγωνο ABΓ, τότε $\overline{AM} = \frac{\overline{AB} + \overline{AG}}{2}$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Αν είναι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$, $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και τρίγωνο ABΓ με διάμεσο AM και $\overline{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$,

$$\overline{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$$

- α. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ Μονάδες 4
- β. Να εκφράσετε το \overline{AG} ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$. Μονάδες 7
- γ. Να υπολογίσετε το $|\overline{AM}|$ Μονάδες 7
- δ. Να δείξετε ότι $(\overline{AM}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{6}$ Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $(2x + y + 4) + \kappa(x - 2y - 3) = 0$

- α. Να δείξετε ότι παριστάνει ευθεία, για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7
- β. Να δείξετε ότι οι ευθείες της παραπάνω οικογένειας διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε. Μονάδες 6
- γ. Για $\kappa = 0$ να βρείτε τις τομές της ευθείας με τους άξονες $x'x$ και $y'y$. Μονάδες 6
- δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζεται από τα παραπάνω σημεία τομής και την αρχή των αξόνων. Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $C: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

- α. Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο και να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του. Μονάδες 7
- β. Να βρείτε την εξίσωση ενός νέου κύκλου ομόκεντρου του C και ο οποίος να εφάπτεται στην ευθεία $\epsilon: y = x$ Μονάδες 8
- γ. Να βρείτε την εξίσωση των παραβολών, οι οποίες περνάνε από το κοινό κέντρο των κύκλων και να τις σχεδιάσετε. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση $f(x)$ και $g(x)$ ισχύει: $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- B. Να δώσετε τους ορισμούς:
- α. Πότε μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο πεδίο ορισμού της A
- β. Διαμέσου δείγματος n παρατηρήσεων
- γ. Ασυμβίβαστων ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου.

Θέμα 2^ο

Η μέση τιμή επτά αριθμών είναι 5. Οι πέντε από αυτούς τους αριθμούς είναι οι: 5, 6, 4, 3, 11.

- A. Να βρείτε τους άλλους δυο αριθμούς, αν γνωρίζουμε ότι ο ένας είναι διπλάσιος του άλλου.
- B. Για τους 7 αριθμούς που βρήκατε να βρεθεί η διάμεσός τους.

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

- A. Βρείτε το πεδίο ορισμού της
- B. Βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$
- Γ. Σε ποια σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x + 5$.

Θέμα 4^ο

Δίνεται η f συνάρτηση με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - (2P(A) + 2)x^2 + 32P(B)x + 1$, όπου $P(A)$, $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων ενός δειγματικού χώρου Ω .

- α. Αν γνωρίζουμε ότι η f στα σημεία $(2, f(2))$, $(4, f(4))$ παρουσιάζει ακρότατα, τότε
- $$P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(B) = \frac{1}{4}$$
- β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία της και τα ακρότατα, για τις παραπάνω τιμές των $P(A)$ και $P(B)$
- γ. Εξετάστε αν τα A και B είναι ασυμβίβαστα, αν γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) \leq \frac{5}{8}$
- δ. Με δεδομένη τη συνθήκη του iii) ερωτήματος, αποδείξτε ότι: $\frac{1}{8} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{4}$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = 1.$$

Μονάδες 10

Β. Ποια από τα παρακάτω μεγέθη είναι μέτρα θέσης και ποια είναι μέτρα διασποράς;

α. Διάμεσος

β. Διακύμανση

γ. Μέση τιμή

δ. Τυπική απόκλιση

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.

α. Η διακύμανση και η τυπική απόκλιση έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\eta \mu x)' = \sigma \upsilon \nu x$.

β. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$.

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Η γραπτή βαθμολογία ενός μαθητή σε δέκα μαθήματα είναι η ακόλουθη:

10	14	12	13	15	16	11	17	19	13
----	----	----	----	----	----	----	----	----	----

α. Να βρεθεί η μέση βαθμολογία.

Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η διάμεσος.

Μονάδες 8

γ. Αν τα πρώτα τέσσερα μαθήματα με τη σειρά που δίνονται στον πίνακα, έχουν συντελεστή στάθμισης 2, ενώ τα υπόλοιπα έξι έχουν 1, ποια είναι η μέση τιμή;

Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + x^2 \cdot e^{-x}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

Μονάδες 6

β. Να βρεθεί η f' καθώς και το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη 0.

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και η συνάρτηση

$$f(x) = -4x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 2x + \frac{11}{32}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο $x_1 = P(A)$ τοπικό ελάχιστο ίσο με $P(A \cap B)$ και στο $x_2 = P(B)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

α. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις πιθανότητες:

i. $P(A \cup B)$

ii. $P(A - B)$

iii. $P[(A - B) \cup (B - A)]$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε με τη βοήθεια του ορισμού μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $(x)' = 1$ Μονάδες 12
- B.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων. Μονάδες 7
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1.
- β.** Για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει: $f(g(x))' = f'(g(x))g'(x)$.
- γ.** Δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα ή ξένα μεταξύ τους, όταν $A \cap B = \emptyset$. Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^3 - 3x + 2008$

- A.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x+1}$ Μονάδες 15 + 10

Θέμα 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B του δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{2}{3}$

και $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$. Να βρεθούν οι πιθανότητες:

- α.** $P(B)$ Μονάδες 5
- β.** $P(A \cup B)$ Μονάδες 10
- γ.** $P(B - A)$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας που περιέχει τις απαντήσεις 50 οικογενειών για τον αριθμό των παιδιών τους:

Αριθμός παιδιών x_i	Οικογένειες Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	f_i %	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική α-θροιστική συχνότητα F_i	F_i %
0	5					
1	10					
2	15					
3	8					
4	5					
5	4					
6	3					
Σύνολα	50					

- A.** Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα σας παρουσιάζοντας τους υπολογισμούς σας. Μονάδες 15
- B.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο των παρατηρήσεων. Μονάδες 5
- Γ.** Να υπολογίσετε την πιθανότητα η οικογένεια να έχει τουλάχιστον 3 παιδιά. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης A με την παράγωγό της στη στήλη .

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
A. $2x^3 - 6x$	1. $\ln x + 1$
B. $x \cdot \sin x$	2. $\frac{1 - \ln x}{x^2}$
Γ. $x \cdot \ln x$	3. $\sin x - x \cos x$
Δ. $\eta \mu x^2$	4. $6x^2 - 6$
E. $\frac{\ln x}{x}$	5. $2 \eta \mu x$
	6. $2x \cdot \sin x^2$
	7. $\frac{\ln x}{x^2}$

ΣΤΗΛΗ A	A	B	Γ	Δ	E
ΣΤΗΛΗ B					

Μονάδες 15

B. Να δείξετε ότι για δυο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

- α.** Να ευρεθεί η παράγωγος της $f'(x)$.
- β.** Να ευρεθούν οι τιμές της x για τις οποίες $f'(x) = 0$.
- γ.** Να ευρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της f .
- δ.** Να ευρεθούν οι θέσεις ακροτάτων της f και οι τιμές τους.

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε 5 μαθήματα είναι 18, 15, 17, 14, 16. Να ευρεθούν :

- α.** Το εύρος του δείγματος
- β.** Η διάμεσος
- γ.** Η διακύμανση
- δ.** Η τυπική απόκλιση

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει αγγλικά, το 30% γαλλικά και το 20% και τις δυο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να μη μαθαίνει καμιά από τις δυο γλώσσες.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 10

B. Αντιστοιχίστε την κάθε συνάρτηση στην παράγωγο της.

α. $f(x) = c$ 1. $\frac{1}{x}$

β. $f(x) = x^p$ 2. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

γ. $f(x) = \sqrt{x}$ 3. 0

δ. $f(x) = \sin x$ 4. $\rho \cdot x^{\rho-1}$

ε. $f(x) = \ln x$ 5. -ημx

Μονάδες 5

Γ. Χαρακτηρίστε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Το εύρος είναι μέτρο θέσης.

β. Η τυπική απόκλιση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

γ. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση των ποσοτικών μεταβλητών.

δ. Έστω μια μεταβλητή X που παίρνει τις τιμές x_1, x_2, \dots, x_n . Αν η διάμεσος δ δεν είναι κάποια από τις τιμές αυτές τότε το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.

ε. Αν μια μεταβλητή έχει μέση τιμή $\bar{x} = -10$ και τυπική απόκλιση $S = 2$ τότε ο συντελεστής μεταβολής της είναι $CV = 20\%$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Η μέση τιμή και η διάμεσος πέντε αριθμών είναι το 2. Οι τρεις από τούς είναι οι:

- 2, 7, 3. Να βρείτε τους άλλους αριθμούς.

Μονάδες 13

B. Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι : 18, 15, 17, 14, 16. Να βρείτε:

α. Το εύρος (R) του δείγματος.

β. Τη διακύμανση (S^2) του δείγματος.

γ. Τη τυπική απόκλιση (S) του δείγματος

δ. Τον συντελεστή μεταβολής (CV) του δείγματος.

Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$

A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.

Μονάδες 7

B. Να βρεθεί η παράγωγος της f.

Μονάδες 10

Γ. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x = 2$

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός Λυκείου το 55 % είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30 % είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε ένα καθηγητή για να εκπροσωπήσει τον σύλλογο σε κάποια Επιτροπή. Να βρεθούν οι πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

α. Γυναίκα ή φιλόλογος

β. Γυναίκα και όχι φιλόλογος

γ. Άνδρας και φιλόλογος

δ. Άνδρας ή φιλόλογος

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$
Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις.

α. Η διάμεσος είναι μέτρο θέσης. Σ Λ

β. Σε ένα δείγμα τιμών μίας οιασδήποτε μεταβλητής X το εύρος ορίζεται από τη σχέση: R = μεγαλύτερη παρατήρηση + μικρότερη παρατήρηση. Σ Λ

γ. Αν A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε
 $0 \leq P(A \cup B) \leq P(\Omega)$. Σ Λ

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$. Σ Λ

ε. Αν το ενδεχόμενο A', συμπληρωματικό του A πραγματοποιείται τότε δεν πραγματοποιείται το A. Σ Λ

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$ Να βρείτε:

A. Το πεδίο ορισμού της f(x) Μονάδες 10

B. Το $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$. Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:
10, 4, 6, 5, 14, 15, 11, 12, 10, 13. Να βρείτε:

α. Την μέση τιμή Μονάδες 7

β. Τη διάμεσο Μονάδες 3

γ. Το εύρος Μονάδες 3

δ. Την διακύμανση Μονάδες 8

ε. Την τυπική απόκλιση Μονάδες 4

Σημείωση: Δίνεται ότι $\sqrt{13,2} \approx 3,6$

Θέμα 4^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι:

$P(A) = \frac{1}{5}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ Να βρεθούν:

α. $P(B')$ Μονάδες 8

β. $P(A \cup B)$ Μονάδες 8

γ. $P(A - B)$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδειχτεί ότι: $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, $c \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10
- B.** Να συμπληρωθούν οι εκφράσεις:
- α.** Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f
- β.** Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά ορίζεται ως η....., όταν το n είναι περιττός αριθμός ή....., όταν το n είναι άρτιος αριθμός.
- Γ.** Να συμπληρωθούν οι σχέσεις ώστε να γίνουν σωστές:
- α.** Αν $A \cap B \neq \emptyset$ τότε $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$
- β.** $P(A^c) = \dots\dots\dots$
- γ.** $P(A - B) = \dots\dots\dots$ Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Να βρείτε τα όρια των συναρτήσεων:

- α.** $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4x + 5) =$
- β.** $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{3(x - 2)} =$
- γ.** $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2}{x^2 + 1} =$
- δ.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} =$
- ε.** $\lim_{x \rightarrow 0} [(x + 1) \sin x] =$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι 14, 11, 16, 19, 15.

- α.** Να βρείτε τη μέση επίδοση και τη διάμεσο Μονάδες 10
- β.** Αν τα μαθήματα είχαν συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3 αντίστοιχα, ποια θα ήταν η μέση επίδοση; Σε ποια μαθήματα έπρεπε να δώσει ιδιαίτερη προσοχή ο μαθητής; Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Ένα κουτί περιέχει μπάλες: 10 άσπρες, 15 μαύρες, 5 κόκκινες και 10 πράσινες. Παίρνουμε τυχαίως μια μπάλα. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων η μπάλα να είναι:

- α.** μαύρη Μονάδες 5
- β.** άσπρη ή μαύρη Μονάδες 10
- γ.** ούτε κόκκινη ούτε πράσινη Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ Μονάδες 10

B. Πότε δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα; Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό ή Λάθος

α. Η βαθμολογία στο σκάκι είναι μία ποιοτική μεταβλητή

β. Η σχετική συχνότητα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές

γ. Η διάμεσος επηρεάζεται από ακραίες τιμές

δ. Η διακύμανση S^2 είναι ένα μέτρο διασποράς των παρατηρήσεων

ε. Ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος τύχης, λέγεται βέβαιο ενδεχόμενο
Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν: 11, 10, 7, 15, 3, 13, 12, 4, 11, 14. Να υπολογίσετε:

α. τη μέση τιμή \bar{x} και τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων Μονάδες 11

β. την τυπική απόκλιση S και το συντελεστή μεταβολής CV Μονάδες 14

Θέμα 3^ο

Το 50 % των παρατηρήσεων μιας κανονικής κατανομής είναι πάνω από 12 και η διασπορά είναι 9. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή:

α. κάτω από 9 Μονάδες 10

β. μεταξύ 9 και 18 Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) = \frac{2}{3}$ και $P(B) = \frac{1}{4}$. Να απο-

δείξετε ότι:

α. $\frac{2}{3} \leq P(A \cup B) \leq \frac{11}{12}$ Μονάδες 10

β. $\frac{5}{12} \leq P(A - B) \leq \frac{2}{3}$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. α. Ας υποθέσουμε ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής x , που αφορά στα άτομα ενός δείγματος μεγέθους v , $k \leq v$.

i. Να γράψετε τι ονομάζουμε (απόλυτη) συχνότητα v_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

ii. Να γράψετε τι ονομάζουμε σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i , $i = 1, 2, \dots, k$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι ισχύουν: **i.** $0 \leq f_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, k$ και **ii.** $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

Μονάδες 4 + 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$. Μονάδες 2

β. Ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$, $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 2

γ. Ισχύει: $(\sqrt{2})' = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ Μονάδες 2

δ. Αν $A \subseteq \Omega$, τότε $P(A) + P(A') = 1$ Μονάδες 2

ε. Αν $A \subseteq \Omega$ και $B \subseteq \Omega$ με $P(A) = P(B)$, τότε πάντοτε $A = B$. Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής συχνοτήτων μιας συνεχούς μεταβλητής.

Κλάσεις -)	Κεντρικές τιμές x_i	Συχνότητες v_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Συχνότητα f_i %	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i %
[0 - 4)				10	
[4 - 8)			15		
	10				60
[12 - 16)					
	18	15			
Σύνολο		$v = 50$			

α. Να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον πίνακα που δόθηκε. Μονάδες 18

β. Να σχεδιάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 5x + 6$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x + 1}$ Μονάδες 5

β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 10

γ. Να προσδιορίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Έστω ότι $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης με:

$$P(0) = P(2) = P(4) = \frac{2}{3} P(1) \text{ και } P(1) = P(3) = P(5).$$

A. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A = \{0, 1, 3\}$, $B = \{1, 2, 5\}$, $A - B$, $A' \cap B$.

B. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{\kappa}{2}x + x + 2008$

α. Να προσδιορίσετε την $f'(x)$

β. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχόμενου $\Gamma = \{\kappa \in \Omega \mid f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\}$

Μονάδες 12 + 5 + 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι για δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με **(Σ)**, αν είναι αληθείς ή με **(Λ)**, αν είναι ψευδείς:
- α.** $(\sin x)' = \eta \mu x$
- β.** $(\ln x)' = -\frac{1}{x}$
- γ.** $P(A) \geq 1$
- δ.** Αν $f'(x_0) = 0$, η συνάρτηση f έχει στο x_0 τοπικά ακρότατα.

Θέμα 2^ο

- α.** Να μελετήσετε την μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 5x^2$ και να βρείτε τα ακρότατα της αν υπάρχουν.
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

Θέμα 3^ο

Οι τιμές των παρατηρήσεων ενός δείγματος είναι: 8, 10, 3, 2, 8, 8, 16, 16, 4, 5. Να γίνει ο πίνακας και το πολύγωνο συχνοτήτων.

Θέμα 4^ο

Για τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και

$P(A \cap B) = \frac{1}{3}$. Να βρείτε:

- α.** Την $P(B)$
- β.** Την $P(A \cup B)'$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο του,

να αποδειχθεί ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$.

Μονάδες 13

β. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

i. $f_1(x) = 3x^2$

ii. $f_2(x) = \ln x$

iii. $f_3(x) = \sin x$

iv. $f_4(x) = \frac{1}{x}$

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Οι τιμές μιας παρατήρησης είναι: 2, 4, 1, 5, 7, 2, 6, α , με μέση τιμή $\bar{x} = 4$. Να βρεθεί :

α. Η τιμή του α .

Μονάδες 15

β. Η διάμεσος τους και το εύρος αν $\alpha = 5$.

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Τα A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , για τα οποία γνωρίζουμε ότι οι $P(A)$, $P(A \cup B)$ είναι ρίζες της $8x^2 - 6x + 1 = 0$ και η $P(B') = 2P(B)$.

α. Να δειχθεί ότι : $P(A) = \frac{1}{4}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 13

β. Να βρεθούν οι $P(B)$ και $P(A \cap B)$

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της και η $f'(x)$

Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης στο $(1, f(1))$

Μονάδες 7

γ. Να υπολογισθεί η μονοτονία και τα ακρότατα της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$. Μονάδες 15
- B.** Για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν η πρόταση είναι σωστή, ή (Λ) αν αυτή είναι λανθασμένη.
- α.** Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική ή περίπου κανονική, τότε το εύρος R είναι περίπου ίσο με την τυπική απόκλιση s .
- β.** Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης που επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις.
- γ.** Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.
- δ.** Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης ονομάζεται δειγματικός χώρος.
- 5.** Η παράγωγος της συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

- α.** Να βρεθεί η $f'(x)$ Μονάδες 5
- β.** Να λυθεί η εξίσωση: $f''(x) + f'(x) + f(x) = 0$ Μονάδες 10
- γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στο σημείο της $O(0, f(0))$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Ο αριθμός των απουσιών 50 μαθητών της Γ' Λυκείου κατά τη διάρκεια της τελευταίας εβδομάδας του διδακτικού έτους, δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός απουσιών x_i	Αριθμός μαθητών v_i	$x_i \cdot v_i$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
0	5			
1	10			
2	15			
3	20			
Σύνολο				

- α.** Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένο τον παραπάνω πίνακα Μονάδες 17
- β.** Να βρείτε την τυπική απόκλιση s . Μονάδες 4
- γ.** Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές. Μονάδες 4

Θέμα 4^ο

Δίνονται τέσσερις τιμές ενός δείγματος: $x + 2$, $7 - 4x^2$, $3x + 2$, $4x + 1$ με $x \in \mathbb{R}$

- α.** Να δείξετε ότι η μέση τιμή τους ως συνάρτηση του x , είναι $3 + 2x - x^2$ Μονάδες 8
- β.** Να βρεθεί η μέγιστη μέση τιμή. Μονάδες 12
- γ.** Για $x = 1$, να βρεθεί η πιθανότητα, αν επιλέξουμε τυχαία μια τιμή, αυτή να είναι 5. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $\varepsilon: xx_1 + yy_1 = \rho^2$ Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- α.** Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ ισχύει: $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$
- β.** Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2$
- γ.** Αν $\vec{a} \not\parallel \vec{b}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- δ.** Η εκκεντρότητα της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ είναι $\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha}$ όπου $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$
- ε.** Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x'x$ Μονάδες $2 \times 5 = 10$

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(4, 3)$, $B(0, 6)$ και $\Gamma(2, 2)$.

- α.** Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ Μονάδες 10
- β.** Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το A που εφάπτεται στην πλευρά $B\Gamma$ Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} με $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = 1$

- α.** Να δείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$ Μονάδες 10
- β.** Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{(\vec{a} - \vec{b}, \vec{b})}$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι κύκλοι $C_1: (x + 3)^2 + y^2 = 1$ και $C_2: x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

- α.** Να βρείτε τα κέντρα K, Λ και τις ακτίνες ρ_1, ρ_2 των κύκλων C_1, C_2 αντιστοίχως και να δείξετε ότι εφάπτονται εξωτερικά Μονάδες 8
- β.** Να βρείτε τις εφαπτόμενες της παραβολής C με εστία το σημείο Λ , που διέρχονται από το σημείο K Μονάδες 10
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία κινούνται τα σημεία M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(M\Lambda) + (MK) = 10$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A.** Να δώσετε τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A. Μονάδες 4
- B.** Να αποδείξετε ότι $P(A') = 1 - P(A)$, όπου A, A' συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Μονάδες 8
- Γ.** Να συμπληρώσετε τις αριθμητικές τιμές που παίρνουν οι πιθανότητες:
 $P(\Omega) = \dots\dots\dots$, $P(\emptyset) = \dots\dots\dots$, όπου Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης.
Μονάδες 3
- Δ.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (**Σ**) ή λανθασμένη (**Λ**) καθεμία από τις προτάσεις που ακολουθούν:
- α.** Η διακύμανση ή διασπορά των τιμών μιας μεταβλητής X είναι μέτρο θέσης.
- β.** Ισχύει ο τύπος $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ με $x > 0$.
- γ.** Οι τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.
- δ.** Ισχύει ο τύπος $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$.
- ε.** Η μέση τιμή επηρεάζεται από ακραίες παρατηρήσεις. Μονάδες 10

Θέμα 2°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

- α.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και την παράγωγο της $f'(x)$ Μονάδες 8
- β.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 12
- γ.** Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \cdot f'(x)}$ Μονάδες 5

Θέμα 3°

Οι βαθμοί των μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών και στοιχείων Στατιστικής της Γ' τάξης ενός Λυκείου ακολουθούν κανονική κατανομή. Το 50% των μαθητών έγραψε τουλάχιστον 13, ενώ το 34% από 13 έως 14.

- α.** Να βρείτε τη διάμεσο δ, τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s των βαθμών των μαθητών. Μονάδες 12
- β.** Αν 95 μαθητές της τάξης αυτής έγραψαν από 11 έως 13 τότε να βρείτε :
- i.** το πλήθος των μαθητών της τάξης,
- ii.** το πλήθος των μαθητών που έγραψαν από 14 έως 15 στο διαγώνισμα αυτό. Μονάδες 6 + 7

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - s x^2 + 2 x + \bar{x}$, όπου \bar{x} η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση ενός δείγματος n παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X. Αν στο σημείο M(1, 5) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f η εφαπτομένη σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x'x:

- α.** Να βρείτε τη μέση τιμή \bar{x} και την τυπική απόκλιση s του δείγματος. Μονάδες 15
- β.** Αν $\bar{x} = 4$ και $s = 2$, τότε :
- i.** Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές. Μονάδες 4
- ii.** Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της παραγώγου της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$. Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. Ισχύει $(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$

β. Για κάθε x πραγματικό ισχύει $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

γ. Η παράγωγος συνάρτησης f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x

δ. Οι ποιοτικές μεταβλητές x παίρνουν οποιεσδήποτε τιμές ενός διαστήματος πραγματικών αριθμών (α, β)

ε. Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση ποιοτικών και ποσοτικών δεδομένων

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-\mu x}$, $\mu \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθούν οι $f'(x)$ και $f''(x)$

Μονάδες 12

β. Να λυθεί η εξίσωση: $f''(x) + 4f'(x) + 3f(x) = 0$

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Μονάδες 5

β. Να βρεθεί η πρώτη παράγωγός της

Μονάδες 7

γ. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της

Μονάδες 9

δ. Να βρεθούν τα ακρότατά της

Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι παρακάτω τιμές μιας μεταβλητής X : 3, 5, 8, 8, 10, 11, 13, 9, 9, 4. Να υπολογίσετε:

α. τη διάμεσο

β. τη μέση τιμή

γ. τη διασπορά

δ. την τυπική απόκλιση

ε. το συντελεστή μεταβολής

Μονάδες 5×5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ (όπου x πραγματικός αριθμός) είναι ίση με 0, δηλαδή $(c)' = 0$ Μονάδες 8
- B.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όπου n είναι περιττός αριθμός. Μονάδες 7
- Γ.** Να γράψετε στο τετράδιό σας τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:
- ♦ $f_1(x) = e^x$, όπου x πραγματικός
 - ♦ $f_2(x) = \sin x$, όπου x πραγματικός
 - ♦ $f_3(x) = \ln x$, όπου $x > 0$
 - ♦ $f_4(x) = \sqrt{x}$, όπου $x > 0$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 7$, όπου x πραγματικός αριθμός.

- α.** Να βρείτε της $f'(x)$ Μονάδες 5
- β.** Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος είναι 0 Μονάδες 12
- γ.** Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας τον πίνακα των τιμών της μεταβλητής X σωστά συμπληρωμένο.

Τιμές Μεταβλητής x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	$x_i \cdot v_i$
1	4			
2			14	
3				
Σύνολο	$v = 20$	1		

- B.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή. Μονάδες 16
- Γ.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο. Μονάδες 4
- Δ.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο. Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$

A. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο:

- α.** \mathbb{R}
- β.** $(-1, 1)$
- γ.** $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- δ.** $(1, +\infty)$ Μονάδες 7
- B.** Να αποδείξετε ότι $f'(x) < 0$ για κάθε x του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 10
- Γ.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -1} [(x+1) \cdot f(x)]$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω A, B δύο τυχαία ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω .

- α. Πότε τα ενδεχόμενα A, B λέγονται ασυμβίβαστα; Μονάδες 3
- β. Να εξετάσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας με ένα διάγραμμα Venn αν τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $(A \cup B)'$ είναι ασυμβίβαστα. Μονάδες 4
- γ. Να δείξετε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Μονάδες 10
- Β. Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:
- α. Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι k τιμές μίας μεταβλητής X τότε $v_1 f_1 + v_2 f_2 + \dots + v_k f_k = v \cdot \bar{x}$.
- β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(\sin x)' + \eta \mu x = 0$.
- γ. Αν A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω τότε πάντα $P(A' \cap B) + P(A \cap B') = 1$.
- δ. Αν τις τιμές μίας μεταβλητής X τις πολλαπλασιάσουμε με μία σταθερά $c > 0$, τότε και ο συντελεστής μεταβολής (CV) πολλαπλασιάζεται με τη σταθερά c .

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μονάδες 9
- β. Να δείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$. Μονάδες 7
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Το 30 % των μαθητών ενός σχολείου ακούει ελληνική και όχι ξένη μουσική, το 20 % των μαθητών ακούει ξένη και όχι ελληνική, ενώ το 40 % ακούει και τις δύο. Επιλέγοντας τυχαία ένα μαθητή να βρείτε την πιθανότητα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- α. Ο μαθητής να ακούει ελληνική ή ξένη μουσική. Μονάδες 13
- β. Ο μαθητής να ακούει μόνο ελληνική ή μόνο ξένη μουσική. Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Σ' ένα διαγώνισμα σε τάξη των 20 μαθητών η βαθμολογία κυμάνθηκε από 4 έως 20. Κάτω από 12 πήραν 8 μαθητές, τουλάχιστον 8 πήραν 18 μαθητές και από 16 και πάνω πήραν 5 μαθητές.

- α. Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
- β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την διακύμανση του δείγματος.
- γ. Αν $\sqrt{14,2} \approx 3,8$ να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9 + 9 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω A, B δύο τυχαία ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω .

- α.** Πότε τα ενδεχόμενα A, B λέγονται ασυμβίβαστα; Μονάδες 3
- β.** Να εξετάσετε δικαιολογώντας την απάντησή σας με ένα διάγραμμα Venn αν τα ενδεχόμενα $A \cap B$ και $(A \cup B)'$ είναι ασυμβίβαστα. Μονάδες 4
- γ.** Να δείξετε ότι $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Μονάδες 10
- B.** Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:
- α.** Αν x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι k τιμές μίας μεταβλητής X τότε $v_1 f_1 + v_2 f_2 + \dots + v_k f_k = v \cdot \bar{x}$. Μονάδες 8
- β.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $(\sin x)' + \eta \mu x = 0$.
- γ.** Αν A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω τότε πάντα $P(A' \cap B) + P(A \cap B') = 1$.
- δ.** Αν τις τιμές μίας μεταβλητής X τις πολλαπλασιάσουμε με μία σταθερά $c > 0$, τότε και ο συντελεστής μεταβολής (CV) πολλαπλασιάζεται με τη σταθερά c .

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- α.** Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. Μονάδες 9
- β.** Να δείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$. Μονάδες 7
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Το 30 % των μαθητών ενός σχολείου ακούει ελληνική και όχι ξένη μουσική, το 20 % των μαθητών ακούει ξένη και όχι ελληνική, ενώ το 40 % ακούει και τις δύο. Επιλέγοντας τυχαία ένα μαθητή να βρείτε την πιθανότητα:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

- α.** Ο μαθητής να ακούει ελληνική ή ξένη μουσική. Μονάδες 13
- β.** Ο μαθητής να ακούει μόνο ελληνική ή μόνο ξένη μουσική. Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Σ' ένα διαγώνισμα σε τάξη των 20 μαθητών η βαθμολογία κυμάνθηκε από 4 έως 20. Κάτω από 12 πήραν 8 μαθητές, τουλάχιστον 8 πήραν 18 μαθητές και από 16 και πάνω πήραν 5 μαθητές.

- α.** Να κατασκευάσετε πίνακα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων.
- β.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την διακύμανση του δείγματος.
- γ.** Αν $\sqrt{14,2} \approx 3,8$ να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 9 + 9 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x$, έχει παράγωγο την $f'(x) = 1$
Μονάδες 13
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση
- α.** Οι ποιοτικές μεταβλητές χωρίζονται σε συνεχείς και σε διακριτές
- β.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποσοτικών δεδομένων
- γ.** Η συχνότητα v_i μιας μεταβλητής x_i είναι ανάμεσα στο 0 και 1
- δ.** Αν το ενδεχόμενο A' συμπληρωματικό του ενδεχομένου A πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A
- ε.** Δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ασυμβίβαστα όταν δεν έχουν κοινά στοιχεία
- στ.** Αν $A \subseteq B$ τότε: $P(A) \leq P(B)$
Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Έστω δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθانا απλά ενδεχόμενα και A, B υποσύνολα του Ω διάφορα του κενού, για τα οποία ισχύει ότι: $P(B) = 0,5$, $P(A \cap B) = 0,2$ και $P(A - B) = 0,4$

- α.** Να υπολογιστούν οι $P(A)$ και $P(A \cup B)$
Μονάδες 15
- β.** Αν ο δειγματικός χώρος έχει 30 στοιχεία να βρεθεί πόσα στοιχεία έχουν τα ενδεχόμενα A και B
Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Για την εκλογή του πενταμελούς στο Γ_1 τμήμα ήταν υποψήφιοι: Η Ευτυχία (Ε), η Κασσιανή (Κ), ο Τάσος (Τ), ο Στέλιος (Σ) και η Βανέσα (Β). Υποθέτοντας ότι ο κάθε μαθητής ψήφισε μόνο έναν υποψήφιο, είχαμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Ε	Τ	Κ	Ε	Τ	Κ	Τ	Σ	Κ	Τ
Τ	Σ	Β	Τ	Σ	Τ	Ε	Τ	Β	Ε

- α.** Να γίνει διαλογή
Μονάδες 5
- β.** Να κάνετε πίνακα συχνοτήτων
Μονάδες 5
- γ.** Να κάνετε πίνακα σχετικών συχνοτήτων
Μονάδες 10
- δ.** Να κάνετε πίνακα σχετικών επί της εκατό συχνοτήτων
Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x$. Να βρεθεί:

- α.** Το πεδίο ορισμού της
Μονάδες 3
- β.** Η παράγωγός της
Μονάδες 3
- γ.** Η μονοτονία και τα ακρότατά της
Μονάδες 9
- δ.** Να βρείτε την εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στη θέση του ακροτάτου
Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$, (όπου $x \in \mathbb{R}$) είναι ίση με 1, δηλαδή $(x)' = 1$. Μονάδες 10

B. Να συμπληρωθούν οι ισότητες:

α. $(f(x) \cdot g(x))' =$

β. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

γ. $(e^x)' =$

δ. $(\ln x)' =$

ε. $(\eta \mu x)' =$ Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Σε μια τάξη σχολείου υπάρχουν 8 αγόρια και 12 κορίτσια. Από τα αγόρια το $\frac{1}{4}$ και από τα

κορίτσια το $\frac{1}{3}$ έχουν μαύρα μάτια. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από την τάξη. Να βρείτε

τις πιθανότητες

α. Να είναι κορίτσι. Μονάδες 5

β. Να έχει μαύρα μάτια. Μονάδες 5

γ. Να είναι αγόρι και να μην έχει μαύρα μάτια. Μονάδες 7

δ. Να είναι κορίτσι ή να μην έχει μαύρα μάτια. Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας

x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	F_i
-1			4	0,1
0		30		
2				
3	6			
Σύνολο	40			

Μονάδες 13

β. Να βρεθεί η μέση τιμή Μονάδες 8

γ. Να βρεθεί η διάμεσος Μονάδες 4

Θέμα 4^ο

Η μέση τιμή μιας κανονικής κατανομής είναι 20 και η τυπική απόκλιση 4. Ποιο ποσοστό παρατηρήσεων είναι:

α. πάνω από 28

β. κάτω από 16.

γ. μεταξύ 16 και 28

δ. τουλάχιστον 12

ε. το πολύ 12 ή τουλάχιστον 24 Μονάδες 25.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες, να αποδείξετε ότι: $F'(x) = f'(x) + g'(x)$. Μονάδες 10

B. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).

- α.** Η διακύμανση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις παρατηρήσεις.
- β.** Στην κανονική κατανομή το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.
- γ.** Δύο ενδεχόμενα A, B του δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.

δ. Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι $CV = \frac{S}{|\bar{x}|}$ και εκφράζει τη μεταβλητότητα απαλλαγμένη από την επίδραση της μέσης τιμής \bar{x} .

ε. Αν $f(x) = \sin x$ τότε $f'(x) = \eta \mu x$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Η εξέταση ενός δείγματος 20 υπαλλήλων μιας επιχείρησης ως προς τον αριθμό των ημερών που αυτοί απουσίασαν κατά τον μήνα Δεκέμβριο, έδωσε τις εξής παρατηρήσεις: 0, 1, 1, 3, 0, 0, 2, 4, 0, 1, 1, 2, 0, 1, 3, 0, 0, 0, 0, 0

Ημέρες απουσίας x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα f_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα F_i
0				
1				
2				
3				
4				
Σύνολο				

- α.** Να συμπληρώσετε τα στοιχεία που λείπουν από τον πίνακα.
- β.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των παρατηρήσεων.
- γ.** Να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.
- δ.** Πόσοι υπάλληλοι έχουν τουλάχιστον 3 ημέρες απουσίας. Μονάδες 10 + 6 + 6 + 3

Θέμα 3^ο

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους 120 μαθητές ενός Λυκείου. Η πιθανότητα αυτός να συμμετέχει στη Θεατρική ομάδα του σχολείου είναι $1/8$, ενώ η πιθανότητα να συμμετέχει στη Χορωδία του σχολείου είναι $1/5$.

- A.** Να βρεθεί από πόσα άτομα αποτελείται η Θεατρική ομάδα και από πόσα η Χορωδία.
- B.** Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η πιθανότητα, ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία, να συμμετέχει σε μια τουλάχιστον από τις δύο αυτές καλλιτεχνικές εκφράσεις είναι $9/40$, να βρεθεί:
 - α.** Η πιθανότητα ένας μαθητής που επιλέγεται τυχαία να συμμετέχει και στη Χορωδία και στη Θεατρική ομάδα.
 - β.** Το πλήθος των μαθητών που συμμετέχουν μόνο στη Θεατρική ομάδα. Μονάδες 9 + 16

Θέμα 4^ο

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A) \leq P(B)$ και τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{12}x^2 + \frac{1}{3}x + 2007$, $x \in \mathbb{R}$ και $P(A), P(B)$ είναι οι τιμές του x που η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα.

- A.** Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$.
- B.** Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα.
- Γ.** Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $P(A-B) = \frac{1}{10}$, να υπολογίσετε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:
 - α.** $(B \cup A)'$ **β.** $(A - B) \cup (B - A)$ Μονάδες 10 + 5 + 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Μονάδες 15

β. Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

i. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

ii. $A \subseteq B \Rightarrow P(A) > P(B)$

iii. $CV = \frac{\bar{x}}{5}$

iv. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

v. Σε μια κανονική κατανομή ισχύει : $\delta = \bar{x}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x + 3$, $x \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης (λ) της ευθείας που εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A(3, f(3))

Μονάδες 10

β. Να μελετήσετε την συνάρτηση f(x) ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύνολο των παρατηρήσεων : 5, 3, 3λ, 3, 2λ, 3, 3λ, λ. $\lambda > 0$

A. Αν $\bar{x} = 4$ να βρεθεί ο λ.

Μονάδες 10

B. Για $\lambda = 2$ να βρεθούν:

α. Η διάμεσος

β. Η τυπική απόκλιση

γ. Ο συντελεστής μεταβολής CV

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Έστω τα ενδεχόμενα A, B $\subseteq \Omega$ για τα οποία ισχύουν:

$$P(A - B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{20} \text{ και } P(B' - A) = \frac{1}{2}$$

α. Να βρεθεί η P(A)

Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = \frac{1}{4}$

Μονάδες 10

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα A και B.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχθεί ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$.

Μονάδες 15

B. Να σημειώσετε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος.

1. $(\sin x)' = -\sin x$
2. $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$
3. Το βάρος ενός μαθητή είναι ποιοτική μεταβλητή.
4. Η μέση τιμή ενός δείγματος είναι μέτρο διασποράς.
5. Η σχετική συχνότητα f_i παίρνει τιμές $0 \leq f_i \leq 1$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να βρεθούν τα όρια :

α. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

β. $\lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 - 3x + 5)$

Μονάδες 10

B. Να βρεθούν οι παράγωγοι :

α. $(x^3 - 2x + 4)'$

β. $(e^x)'$

γ. $\left(\frac{x+1}{\eta\mu x} \right)'$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Ρωτήθηκαν 20 φοιτητές για τον βαθμό τους στα Μαθηματικά.

Οι απαντήσεις ήταν :

4 4 4 5 5 5 5 5 5 6 6 6 6 7 7 7 8 8 9 10

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα :

Μονάδες 20

x_i	v_i	N_i	$f_i \%$	$F_i \%$	$x_i v_i$
4					
5					
6					
7					
8					
9					
10					
Σύνολο					

β. Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{\chi}$ της βαθμολογίας των μαθητών.

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 - 2\chi + 5, \chi \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθεί η $f'(\chi)$

Μονάδες 15

β. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις, να αποδείξετε ότι:

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$$

Μονάδες 9

B. Να συμπληρώσετε τους παρακάτω τύπους:

α. $(\ln x)' = \dots \quad x > 0$ **β.** $(\sqrt{x})' = \dots \quad x > 0$ **γ.** $(f(x)g(x))' = \dots$ **δ.** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dots$

Μονάδες 8

Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε μια σχέση μεταξύ ενδεχομένων ενός πειράματος τύχης της στήλης I με τη διατύπωσή τους στη γλώσσα των συνόλων της στήλης II

Στήλη I	Στήλη II
A. Πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A και B	1. $A' \cap B$
B. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B	2. $A \cap B$
Γ. Πραγματοποιείται το B αλλά όχι το A	3. $A \cup B$
Δ. Πραγματοποιούνται τα A και B συγχρόνως	4. $(A \cup B)'$

Θέμα 2^ο

Μονάδες 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(x^2 - 3x + 2)e^x}{x - 1}$

α. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ Μονάδες 5 **β.** Να βρείτε την $f'(x)$ Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$ Μονάδες 5

δ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Ο παρακάτω πίνακας μας δίνει τη βαθμολογία των μαθητών μιας τάξης σε ένα μάθημα

Κλάσεις	Κεντρική Τιμή x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $fi\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $Fi\%$
[1–6)		10	20		
[6–11)					44
[11–16)				42	
[16–21)					
Σύνολο					

α. Να μεταφέρετε στο φύλλο απαντήσεων τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε Μονάδες 10

β. Να βρείτε τη μέση τιμή της βαθμολογίας Μονάδες 5

γ. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα της κατανομής συχνοτήτων Μονάδες 5

δ. Να βρείτε πόσοι μαθητές έχουν βαθμό τουλάχιστον 13,5 Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Σε μια τάξη της Γ' Λυκείου, 20 μαθητές είναι αγόρια

(**A**) και 9 κορίτσια (**K**). Το $\frac{1}{4}$ των αγοριών και το

$\frac{1}{3}$ των κοριτσιών είναι άριστοι τα Μαθηματικά.

	A	K	Σύνολο
Άριστοι			
Όχι άριστοι			
Σύνολο			

A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Μονάδες 5

B. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο για μια εξέταση. Ποια είναι η πιθανότητα:

α. να μην είναι άριστο στα Μαθηματικά

β. να είναι κορίτσι

γ. να είναι κορίτσι ή όχι άριστο στα Μαθηματικά

δ. να είναι κορίτσι άριστο στα Μαθηματικά

Μονάδες 20

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- α. Πότε δυο ενδεχόμενα A και B ονομάζονται ασυμβίβαστα; Μονάδες 5
 β. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Μονάδες 10

- γ. Να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της στήλης A με τις πρώτες παραγώγους τους που βρίσκονται στην στήλη B:

Μονάδες 10

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
α. \sqrt{x}	1. - συνx
β. x^2	2. $\frac{1}{x}$
γ. συνx	3. 2x
δ. ln x	4. συνx
ε. ημx	5. $\frac{1}{2x}$
	6. $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
	7. - ημx

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και την πρώτη παράγωγο $f'(x)$. Μονάδες 10
 β. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει στοιχεία για τις επισκέψεις ενός αριθμού μαθητών στο θέατρο, το μήνα Μάρτιο:

Επισκέψεις x_i	Αριθμός Μαθητών v_i	Σχετική Συχνότητα $fi\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $Fi\%$
0	6			
1			15	
2				70
3		10		
4			50	
Σύνολα				

- α. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα Μονάδες 15
 β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των επισκέψεων. Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνονται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - \frac{5}{2}x^2 + x$ καθώς και τα ενδεχόμενα A και B ενός πειρά-

ματος τύχης με δειγματικό χώρο Ω και $A \subseteq B$. Αν οι πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$ είναι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$, τότε:

- α. υπολογίστε τις $P(A)$, $P(B)$ Μονάδες 8
 β. αν $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$, υπολογίστε τις πιθανότητες
 i. $P(A \cup B)$ ii. $P(B - A)$ Μονάδες 9 + 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. α. Αναφέρατε πώς ορίζεται η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων Μονάδες 10

β. Πότε ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές ; Μονάδες 9

Β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. $(\eta\mu x)' =$

β. $(\ln x)' =$

γ. $(x^p)' =$

δ. $(\sin x)' =$

ε. $(e^x)' =$

στ. $(\sqrt{x})' =$

Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Μονάδες 5

β. Να βρείτε τις $f'(x)$ και $f''(x)$ Μονάδες 16

γ. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f στο $x_0 = 4$ Μονάδες 4

Θέμα 3^ο

Οι βαθμοί ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι: 18, 15, 17, 14, 16. Να βρείτε:

α. Το εύρος του δείγματος

β. Τη μέση τιμή

γ. Τη διάμεσο

δ. Τη διακύμανση

ε. Την τυπική απόκλιση Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Σε μια εταιρεία εργάζονται συνολικά 200 άτομα. Όπως προέκυψε από ένα δείγμα, ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας τους δίνεται από τον παρακάτω πίνακα

Κλάσεις [-)	v_i	$f_i\%$
0 – 10		48
10 – 20		34
20 – 30		14
30 – 40		
Σύνολο	200	

α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα Μονάδες 10

β. Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα και το πολύγωνο συχνοτήτων. Μονάδες 10

γ. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που εργάζονται ως 20 χρόνια στην εταιρία.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A₁.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει
 $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ Μονάδες 8
- A₂.** Πότε δύο ενδεχόμενα ονομάζονται ασυμβίβαστα; Μονάδες 2
- A₃.** Για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ποια ιδιότητα είναι γνωστή ως απλός προσθετικός νόμος; Μονάδες 5
- B.** Ποια από τα παρακάτω μεγέθη είναι μέτρα θέσης και ποια είναι μέτρα διασποράς;
α. Διάμεσος, **β.** Διακύμανση, **γ.** Μέση τιμή, **δ.** Εύρος, **ε.** Τυπική απόκλιση
Μονάδες 4
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές όταν ο συντελεστής μεταβολής του ξεπερνά το 10%.
- β.** Η μέση τιμή x ταυτίζεται πάντα με κάποια παρατήρηση του δείγματος.
- γ.** Διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, ορίζεται η ημιδιαφορά των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν ο n είναι άρτιος αριθμός.

Θέμα 2^ο

Μονάδες 6

Δίνεται η συνάρτηση:

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}$

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

γ. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης f

δ. Να βρεθεί η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της A(1, f(1)).

Θέμα 3^ο

Μονάδες 4 + 4 + 7 + 10

Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή είναι: 13, 9, 6, 10, 15, 12, 11, 0, 20, 14.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β. Να υπολογίσετε το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής.

(Δίνεται ότι $\sqrt{26,2} \approx 5,1$)

γ. Είναι το παραπάνω δείγμα ομοιογενές; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.

Θέμα 4^ο

Μονάδες 10 + 12 + 3

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A, B ενδεχόμενα του Ω, τέτοια ώστε: $P(A) \leq P(B)$. Έστω P(A), P(B) οι πιθανότητες των A, B και η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{20}{3}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + x + 2008.$$

Αν στα σημεία $x_1 = P(A)$ και $x_2 = P(B)$ οι εφαπτόμενες στην καμπύλη της f είναι παράλληλες στον άξονα xx' τότε:

α. Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B).

β. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα.

γ. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cup B)$, $P(A \cap B)$ και $P[(A \cup B)']$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10
- B.** Για κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση
- 1.** Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν και μόνο αν
- α.** ισχύει $f(x_0) = 0$, **β.** ισχύει $f(x_0) \neq 0$, **γ.** υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
- δ.** ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, **ε.** ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$
- 2.** Αν η καμπύλη συχνότητας για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με:
- α.** 2 τυπικές αποκλίσεις, **β.** 3 τυπικές αποκλίσεις, **γ.** 4 τυπικές αποκλίσεις
- δ.** 5 τυπικές αποκλίσεις, **ε.** 6 τυπικές αποκλίσεις
- 3.** Από τις παρακάτω ισότητες σωστή είναι η
- α.** $A \cap \emptyset = A$, **β.** $A' \cap A = \Omega$, **γ.** $A \cap B = A \cup B$, **δ.** $\Omega' = \Omega$, **ε.** $(A')' = A$
- 4.** Τα A και B είναι ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και a ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Η φράση « το A πραγματοποιείται » διατυπωμένη σε γλώσσα συνόλων είναι ισοδύναμη με την
- α.** $a \in A$, **β.** $a \in A' - B$, **γ.** $a \in A' \cup B$, **δ.** $a \in A'$
- 5.** Για το συντελεστή μεταβολής ενός τυχαίου δείγματος ισχύει:
- α.** $CV > 0$, **β.** $0 \leq CV \leq 100$, **γ.** $CV \in \mathbb{R}$, **δ.** $CV \geq 0$, **ε.** $CV \leq 10\%$

Θέμα 2^ο

Μονάδες 15

Στο παρακάτω δείγμα των 10 παρατηρήσεων:

1, 2, 4, 2, 6, 1, 3, 6, a , 6, όπου a πραγματικός αριθμός, η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 4$

A. Να βρείτε την τιμή του a Μονάδες 5

B. Για $a = 9$

α. Να βρείτε τη διάμεσο Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διακύμανση Μονάδες 8

γ. Αν όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις αυξηθούν κατά 2008, τότε ποια θα είναι η μέση τιμή των νέων παρατηρήσεων ; Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Από μια ομάδα 50 μαθητών, οι 45 γνωρίζουν μια τουλάχιστον γλώσσα από την Αγγλική και τη Γαλλική. Οι 40 γνωρίζουν το πολύ μια από τις δύο γλώσσες και οι 20 γνωρίζουν μόνο Αγγλικά. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Έστω A το ενδεχόμενο να γνωρίζει Αγγλικά και Γ το ενδεχόμενο να γνωρίζει Γαλλικά.

α. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και Γ είναι ασυμβίβαστα Μονάδες 8

β. Να βρείτε την πιθανότητα να γνωρίζει μόνο Γαλλικά Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την πιθανότητα να γνωρίζει μόνο μία γλώσσα από τις δύο Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

A. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$ Μονάδες 5

B. Αν $a = -4$

α. να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$ Μονάδες 5

β. να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο Μονάδες 10

γ. να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(1, -2)$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x$ ορισμένη στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι $f'(x) = 1$. Μονάδες 6
- B. Πότε μία συνάρτηση f θα λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της. Μονάδες 4
- Γ. Να χαρακτηρίσετε με την ένδειξη Σ ή Λ κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις ανάλογα με το αν θεωρείτε την πρόταση σωστή ή λάθος.
- α. Αν οι συναρτήσεις f, g ορίζονται στο $x_0 \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

- β. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για την γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής.
- γ. Η διάμεσος ενός δείγματος n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.
- δ. Ο συντελεστής μεταβολής ενός δείγματος τιμών είναι ένα μέτρο απόλυτης διασποράς.
- ε. Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το εύρος (R) ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις (s). Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 25$ και $g(x) = x + 5$.

- α. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$. Μονάδες 11
- β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{f(x)}{g(x)}$. Μονάδες 6
- γ. Να μελετηθεί η μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)$ στο διάστημα που ορίζεται. Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

- A. Ο μέσος χρόνος που χρειάζεται μια βιομηχανία για την κατασκευή ενός προϊόντος είναι 10 λεπτά με τυπική απόκλιση 2 λεπτά. Υποθέτοντας ότι έχουμε κανονική κατανομή να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των προϊόντων που χρειάζονται για να κατασκευαστούν:
- α. Κάτω από 8 λεπτά Μονάδες 8
- β. Από 6 έως 12 λεπτά Μονάδες 8
- B. Στις παρατηρήσεις 1, 2, 3, α αντιστοιχούμε τους συντελεστές βαρύτητας $a, 3, 2, \frac{a}{2}$.
 Αν ο σταθμικός μέσος είναι 2 να βρεθεί το a . Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

- α. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

Κλάσεις [)	x_i	v_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0-2		8					
2-4		12					
4-6		10					
6-8		6					
8-10		4					
Σύνολο							

- β. Να υπολογιστεί η μέση τιμή του δείγματος Μονάδες 5
- γ. Να υπολογίσετε την διάμεσο του δείγματος Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ισοπίθανα και ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Μονάδες 13
- B.** Να γράψετε στην κόλλα σας τον αντίστοιχο αριθμό και να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως: Σωστό ή Λάθος
- α.** Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο
- β.** Δείγμα ονομάζεται κάθε υποσύνολο του πληθυσμού που εξετάζεται
- γ.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής
- δ.** Η διάμεσος ενός δείγματος είναι μέτρο θέσης ενώ το εύρος είναι μέτρο διασποράς
- ε.** Κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται ενδεχόμενο
- στ.** Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:
 $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$ Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$

- α.** Να βρεθεί η παράγωγος της $f'(x)$ Μονάδες 5
- β.** Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία Μονάδες 10
- γ.** Να βρεθούν τα ακρότατα της f Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνονται τα σύνολα: $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} / 15 \leq \omega \leq 30\}$, $A = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ και

$B = \{\omega \in \Omega / \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 5\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω να βρείτε τις πιθανότητες:

- α.** να ανήκει στο A Μονάδες 7
- β.** να μην ανήκει στο B Μονάδες 8
- γ.** να ανήκει στο A ή στο B Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Έστω 5, 7, 8, 6, 3, 2, 3, 6 οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής x. Να βρεθούν:

- α.** Η μέση τιμή \bar{x} Μονάδες 4
- β.** Η διάμεσος δ Μονάδες 5
- γ.** Το εύρος R Μονάδες 2
- δ.** Η διακύμανση s^2 Μονάδες 7
- ε.** Η τυπική απόκλιση s Μονάδες 3
- στ.** Ο συντελεστής μεταβολής CV Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x)$. Να αποδείξετε ότι $(cf(x))' = cf'(x)$ όπου c πραγματικός αριθμός. Μονάδες 10
- B.** Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g . Να γράψετε τις παραγώγους των συναρτήσεων: $f(x) + g(x)$, $f(g(x))$, $\sqrt{f(x)}$ με $f(x) > 0$. Μονάδες 10
- Γ.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 18x + 2008$.

- A.** Να βρείτε την $f'(x)$. Μονάδες 10
- B.** Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης f στα οποία η παράγωγος της είναι μηδέν. Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές σε ευρώ:

8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9

- A.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και τη διάμεσο. Μονάδες 7
- B.** Να βρείτε το εύρος, την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής. Μονάδες 9
- Γ.** Αν οι τιμές του προϊόντος σε όλα τα καταστήματα υποστούν αύξηση 10%, να εξετάσετε αν θα μεταβληθεί ο συντελεστής μεταβολής. Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Από τα 120 αυτοκίνητα τα οποία πέρασαν, σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα από ένα βενζιναδικο, τα 24 έβαλαν βενζίνη, τα 20 άλλαξαν λάδια και 12 αυτοκίνητα έβαλαν βενζίνη και άλλαξαν λάδια. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα αυτοκίνητα. Να βρεθεί η πιθανότητα το αυτοκίνητο:

- A.** Να έβαλε βενζίνη ή να άλλαξε λάδια. Μονάδες 8
- B.** Να έβαλε μόνο βενζίνη ή να άλλαξε μόνο λάδια. Μονάδες 8
- Γ.** Να μην έβαλε ούτε βενζίνη, ούτε να άλλαξε λάδια. Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Έστω ότι x_1, x_2, \dots, x_k είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου $k \leq n$

α. Να δώσετε τον ορισμό της σχετικής συχνότητας f_i της τιμής x_i της μεταβλητής X του δείγματος με $1 \leq i \leq k$ Μονάδες 12

β. Να δείξετε ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$ Μονάδες 13

Θέμα 2^ο

Τι έχετε να παρατηρήσετε για τα παρακάτω επιλεγόμενα δείγματα;

α. Για να βρούμε τα ποσοστά των ανδρών και των γυναικών στην Ελλάδα πηγαίνουμε σε μια μεγάλη στρατιωτική μονάδα και ρωτάμε όλους τους στρατιώτες, πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες υπάρχουν στην οικογένειά τους. Μονάδες 5

β. Κάποιος θέλει να σχηματίσει μια ιδέα για το αποτέλεσμα των εκλογών. Τηλεφωνεί λοιπόν σε συγγενείς και φίλους του και τους ρωτάει σχετικά. Μονάδες 5

γ. Για να εξετάσουμε το επίπεδο μόρφωσης των υπαλλήλων μιας εταιρείας, ρωτάμε τους άνδρες υπαλλήλους. Μονάδες 5

δ. Για να εκτιμήσουμε το κατά κεφαλήν εισόδημα των Ελλήνων παίρνουμε ένα δείγμα από το Κολωνάκι Αθηνών. Μονάδες 5

ε. Για να δούμε τις μουσικές προτιμήσεις των εφήβων της χώρας μας επιλέγουμε ένα δείγμα από μαθητές σχολείων της Αθήνας. Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Οι δημοφιλέστεροι προορισμοί διακοπών για 10 φοιτητές που έλαβαν μέρος σε μια έρευνα ήταν: Σαντορίνη, Κρήτη, Ρόδος, Κέρκυρα, Κρήτη, Σαντορίνη, Σαντορίνη, Κέρκυρα, Σαντορίνη, Πάρος.

α. Να κατασκευάσετε το ραβδόγραμμα σχετικών συχνοτήτων Μονάδες 12

β. Να κατασκευάσετε το κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε μέσα στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δυο μπάλες με επανατοποθέτηση).

α. Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος; Μονάδες 5

β. Ποιο είναι το ενδεχόμενο $A =$ (η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη); Μονάδες 5

γ. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου A Μονάδες 5

δ. Ποιο είναι το ενδεχόμενο $B =$ (να εξαχθεί και τις δύο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα); Μονάδες 5

ε. Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου B Μονάδες 5