

ΓΕΛ ΑΛΓΕΒΡΑ Α'



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\theta > 0$, να δείξετε ότι $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 12

B. Έστω οι ευθείες με εξισώσεις $(\varepsilon_1): y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $(\varepsilon_2): y = \alpha_2 x + \beta_2$. Πότε είναι παράλληλες; Μονάδες 5

Γ. Να σημειώσετε αν είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Εάν $a < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε $a \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$

β. Εάν a, β πραγματικοί αριθμοί τότε ισχύει: $|a + \beta| \leq |a| + |\beta|$

γ. Αν $x, y > 0$ τότε $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

δ. Εάν x_1, x_2 ρίζες της $ax^2 + bx + \gamma = 0$, ($a \neq 0$) τότε

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 8}$$

Θέμα 2^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{|x-2|-4}{2} = \frac{|2-x|}{3} - \frac{5}{3}$ Μονάδες 10

B. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{(x^2 + 5x - 6) \cdot (x^2 - 4x + 4)}{-x^2 + x - 1} \leq 0$ Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x + 5y = \lambda^2 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

α. Να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα:

1. έχει άπειρες λύσεις και να γράψετε τη μορφή των άπειρων λύσεων Μονάδες 7

2. έχει μοναδική λύση την οποία και να βρείτε Μονάδες 6

β. Αν $(x_0, y_0) = (\lambda + 5, -\lambda)$ η μοναδική λύση του συστήματος να λυθεί η ανίσωση:

$$\lambda x_0 + y_0^2 \leq -2 \quad \text{Μονάδες 12}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda - 3)x + 1 = 0$

A. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες; Μονάδες 9

B. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της να δικαιολογήσετε γιατί είναι αντίστροφες Μονάδες 4

Γ. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε :

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = \lambda^2 + 8 \quad \text{Μονάδες 12}$$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Να δείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \text{ και } x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 9}$$

B. Αν $\theta > 0$ να συμπληρώσετε τις ισοδυναμίες:

α. $|x| < \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

β. $|x| > \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$ Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. $|a + \beta| < |a| + |\beta|$ για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$

β. $\frac{\sqrt[3]{\alpha}}{\sqrt[3]{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$ για $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$

γ. Το σύστημα $\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ \alpha'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$, με $D = 0$, $D_x = 0$ και $D_y \neq 0$ είναι αόριστο.

δ. Αν $\Delta = 0$, η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει μία διπλή ρίζα.

ε. Το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, όταν $\Delta = 0$ είναι ομόσημο του a , για κάθε $x \in \mathbb{R}$

στ. Για κάθε $x \neq 0$, ισχύει: $\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 1$ Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3|x|+1}{2} + \frac{2|x|-1}{3} = \frac{|x|+2}{4} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Αν $|x| < 3$, να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = |3-x| + |x+3| \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 3^ο

A. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ , το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - y = \lambda \\ 3x + (\lambda - 2)y = 1 \end{cases} \text{ έχει άπειρες λύσεις} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Για $\lambda = 1$, να λύσετε το παραπάνω σύστημα Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

A. Να λυθεί η εξίσωση:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0 \quad \text{Μονάδες 12}$$

B. Να λυθεί η ανίσωση:

$$\frac{(-x+5) \cdot (x^2-8x+12)}{(x+1)^2} \geq 0 \quad \text{Μονάδες 13}$$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\theta > 0$ να αποδείξετε ότι $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 10

B.

α. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέγεται περιττή Μονάδες 3

β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της Μονάδες 3

Γ.

α. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (2\lambda - 1)x + 5$, $\varepsilon_2: y = 3\lambda x - 2$ είναι παράλληλες όταν το λ είναι:

i. 3 ii. 1 iii. -1 iv. 0 Μονάδες 3

β. $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = 1-\sqrt{2}$ Σ, Λ Μονάδες 3

γ. Η ευθεία $y = 3x - 5$ διέρχεται από το σημείο $(1, -2)$ Σ, Λ Μονάδες 3

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 3x - 1 = 0$ με ρίζες x_1, x_2

A. να υπολογιστούν οι παραστάσεις;

α. $x_1 + x_2$ Μονάδες 5

β. $x_1 \cdot x_2$ Μονάδες 5

γ. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ Μονάδες 5

B. να βρεθεί η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει ρίζες:

α. $\rho_1 = x_1 + 3$

β. $\rho_2 = x_2 + 3$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

α. για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση Μονάδες 5

β. να βρεθεί η μοναδική λύση του συστήματος Μονάδες 10

γ. αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος και ισχύει $2|x_0| + |y_0| = 8$ να βρεθεί το λ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda - 1)x^2 - 5x + 3\lambda + \frac{1}{4}$, με $\lambda \neq 1$

α. να δείξετε ότι $\Delta = -12\lambda^2 + 11\lambda + 26$ όπου Δ η διακρίνουσα της $f(x)$ Μονάδες 8

β. να βρεθεί το πρόσημο της Δ για τις διάφορες τιμές του λ με $\lambda \neq 1$ (δίνεται ότι $37^2 = 1369$) Μονάδες 8

γ. να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \neq 1$ για τις οποίες $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι αν $\theta > 0$, τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$. Μονάδες 11
- B. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha x_1 + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha x_2 + \beta_2$
 Να γράψετε τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει ώστε οι δύο ευθείες
- α. Να είναι παράλληλες
- β. Να είναι κάθετες Μονάδες 4
- Γ. Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν είναι σωστές και το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες :
- α. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.
- β. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει πάντοτε $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$
- γ. Για τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του επιπέδου, ο τύπος που δίνει την απόστασή τους είναι $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- δ. Αν η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$ έχει δύο πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 διαφορετικές μεταξύ τους, τότε $\rho_1 + \rho_2 = \frac{\beta}{\alpha}$
- ε. Αν $\alpha > 0$ και $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

- A. Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2 \cdot (x - 2) - 3\lambda = x + 1$.
 Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει μοναδική λύση, η οποία και να βρεθεί.

Μονάδες 13

- B. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{|x-1|-1}{2} - \frac{1-3|x-1|}{3} = \frac{2}{3}$.

Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\lambda^2 - 5\lambda) \cdot x - 2$ και $\varepsilon_2: y = -6x + \frac{3\lambda + 2}{5}$

- α. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε οι δύο ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες. Μονάδες 8
- β. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , ώστε η ευθεία ε_1 να διέρχεται από το σημείο $A(1, -6)$ Μονάδες 9
- γ. Για $\lambda = 1$, να βρείτε τα σημεία στα οποία η ευθεία ε_2 τέμνει τους άξονες. Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

A. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{-3x^2 + x + 2}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού της

Μονάδες 8

B. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 + (\lambda - 1)x - 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α. Να αποδείξετε ότι έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες. Μονάδες 7
- β. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της, να βρείτε την τιμή του λ ώστε $x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2 = \frac{7}{9}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\theta > 0$ αποδείξτε την ισοδυναμία:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

Μονάδες 15

B. Χαρακτηρίστε Σωστό – Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν α, γ ετερόσημοι τότε η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β. Αν n περιττός και $\alpha < 0$, η εξίσωση $x^n = \alpha$ έχει λύση $x = -\sqrt[n]{-\alpha}$

γ. Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x + y| = |x| + |y|$

δ. Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι και $\alpha \geq 0$ ισχύει $\sqrt[\mu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\alpha} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$

ε. Αν n θετικός ακέραιος, ισχύει $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι ευθείες:

$$(\varepsilon_1): y = (2\lambda - 1)x + 5$$

$$(\varepsilon_2): y = (-\lambda + 2)x - 7$$

α. Βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες

Μονάδες 9

β. Αν $\lambda = 1$, βρείτε τη γωνία που σχηματίζει η (ε_1) με τον άξονα $x'x$

Μονάδες 8

γ. Αν $\lambda = 1$, εξετάστε αν το σημείο $A(2, -7)$ ανήκει στην (ε_1)

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \lambda x - 1 = 0$ (x άγνωστος, λ παράμετρος)

α. Δείξτε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

Μονάδες 8

β. Εκφράστε συναρτήσει του λ , το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών

Μονάδες 8

γ. Λύστε την ανίσωση $|S + 2P| > 1$

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

$$\text{Δίνεται το σύστημα: } \begin{cases} (\lambda + 2)x + 7(\lambda - 3)y = 35 \\ x + (\lambda - 3)y = \lambda \end{cases}$$

α. Βρείτε τις ορίζουσες D, D_x, D_y σε παραγοντοποιημένη μορφή

Μονάδες 8

β. Βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος

Μονάδες 8

γ. Βρείτε το λ ώστε να ισχύει $x_0 + 3y_0 \leq 1$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Αν $\theta > 0$ να αποδείξετε ότι : $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

Β. Έστω η εξίσωση : $\lambda(\lambda - 1)x = \lambda(\lambda + 1)$.

Να αντιστοιχήσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ της στήλης Α του παρακάτω πίνακα στο πλήθος των λύσεων της εξίσωσης που φαίνεται στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $\lambda = 3$	1. άπειρες
Β. $\lambda = 0$	2. μία μόνο
Γ. $\lambda = 1$	3. δύο
	4. καμία

Γ. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) , αν είναι σωστές , ή με

(Λ) , αν είναι λανθασμένες :

α. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $||2 - x| - |x - 2|| > 0$.

γ. Οι ευθείες με εξίσωση : $2x - y = 3$ και $4y + 2x - 1 = 0$ είναι κάθετες.

δ. Για κάθε $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ ισχύει ότι $\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = \alpha + \beta$.

ε. Ισχύει ότι : $x^2 - \lambda x + \lambda^2 > 0$, ($\lambda \neq 0$) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 12 + 3 + 10

Θέμα 2^ο

Έστω $K = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$ και $\Lambda = 2\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ με $1 \leq x \leq 3$.

α. Να αποδείξετε ότι : $K = 2$.

β. Να αποδείξετε ότι $\Lambda = x + 1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση : $|\Lambda| = K$. Μονάδες 8 + 10 + 7

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση (E) : $x^2 - (\lambda - 2)x + (\lambda + 1) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η (E) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες .

β. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η (E) έχει μια διπλή ρίζα και να βρείτε τη ρίζα

αυτή .

γ. Υπάρχουν τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε οι ρίζες της (E) να είναι αντίθετες ;

Μονάδες 13 + 6 + 6

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα : $(\Sigma) \begin{cases} \lambda x + 2y = 4 \\ 2x + \lambda y = \lambda^2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το (Σ) έχει μοναδική λύση ;

β. Βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το (Σ) να είναι αδύνατο.

γ. Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε για τη μοναδική λύση (x_0, y_0) να ισχύει : $y_0 - x_0 \leq \lambda^2$.

Μονάδες 10 + 8 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Για $\theta > 0$, να αποδείξετε ότι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$. Μονάδες 15
- B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α. Η εξίσωση $ax = \beta$ είναι αόριστη (ταυτότητα) όταν $a = 0$ και $\beta \neq 0$.
- β. Για κάθε $a, \beta \geq 0$, ισχύει $\sqrt{a + \beta} = \sqrt{a} + \sqrt{\beta}$.
- γ. Η ένωση δυο συνόλων A, B αποτελείται από όλα τα στοιχεία που ανήκουν είτε στο σύνολο A είτε στο σύνολο B είτε και στα δύο σύνολα.
- δ. Αν $\lambda_1 = \lambda_2$ τότε οι ευθείες $y = \lambda_1 x + \beta_1$ και $y = \lambda_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες.
- ε. Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο δυο αριθμών, τότε η εξίσωση που έχει ρίζες αυτούς τους δυο αριθμούς είναι η $x^2 + Sx + P = 0$. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{|x-3|-2}{3} + \frac{36-5|x-3|}{4} - \frac{12-|x-3|}{2} < -1$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 1 = 0$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (1).

- A. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. Μονάδες 10
- B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εκφράσετε, συναρτήσει του λ , το άθροισμα $x_1 + x_2$ και το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$. Μονάδες 5
- Γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1), να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες ισχύει: $\lambda \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot (x_1 + x_2) + 3x_1 + 3x_2 = 5$. Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x - y = \lambda \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$$

- A. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό λ , έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) , η οποία και να βρεθεί. Μονάδες 12
- B. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες ισχύει: $x_0 + y_0 < -1$. Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Ν. Δ. Ο. $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ Μονάδες 10

B. Τι λέγεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $ε: y = ax + β$ Μονάδες 5

Γ. Χαρακτηρίστε με σωστό ή λάθος τις προτάσεις:

α. Αν $λ = 1$ τότε η εξίσωση $(λ - 1)x = λ^2 + 1$ είναι αδύνατη

β. $|x|^2 = x^2$

γ. Οι ευθείες $ε_1: y = α_1x + β_1$ και $ε_2: y = -2x + 3$ είναι κάθετες

δ. Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + βx + γ = 0$, ($α \neq 0$) δίνεται από τον

$$\text{τύπο: } S = \frac{\beta}{2\alpha}$$

ε. Αν $x < 0$ τότε $|x| = -x$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda x - 4y = 2\lambda \\ -x + \lambda y = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

A. Βρείτε τις ορίζουσες D, Dx και Dy Μονάδες 10

B. Για τις διάφορες τιμές του λ, λύστε το σύστημα Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Ν. Δ. Ο. λύση της ανίσωσης:

$$\frac{|x-1|+3}{2} < 3 - \frac{2|x-1|-6}{3} \text{ είναι η } -2 < x < 4 \quad \text{Μονάδες 13}$$

B. Χρησιμοποιήστε τη λύση του (A) ερωτήματος και λύστε την εξίσωση:

$$|x+2| + 2|x-4| = 8 \quad \text{Μονάδες 12}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση:

$$\mu x^2 - 2(\mu + 2)x + (\mu + 4) = 0, (\mu \neq 0) \quad (1)$$

A. Αποδείξτε ότι η εξίσωση (1) έχει 2 άνισες ρίζες για κάθε $\mu \neq 0$ Μονάδες 6

B. Βρείτε το μ ώστε η εξίσωση (1) να έχει:

α. 2 αντίθετες ρίζες Μονάδες 6

β. Γινόμενο ριζών $\rho \leq 3$ Μονάδες 7

Γ. Αν x_1, x_2 είναι ρίζες της εξίσωσης (1), βρείτε το μ ώστε $x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2 = 2$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός αριθμού;
- B. Να απαντήσετε αν είναι σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Ισχύει πάντα $|x| \geq 0$
- β. Ισχύει πάντα $|x| + x < 0$
- γ. Αν x, y ομόσημοι αριθμοί $|x + y| = |x| + |y|$
- δ. Αν $\theta > 0$ $|x| > \theta \Leftrightarrow x < -\theta$ ή $x > \theta$
- ε. $|x + 1| = 3 \Leftrightarrow x = 2$

Θέμα 2°

Δίδεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda^2 x - 8y = 8 \\ x - 2y = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- α. Να βρείτε τις ορίζουσες D , D_x , D_y .
- β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x, y) και να την προσδιορίσετε σαν συνάρτηση του λ .
- γ. Για $\lambda = 2$ πόσες λύσεις έχει το σύστημα;

Θέμα 3°

Δίνονται τα τριώνυμα:

$$f(x) = x^2 - 5x + 6 \text{ και } g(x) = -2x^2 + 5x - 3$$

- α. Να βρεθούν οι ρίζες των τριωνύμων.
- β. Να βρείτε ένα τριώνυμο $h(x)$ με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη ρίζα των f και g αντίστοιχα.

Θέμα 4°

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x}{|x+1|-3} \text{ και } g(x) = \sqrt{3-|x-4|}$$

- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων
- β. Αν $A(3, 3)$ και $B(7, 0)$ δύο σημεία, να αποδείξετε ότι το σημείο A ανήκει στη συνάρτηση f ενώ το σημείο B ανήκει στη συνάρτηση g .
- γ. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A και B .

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0, \Delta > 0$. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών αυτής, να αποδείξετε ότι:

α. $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ και

β. $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $a\gamma < 0$ η $ax^2 + bx + \gamma = 0$, έχει πάντα δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

β. Ισχύει $\sqrt{(x-1)^2} = |1-x|$

γ. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε $\alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$

δ. Ισχύει $|x+y| = |x|+|y|$ για κάθε x, y στο \mathbb{R}

ε. Η εξίσωση $y = -2$ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

α. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$3x - 1 < x + 5 \text{ και } 2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2} \quad \text{Μονάδες 15}$$

β. Αν $1 \leq x < 3$, να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκεται η τιμή της παράστασης

$$A = 5x - 4 \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 3^ο

Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x : $(3x-1)|\lambda| + 3 = 2\lambda^2 \cdot x^2$ (1) η οποία έχει ρίζα τον αριθμό 2

α. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό λ Μονάδες 15

β. Αν $\lambda = 1$ και η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις x_1, x_2 , να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}, \text{ χωρίς να βρεθούν οι ρίζες} \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda^2 \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}$$

α. Να βρείτε τις ορίζουσες D, D_x, D_y και να τις παραγοντοποιήσετε Μονάδες 9

β. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του (Σ) τέμνονται και να βρεθεί το σημείο τομής τους συναρτήσει του λ Μονάδες 9

γ. Για ποια τιμή του λ το (Σ) είναι Αόριστο και να βρείτε τη μορφή των άπειρων λύσεων Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι ισχύει: $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ Μονάδες 15

B. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις:

α. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \dots\dots$

β. $\sqrt[n]{\alpha^y} = \dots\dots$

γ. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} = \dots\dots$

δ. $\sqrt[m]{\alpha^{np}} = \dots\dots$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

α. Να λύσετε την εξίσωση: $|x + 7| = -9$ Μονάδες 5

β. Να λύσετε την ανίσωση: $|x + 4| > 7$ Μονάδες 10

γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = 5 - |x - 2|$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

A. Σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη):

α. Η ορίζουσα: $\begin{pmatrix} 2009 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ έχει τιμή μηδέν

β. Το σύστημα: $\begin{cases} \frac{2}{3}x + 6y = -\sqrt{5} \\ -2x - 18y = 15 \end{cases}$ είναι αδύνατο

γ. Το σύστημα: $\begin{cases} x - 4y - 3\omega = 5 \\ 2y - \omega = 7 \\ \omega = -1 \end{cases}$ έχει λύση την $(x, y, \omega) = (2, 0, -1)$

Μονάδες 15

B. Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 3x - 4y = -18 \end{cases}$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

α. Να λύσετε την εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$ Μονάδες 15

β. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 4x - 5 < 0$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Έστω x_1, x_2 οι πραγματικές ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών αυτών, να αποδείξετε ότι: $S = x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{a}$ και $P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$ Μονάδες 15
- B. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- α. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| > \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- β. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και ν θετικός ακέραιος τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \dots\dots\dots$
- γ. Έστω η ευθεία ε με εξίσωση $y = ax + \beta$ και ω η γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x . Αν $a > 0$ τότε η γωνία ω παίρνει τιμές $\dots\dots\dots$
- δ. Έστω η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν η διακρίνουσα της $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση έχει $\dots\dots\dots$ ρίζα(ες)
- ε. Έστω $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, με $a \neq 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου τότε η $f(x)$ μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων από τον τύπο $f(x) = \dots\dots\dots$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

- A. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(-10)^2}$, $B = (\sqrt{5})^2$ και $\Gamma = \sqrt{2} + \sqrt{8}$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις.

- B. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{12}{\sqrt{3}}$ και $B = \frac{4}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

Να τραπούν οι παραστάσεις σε ισοδύναμες χωρίς ριζικά στους παρονομαστές.

- Γ. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 1 & \text{αν } x < 1, \\ x + 3 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $f(0)$, $f(1)$ και $f(2)$

- Δ. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, $g(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$ και $h(x) = \sqrt{2x + 1}$

Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων.

- Ε. Να βρείτε τη δευτεροβάθμια εξίσωση που έχει για ρίζες τους αριθμούς 5, -2

Μονάδες 6+6+3+6+4

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: (\lambda + 3) \cdot x - y = 2$ και $\varepsilon_2: (1 - 2\lambda) x + y = 3$.

- A. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες αυτές είναι μεταξύ τους παράλληλες; Μονάδες 5

- B. Για ποια τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες αυτές είναι τεμνόμενες;

- Γ. Για $\lambda = -1$ να αποδείξετε ότι οι παραπάνω ευθείες τέμνονται στο σημείο (1, 0)

- Δ. Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των παραπάνω ευθειών από το σημείο (-3, 3) Μονάδες 5 + 10 + 5 + 5

Θέμα 4^ο

- Έστω το σύστημα: $\begin{cases} \lambda \cdot x + y = 2 \\ 4 \cdot x + \lambda \cdot y = 4 \end{cases}$ A. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες D , D_x και D_y .

- B. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις.

- Γ. Αν $(x_0, y_0) = \left(\frac{2}{\lambda + 2}, \frac{4}{\lambda + 2} \right)$ είναι η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος να βρείτε

τα $\lambda \in \mathbb{R}$ τα οποία ικανοποιούν τη σχέση: $\left| \frac{1}{x_0} + \frac{1}{y_0} \right| = 4$. Μονάδες 8 + 8 + 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να δώσετε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού a Μονάδες 5
- B. Αν $\theta > 0$ τότε να αποδείξετε ότι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 10
- Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- α. Αν $|x| = |a| \Leftrightarrow \dots\dots\dots$
- β. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει $d(\alpha, \beta) = \dots\dots\dots$
- γ. Αν $\alpha \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι τότε: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \dots\dots\dots$
- δ. Έστω τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Η απόσταση των σημείων αυτών δίνεται από τον τύπο $(AB) = \dots\dots\dots$
- ε. Έστω $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, με $a \neq 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου τότε η $f(x)$ μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων από τον τύπο $f(x) = \dots\dots\dots$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

- A. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{2 \cdot |x+1|}{3} - \frac{2 \cdot |x+1| - 4}{6} > |x+1| - 2$ Μονάδες 10
- B. Να λυθεί η ανίσωση: $\sqrt{(x+3)^2} \geq 1$ Μονάδες 10
- Γ. Να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων σε μορφή διαστημάτων Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $2x^2 - 5x + |\lambda| = 0$

- A. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση έχει:
- α. Δύο ρίζες πραγματικές και άνισες Μονάδες 3
- β. Μια διπλή πραγματική ρίζα Μονάδες 3
- γ. Δεν έχει πραγματικές ρίζες Μονάδες 3
- B. Για $\lambda = 1$ η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην $2x^2 - 5x + 1 = 0$. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε χωρίς να βρεθούν οι ρίζες να υπολογιστούν οι παραστάσεις:
- α. $x_1 + x_2, x_1 \cdot x_2, x_1^2 + x_2^2, (|x_1| - |x_2|)^2$ Μονάδες 9
- β. Να βρεθεί η εξίσωση που δέχεται ως ρίζες τους αριθμούς ρ_1, ρ_2 όπου $\rho_1 = x_1 + 1$ και $\rho_2 = x_2 + 1$ Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

- A. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \lambda^2 + \lambda - 2$ και $B = \lambda^2 + 5\lambda + 6$
- α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των: A και $\frac{1}{B}$ Μονάδες 4
- β. Δίνεται η εξίσωση $A \cdot x = B$. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η παραπάνω εξίσωση να έχει άπειρες λύσεις Μονάδες 6
- B. Δίνονται οι ευθείες: $\epsilon_1: \lambda \cdot x - y = \lambda$ και $\epsilon_2: (\lambda - 2) \cdot x + \lambda \cdot y = -1$
- α. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες. Μονάδες 6
- β. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι παραπάνω ευθείες είναι τεμνόμενες. Μονάδες 6
- γ. Για $\lambda = 1$ να αποδείξετε ότι οι παραπάνω ευθείες ταυτίζονται. Μονάδες 3

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$

Μονάδες 15

B. Να απαντήσετε με Σ για σωστό ή Λ για λάθος στις παρακάτω:

α. $\sqrt{x^2} = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} = -\sqrt{2}-\sqrt{3}$

γ. Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{1}{2}x + 1$ και $\varepsilon_2: y = 0,3x$ είναι παράλληλες.

δ. $\sqrt{-x}$ ορίζεται όταν $x \leq 0$

ε. Αν $(x^2)^3 = 1$, τότε $x = 2$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \lambda^2 x + 3$ και $\varepsilon_2: y = (5\lambda - 6)x + 8$

α. Να βρεθεί ο λ ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$

Μονάδες 15

β. Για $\lambda = 2$ να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

α. Ναδειχθεί ότι το σύστημα $\begin{cases} (\lambda+1)x - 2y = \lambda + 2 \\ x + \lambda y = 4 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

Μονάδες 10

β. Να βρεθεί η μοναδική αυτή λύση

Μονάδες 8

γ. Για $\lambda = 2$ να λυθεί το σύστημα

Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2(\lambda - 2)x + \lambda^2 - 4$

A. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο να έχει πραγματικές ρίζες

Μονάδες 8

B.

α. αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου να βρείτε $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ συναρτήσει του λ

Μονάδες 5

β. να βρείτε $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\left| \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \right| \leq \frac{1}{4}$

Μονάδες 7

γ. να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση $f(x) = x^2$ να είναι ταυτότητα

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι: Αν $\theta > 0$, τότε:

$$|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$$

Μονάδες 9

B. Να δώσετε τους παρακάτω ορισμούς:

α. Τι λέγεται συνάρτηση

β. Πότε μια συνάρτηση λέγεται άρτια

γ. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα στο Δ

δ. Πότε η τιμή $f(x_0)$ λέγεται μέγιστο της συνάρτησης f .

Μονάδες 16

Θέμα 2^ο

A. Αν $x < -\frac{1}{2}$ να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{2x + 1}$

Μονάδες 9

B. Να λυθεί η εξίσωση: $|2x - 3| = |x + 1|$

Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: $|3x - 2| \geq 1$

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

A. Να δείξετε ότι:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 13

B. Να δείξετε ότι το σύστημα:

$$\begin{cases} (\lambda + 2)x - 2y = 2 \\ x + \lambda y = 3\lambda \end{cases} \text{ έχει μοναδική λύση}$$

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda + 3)x + \lambda$, $\lambda \neq 0$

A. Να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο να έχει πραγματικές ρίζες

Μονάδες 8

B. Να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 του τριωνύμου να ισχύει: $x_1 + x_2 = \frac{5}{2}$

Μονάδες 8

Γ. Να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το τριώνυμο να είναι μικρότερο από το 0 για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να δείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{a}$$

Μονάδες 15

B. Να δώσετε τους ορισμούς:

α. Τι ονομάζουμε συνάρτηση

β. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός αριθμού a

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να λυθούν οι εξισώσεις:

α. $|3x - 2| = 7$

β. $|x - 1| = |x + 2|$

Μονάδες 16

B. Να λυθεί η ανίσωση: $|3x - 2| \leq 4$

Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + y = \lambda \\ x + \lambda y = 1 \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου:

$$P(x) = (x + 2)(2x^2 + x - 1)(2x^2 + 3x + 5)$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι $|α \cdot β| = |α| \cdot |β|$ για κάθε $α, β \in \mathbb{R}$. Μονάδες 12
- B.** Τι λέγεται απόσταση δύο αριθμών $α$ και $β$. Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**.
- α.** Ισχύει $\sqrt[n]{α^{m \cdot p}} = \sqrt[n]{α^m}$ όπου n, m, p θετικοί ακέραιοι αριθμοί και $α \in \mathbb{R}$.
- β.** Αν $α, β, γ, δ$ θετικοί αριθμοί και $α < β$ και $γ < δ$ τότε $\frac{α}{γ} < \frac{β}{δ}$.
- γ.** Ισχύει $αx^2 + βx + γ > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όταν $α > 0$ και $Δ < 0$.
- δ.** Αν $α < 0$ τότε $90^\circ < ω < 180^\circ$, όπου $ω$ η γωνία που σχηματίζει με τον άξονα των x η ευθεία με εξίσωση $y = αx + β$. Μονάδες 4×2

Θέμα 2^ο

Έστω $α = \frac{2}{\sqrt{5}-2}$ και $β = (\sqrt{5}-1)^2$.

- α.** Να αποδείξετε ότι: $α + β = 10$. Μονάδες 12
- β.** Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{(α + β - x)^2} = 7$. Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις $(ε_1): y = (2 - λ)x + 1$ και $(ε_2): y = -\frac{λ^2}{9}x + \frac{λ}{3}$ όπου x, y άγνωστοι και $λ \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές του $λ \in \mathbb{R}$ ώστε:

- α.** Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ να τέμνονται και τις συντεταγμένες του σημείου τομής τους. Μονάδες 12
- β.** Οι ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ να είναι παράλληλες. Μονάδες 6
- γ.** Οι εξισώσεις $(ε_1)$ και $(ε_2)$ να παριστάνουν την ίδια ευθεία. Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $λ^2x - λ + 1 = (2λ - 3)x$, όπου x άγνωστος και $λ \in \mathbb{R}$.

- α.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει μοναδική λύση x_0 για κάθε $λ \in \mathbb{R}$ την οποία και να βρείτε. Μονάδες 10
- β.** Αν $λ_1, λ_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $4x_0 + 1 = 0$, να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες $x_1 = λ_1 + 1$ και $x_2 = λ_2 + 1$. Μονάδες 7

γ. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda \neq 0$ ώστε: $\lambda x_0 - \frac{1}{\lambda} \leq 1$. Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A.

α. Αν $\alpha, \beta \geq 0$ και n θετικός ακέραιος, να αποδειχθεί ότι: $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} = \sqrt[n]{\alpha\beta}$

Μονάδες 10

β. Δώστε τον ορισμό της απόλυτης τιμής ενός πραγματικού αριθμού a Μονάδες 5

B. Να αντιγράψετε τις σχέσεις που είναι ελλειπείς στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, τότε η απόστασή τους (AB) είναι: $(AB) = \dots$

β. Αν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι δύο ευθείες με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = a_1x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = a_2x + \beta_2$, τότε ισχύει: $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \dots$

γ. Αν το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $\Delta \dots 0$ και $a \dots 0$

δ. Αν $\gamma < 0$ τότε: $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma \dots \beta\gamma$

ε. Οι λύσεις της εξίσωσης $x^v = a$ με $a > 0$ και v άρτιος είναι: \dots Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

α. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$ Μονάδες 9

β. Να αναλυθεί το $f(x)$ σε γινόμενο πρωτοβάθμιων παραγόντων Μονάδες 8

γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq 0$ Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα $(\Sigma): \begin{cases} (\lambda + 2)x - y = \lambda \\ 3x + (\lambda - 2)y = 1 \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθούν οι ορίζουσες D, D_x, D_y Μονάδες 9

β. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) η οποία να υπολογιστεί Μονάδες 8

γ. Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του συστήματος, να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $x_0 + y_0 = -1$ Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 6x + |2\lambda - 1| = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ (1)

A. Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες

Μονάδες 10

B. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1)

α. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε $x_1x_2 = 5$

Μονάδες 7

β. Αν $\lambda = -1$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = x_1^2 x_2 + x_1 + x_1 x_2^2 + x_2$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$, να αποδείξετε τις σχέσεις:

$$S = -\frac{\beta}{\alpha} \text{ και } P = \frac{\gamma}{\alpha} \text{ όπου } S \text{ το άθροισμα και } P \text{ το γινόμενο των ριζών } x_1, x_2.$$

Μονάδες 15

Β. Συμπληρώστε τα παρακάτω:

α. $\sqrt[n]{a^n} = \dots\dots\dots$ με $a \geq 0$

β. $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \dots\dots\dots$ με $a \geq 0$

γ. $|x| < \theta$ τότε $\dots\dots\dots$ αν $\theta > 0$

δ. $|-a| = \dots\dots\dots$

ε. αν στην εξίσωση δεύτερου βαθμού $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ είναι $\Delta = 0$, γράψτε πόσες λύσεις έχει η εξίσωση και τον τύπο που τις δίνει.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Να λυθεί το σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (\lambda+1)x + y = \lambda \\ 3x + (\lambda-1)y = 2 \end{cases}$$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

α. Να λυθεί η εξίσωση: $|x-2| = \frac{4}{7}$.

Μονάδες 12

β. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2|x-2|+1}{3} + \frac{|2-x|}{2} = 1$

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις $\varepsilon_1: y = \lambda^3 x + 3\lambda$ και $\varepsilon_2: y = 4\lambda x - 6$.

Α. Για ποιες τιμές του λ οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι παράλληλες;

Μονάδες 10

Β. Για $\lambda = 2$

α. Βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ε_1 και ε_2 .

Μονάδες 5

β. Βρείτε σε ποιά σημεία η ευθεία ε_2 τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Μονά-

δες 5

γ. Αν A, B τα σημεία του (β) ερωτήματος, βρείτε την απόσταση (AB).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \quad \text{Μονάδες 13}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ).

α. Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$

β. Οι ευθείες $(\epsilon_1): y = 2x + 1$ και $(\epsilon_2): y = \frac{1}{2}x + 3$ είναι παράλληλες.

γ. Αν στην εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ $\alpha \neq 0$ είναι $\Delta \geq 0$ τότε έχει ρίζες πραγματικές.

δ. Αν $x \in \mathbb{R}$ τότε $\sqrt{x^2} = x$ Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Να λυθεί η ανίσωση:

$$|x-3| - \frac{|2x-6|+1}{3} > \frac{|9-3x|-3}{4} \quad \text{Μονάδες 25}$$

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x - y = 3 \\ x + \lambda y = -2 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η λύση του συστήματος Μονάδες 8

γ. Αν (x_0, y_0) είναι η μοναδική λύση του συστήματος να δείξετε ότι $2x_0 + 3y_0 < 0$ για κάθε

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{Μονάδες 9}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 3)x + \lambda + 2 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10

B. Να λυθεί η εξίσωση όταν $\lambda = -1$ Μονάδες 5

Γ. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 < 0 \quad \text{Μονάδες 10}$$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ να δείξετε ότι

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-\beta}{\alpha} \quad \text{και} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις :

1. Η εξίσωση $ax = \beta$ έχει μοναδική λύση όταν $a \neq 0$
2. Αν $v \in \mathbb{N}$ τότε ισχύει η ισοδυναμία $a^v = \beta^v \Leftrightarrow a = \beta$
3. Όταν $a \geq 0$ τότε η \sqrt{a} παριστάνει τη λύση της εξίσωσης $x^2 = a$
4. Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $-|a| \leq a \leq |a|$
5. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ τότε $d(A, B) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

1. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα $\begin{cases} (\lambda - 2)x + 3\lambda y = -3 \\ 3\lambda x + (\lambda - 2)y = \lambda - 2 \end{cases}$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 20

2. Αν $(x, y) = \left(\frac{3(\lambda - 2)}{4(2\lambda - 1)}, \frac{\lambda + 4}{-4(2\lambda - 1)} \right)$ είναι μια λύση του παραπάνω συστήματος, να βρεθεί για ποιά τιμή του λ η λύση αυτή ανήκει στην ευθεία $x + y = 0$

Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

α. Να λυθεί η ανίσωση $|3x - 2| \geq 1$ Μονάδες 15

β. Να λυθεί η εξίσωση $|2x^2 + x| = |x + 1|$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ με $\lambda \neq 0$

α. Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πάντοτε πραγματικές ρίζες τις οποίες και να υπολογίσει

β. Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του λ το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο

$$P = x_1 \cdot x_2$$

γ. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $S - 2P < 2\lambda$ Μονάδες 8 + 8 + 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\sin(\alpha + \beta) \neq 0$ και $\sin \alpha \neq 0$, $\sin \beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι, $\operatorname{εφ}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{εφ}\alpha + \operatorname{εφ}\beta}{1 - \operatorname{εφ}\alpha \cdot \operatorname{εφ}\beta}$

B. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

6. $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$

7. Αν $\log_a \theta = x$ τότε $x^a = \theta$

8. Αν $(x + \rho)$ παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ τότε $P(-\rho) = 0$

9. $\eta\mu^2 \alpha = \frac{1 - \sin 2\alpha}{2}$

10. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ ισχύει $\log(x_1 \cdot x_2) = (\log x_1) + (\log x_2)$

Μονάδες. 15 + 10

Θέμα 2^ο

Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \operatorname{εφ}\alpha$

Να λυθεί η εξίσωση $\sin 2x - \eta\mu x - 1 = 0$ στο $[0, 2\pi]$ Μονάδες 11 + 14

Θέμα 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - (5 + \beta)x^2 + 10x - \beta + 1$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

A. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $x - 1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x - 2$ να είναι ίσο με -3 . Μονάδες 8

B. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 4$

α. Να κάνετε την αλγοριθμική διαίρεση $P(x) : (2x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. Μονάδες 8 + 9

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln \frac{e^x - 2}{e^x + 4}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \ln 5 - \ln 3$

γ. Να λυθεί η ανίσωση $\ln \frac{e^{2x} - 2e^x}{e^x + 4} > 0$

Μονάδες 8 + 8 + 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό αριθμό θ ισχύει η ισοδυναμία $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$.

Μονάδες 12

B. Πώς ορίζεται η απόσταση (AB) δύο σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του επιπέδου;

Μονάδες 5

Γ. Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:

α. Μία συνάρτηση f ορισμένη στο \mathbb{R} είναι άρτια αν ισχύει $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β. Οι ευθείες $y = -x + 3$ και $y = x + 5$ είναι κάθετες.

γ. Για κάθε $a > 0$ ισχύει $\sqrt[6]{a^4} = \sqrt[9]{a^6}$.

δ. Ο αριθμός $\sqrt{(2 - \sqrt{5})^2}$ είναι ίσος με $2 - \sqrt{5}$. Μονάδες 4×2

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $\lambda^2(x - \lambda) = 2\lambda(x - 2)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση η

οποία και να βρεθεί.

Μονάδες 12

β. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση είναι αόριστη; Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα
$$\begin{cases} (\lambda+1)x + 4y = 2 \\ 2x + (\lambda-1)y = \lambda - 2 \end{cases}$$
.

α. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να έχει μοναδική λύση (x_0, y_0) .

Μονάδες 12

β. Για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι $|x_0 + y_0| = 2$;

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda - 1 = 0$.

α. Να δείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

β. Να βρείτε για ποιές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ρίζες αυτές είναι θετικές.

Μονάδες 5

γ. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει η σχέση

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2 > \frac{\lambda + 16}{9}.$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\theta > 0$ να αποδείξετε ότι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 10

B. Να συμπληρώσετε τα κενά: (να αντιγραφούν στην κόλα αναφοράς)

α. Για κάθε $a, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|a + \beta| \leq \dots\dots\dots$

β. Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι και $a \geq 0$ ισχύει: $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \dots\dots\dots$

γ. Αν $a < 0$ και ν περιττός, τότε: $x^\nu = a \Leftrightarrow x = \dots\dots\dots$

δ. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο: $(AB) = \dots$

ε. Αν $\Delta = 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$ έχει ρίζα $x = \dots\dots\dots$

Μονάδες 10

Γ. Να γράψετε τον ορισμό της νιοστής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού a .

Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|5-x|+4}{3} - \frac{3|x-5|-1}{15} = \frac{|x-5|-4}{5} + 2$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} -\lambda x + y = 1 - \lambda \\ \lambda^2 x - \lambda = 2y \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

α. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες: D, D_x, D_y Μονάδες 9

β. Να λύσετε και διερευνήσετε το παραπάνω σύστημα Μονάδες 16

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\lambda+2)x + \lambda = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός.

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές

Μονάδες 10

B. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε:

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ Μονάδες 5

β. Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει: $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 2$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να συμπληρώσετε τα κενά:

α. $\alpha^3 - \beta^3 = \dots\dots\dots$

β. Αν $\theta > 0$, τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow \dots\dots\dots$

γ. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \dots\dots\dots$$

δ. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{pmatrix} = \dots\dots\dots$

ε. Αν το τριώνυμο $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, έχει διακρίνουσα μηδέν, τότε γράφεται ως εξής:

$$ax^2 + bx + \gamma = \dots\dots\dots \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 2^ο

Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Να λύσετε την ανίσωση: $3 \leq |-2x + 3| \leq 7$ Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x - 3 = 0$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$ η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές.

Μονάδες 10

B. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης ικανοποιούν τη

σχέση: $x_1 + x_2 > x_1 \cdot x_2$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία A (x₁, y₁) και B(x₂, y₂).

Να αποδείξετε ότι η απόσταση τους δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $a \geq 0$ και μ, ν θετικοί ακέραιοι τότε ισχύει $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{a}} = \sqrt[\mu+\nu]{a}$

β. Αν $|x| = |a|$ τότε $x = a$ ή $x = -a$.

γ. Το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$ $a \neq 0$, γίνεται ετερόσημο του a , μόνο όταν είναι $\Delta > 0$ και για τις τιμές του x , που βρίσκονται μεταξύ των ριζών.

δ. Αν $a < x < \beta$ τότε το σύνολο των αριθμών x συμβολίζεται με (a, β) .

ε. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} ax + \beta y = \gamma \\ a'x + \beta'y = \gamma' \end{cases}$$

Αν ισχύουν $D = D_y = 0$ και $D_x \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται οι ανισώσεις: $\frac{2x-1}{2} \geq \frac{x+1}{3} - \frac{x}{6}$ και $\frac{|x-2|-3}{5} + \frac{|x-2|}{2} < \frac{3|x-2|+1}{5}$

α. Να λύσετε τις ανισώσεις. Μονάδες 20

β. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν. Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις:

$(\varepsilon_1): y = (\lambda^2 - 4\lambda + 5)x - 3$ και $(\varepsilon_2): y = (\lambda - 1)x + 1$ όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ να είναι παράλληλες. Μονάδες 12

β. Αν $\lambda = 4$ να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda + 1, \lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε το λ ώστε το τριώνυμο να έχει μια διπλή ρίζα Μονάδες 5

β. Να βρείτε το λ ώστε να ισχύει $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 70$, όπου οι x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$. Μονάδες 10

γ. Αν $\lambda = 3$ να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x-1)f(x)}{x^2 - 2x - 3} \geq 0$ Μονάδες 1

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν με S συμβολίσουμε το άθροισμα $x_1 + x_2$ και με P το γινόμενο $x_1 \cdot x_2$ των ριζών αυτών, να δείξετε ότι:

α. $S = \frac{-\beta}{\alpha}$ β. $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ Μονάδες 12

Β. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της; Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Η εξίσωση $x^v = a$, με $a > 0$ και v περιττό, έχει ακριβώς μια λύση την $\sqrt[v]{a}$

β. Η ευθεία με εξίσωση $y = ax + \beta$ σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία ω , για την οποία ισχύει $\epsilon\phi\omega = \beta$.

γ. Το $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, όταν $\Delta > 0$, μετατρέπεται σε γινόμενο του a επί δύο πρωτοβάθμιους παράγοντες.

δ. Τα σημεία $M(x, y)$ για τα οποία είναι $x = 0$ είναι σημεία του άξονα $x'x$.

ε. Για οποιουσδήποτε αριθμούς a , β και v φυσικό $\neq 0$ ισχύει: $a > \beta \Leftrightarrow a^v > \beta^v$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y = -1 \end{cases}$ όπου λ πραγματικός αριθμός διάφορος του -1 και του 1 .

Α. Να δείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση Μονάδες 7

Β. Να βρείτε τη μοναδική λύση (x_0, y_0) του συστήματος Μονάδες 9

Γ. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η τετμημένη του σημείου $M(x_0, y_0)$ είναι μεγαλύτερη του 1 Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + |x - 2|$

Α. Να γράψετε τη συνάρτηση απλούστερα (χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής)

Β. Να μετατρέψετε την παράσταση $\frac{1}{7(\sqrt{3})}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $(x - 2)^2 - 2x + f(x) = 2$ Μονάδες 9 + 7 + 9

Θέμα 4^ο

Μια συνάρτηση f έχει γραφική παράσταση την παραβολή του διπλανού σχήματος.

Α. Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της συνάρτησης f Μονάδες 3

Β. Να δείξετε ότι: $f(x) = x^2 - 4x + 1$ Μονάδες 10

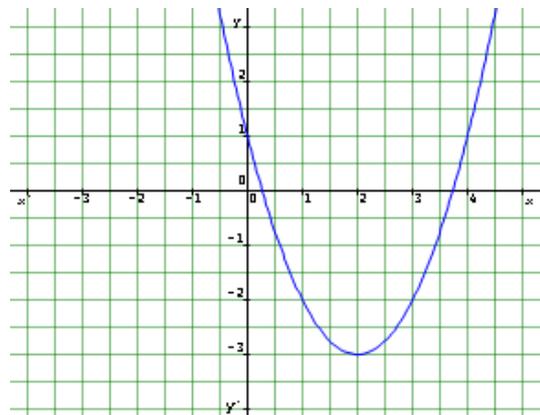
Γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + (\kappa + 4)x + \lambda - 1$ όπου κ, λ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\kappa^2 < 2\lambda$.

Να δείξετε ότι:

α. $g(x) = x^2 + \kappa x + \lambda$ Μονάδες 2

β. $\lambda > 0$ Μονάδες 3

γ. Όλες οι τιμές της g είναι θετικές Μονάδες 7



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (ϵ), όπου $a \neq 0$.

α. Να γράψετε τη Διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (ϵ) και ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιεί η Δ , ώστε η (ϵ) να έχει πραγματικές ρίζες (χωρίς τεκμηρίωση) Μονάδες 3

β. Αν η εξίσωση (ϵ) έχει πραγματικές ρίζες, τότε να γράψετε τους τύπους των ριζών της συναρτήσει των a, β, γ (χωρίς τεκμηρίωση) Μονάδες 3

γ. Αν η εξίσωση (ϵ) έχει πραγματικές ρίζες ίσες τότε να γράψετε τους τύπους των ριζών της συναρτήσει των a, β (χωρίς τεκμηρίωση) Μονάδες 3

δ. Αν η εξίσωση (ϵ) έχει πραγματικές ρίζες ρ_1, ρ_2 , να αποδείξετε ότι:

$$\rho_1 + \rho_2 = -\frac{\beta}{a} \text{ και } \rho_1 \cdot \rho_2 = \frac{\gamma}{a} \quad \text{Μονάδες 8}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Έστω οι ευθείες $\epsilon_1: y = a_1x + \beta_1$ και $\epsilon_2: y = a_2x + \beta_2$, αν $a_1 = -a_2 \Leftrightarrow \epsilon_1 // \epsilon_2$

β. Για κάθε $a, \beta > 0$ ισχύει: $\sqrt{a \cdot \beta} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\beta}$

γ. Αν a, β ομόσημοι και $v \in \mathbb{N}^*$ τότε ισχύει $a = \beta \Leftrightarrow a^v = \beta^v$

δ. Ισχύει πάντα: $|a| = a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

A. Για ποιες τιμές του x η παράσταση $A = |x - 1|$ είναι:

α. $A = 2$, β. $A < 2$, γ. $A > 2$ Μονάδες 18

B. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|1-x|}{3}$ Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

A. Να λυθεί το παρακάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$x + \lambda y = 5$$

$$\lambda x + 9y = 7$$

Μονάδες 15

B. Αν (x_0, y_0) η μοναδική λύση του παραπάνω συστήματος, να βρεθεί η τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι

$$\text{ώστε } x_0 + y_0 = \frac{4}{9 - \lambda^2}$$

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνεται το τριώνυμο $P(x) = -x^2 + 2x - 2$

A. Να προσδιοριστεί το πρόσημο των τιμών του τριωνύμου για τις διάφορες πραγματικές τιμές του x Μονάδες 9

B. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{-x^4 + 2x^3 - 2x^2}{x^2 - 1}$ Μονάδες 16

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να δείξετε ότι η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών a και β , ισούται με το γινόμενο των απόλυτων τιμών τους. ($|a \cdot \beta| = |a| \cdot |\beta|$) Μονάδες 10
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει: $|x| \geq -x$
- β.** Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία στο καρτεσιανό επίπεδο, τότε η απόστασή τους $AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- γ.** Για κάθε θετικό αριθμό a , ισχύει $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, m και n φυσικοί αριθμοί ≥ 2
- δ.** Η απόσταση δύο πραγματικών αριθμών πάνω στον άξονα των αριθμών, ισούται με $|x + y|$
- ε.** Ισχύει ότι $\sqrt{a^2} = a$, για κάθε πραγματικό αριθμό a . Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Δίνεται το σύστημα:

$$\begin{cases} y = 2 - \lambda x \\ 4x - 4 = -\lambda y \end{cases}$$

- A.** Να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού λ , ώστε:
- α.** Το σύστημα να έχει άπειρες λύσεις Μονάδες 8
- β.** Το σύστημα να είναι αδύνατο Μονάδες 8
- B.** Για $\lambda = 1$, να βρείτε τη λύση του παραπάνω συστήματος Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

- A.** Να λύσετε την ανίσωση $d(x, 2) \leq 3$ Μονάδες 13
- B.** Αν $d(x, 2) \leq 3$, να λύσετε την εξίσωση: $|x - 3| = 2|x + 1|$ Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (\lambda + 3)x - \lambda^2$, όπου λ πραγματική παράμετρος.

- A.** Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει για κάθε τιμή του λ δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. Μονάδες 10
- B.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:
 $K = x_1^3 - x_2^3 - x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2$ Μονάδες 8
- Γ.** Να βρείτε για ποια τιμή του λ , θα έχουμε $K = 0$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0, a \neq 0$ (1)
- α.** Να υπολογίσετε ως συνάρτηση των a, β, γ το $S = x_1 + x_2$ Μονάδες 7
- β.** Να αποδείξετε ότι, αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) τότε η εξίσωση μετασχηματίζεται σε $x^2 - Sx + P = 0$ Μονάδες 8
- B.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις
- α.** Αν $\theta > 0$, τότε $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$
- β.** $|x - 3| > \theta \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - \{3\}$
- γ.** Το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x) = \frac{4x + 3}{\sqrt{2x - 4}}$ είναι το $A = [2, \infty)$
- δ.** Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$) είναι αρνητικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν $\Delta < 0$ και $a < 0$.
- ε.** Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι: $(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Θέμα 2^ο

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα:
$$\begin{cases} (\lambda + 1)x - (\lambda - 3)y = 5 \\ 10x - (\lambda - 2)y = 3\lambda - 2 \end{cases}$$

- α.** Να έχει άπειρες λύσεις, οι οποίες και να βρεθούν. Μονάδες 15
- β.** Να είναι αδύνατο Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συναρτήσεως $f(x) = \sqrt{|2x^2 - 5x + 4| - 2}$

Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση: $(\lambda - 2)x^2 + 4x + \lambda + 2 = 0$

- α.** Να έχει μόνο μία ρίζα Μονάδες 5
- β.** Να έχει μία διπλή ρίζα Μονάδες 10
- γ.** Να μην έχει καμία ρίζα Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ ($\theta > 0$) Μονάδες 10

B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες, όταν οι ρίζες έχουν νόημα

α. $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \sqrt[n]{\beta} =$

β. $\sqrt[n]{\alpha^{mp}} =$

γ. $(\sqrt{\alpha})^2 =$

δ. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{\alpha}} =$

ε. $\sqrt{\alpha^2} =$

στ. $\alpha\sqrt{\beta} =$ Μονάδες 6

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $y = \alpha_2 x + \beta_2$ είναι παράλληλες όταν.....

β. Η ευθεία με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο με τετμημένη
και τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένες

γ. Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο $(AB) =$

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|-1}{2} + \frac{|x|+2}{3} = 1 - \frac{|x|-3}{6}$ Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(2-x) \cdot (x^2 - 4x)}{x^2 + x - 6} \leq 0$ Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + \beta x - 2 = 0$, με $\beta \in \mathbb{R}$ και $|\beta| \neq 1$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες Μονάδες 6

β. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της (1) να δείξετε ότι: $(\rho_1+1)(\rho_2+1) = -\beta - 1$ και $(\rho_1 - 1)(\rho_2 - 1) = \beta - 1$

Μονάδες 6

γ. Να δείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζες τους αριθμούς 1 και -1 Μονάδες 6

δ. Να βρείτε τον αριθμό β έτσι ώστε: $\frac{1}{(\rho_1+1)(\rho_2+1)} - \frac{1}{(\rho_1-1)(\rho_2-1)} = -\frac{3}{4}$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$ να αποδείξετε ότι:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a}$$

Β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $2x^2 - 6x - 5 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

α. $x_1 + x_2$

β. $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$

γ. $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$

Θέμα 2^ο

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της στήλης Α και δίπλα τον αντίστοιχο αριθμό της στήλης Β. (Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας)

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
Α. $\sqrt{72} - \sqrt{50}$	α. $2 - \sqrt{2}$
Β. $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$	β. $\sqrt{2}$
Γ. $\frac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}$	γ. $2\sqrt{2} - 3$
Δ. $ 1 - \sqrt{2} - 1 $	δ. $\sqrt[3]{4}$
	ε. $\sqrt[3]{2}$

Θέμα 3^ο

Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$x^2 - 2x - 3 \leq 0 \text{ και } |x - 4| > 2$$

Θέμα 4^ο

Να λυθεί και να διερευνηθεί για τις διάφορες πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ , το σύσ-

τημα:
$$\begin{cases} (\lambda - 1)x + 3y = 5 \\ x + (\lambda + 1)y = 5 \end{cases}$$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$, να αποδείξετε ότι:

α. $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha}$ β. $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$ Μονάδες 5 + 6

B. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Έστω $x \in (\alpha, \beta]$, τότε: A. $\alpha < x < \beta$ B. $\alpha \leq x \leq \beta$ Γ. $\alpha \leq x < \beta$ Δ. $\alpha < x \leq \beta$

E. τίποτε από τα προηγούμενα

β. Η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 + 3x + \lambda - 3 = 0$ είναι 2^{ου} βαθμού όταν:

A. $\lambda \neq 0$ B. $\lambda = 2$ Γ. $\lambda \neq 2$ Δ. $\lambda = 3$ E. $\lambda > 0$ Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει ότι: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

Αν $\alpha \neq 0$ τότε η εξίσωση $ax + \beta = 0$ έχει μοναδική λύση.

Αν $\alpha > 0$ και $\gamma < 0$, η εξίσωση $ax^2 + bx + \gamma = 0$ με $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες άνισες.

Αν $|\alpha| = |\beta|$ τότε $\alpha = \beta$.

Αν $\alpha < \beta$ και $\gamma < \delta$ τότε: $\alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή την παράσταση:

$$A = \sqrt{(\alpha - \beta)^2} + \sqrt{(\beta - \gamma)^2} \text{ με } 0 \leq \alpha < \beta < \gamma. \quad \text{Μονάδες 5}$$

B. Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα με ρητό παρονομαστή:

α. $\frac{5}{\sqrt{5}}$, β. $\frac{1}{\sqrt{2}}$, γ. $\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ Μονάδες 6

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: $-2 \frac{|3-x|}{5} + \frac{|x-3|}{2} - \frac{3(5-|x-3|)}{10} < \frac{|3-x|-7}{2} + 5$

Μονάδες 14

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (\mu - 2)x + 5y = 5 \\ x + (\mu + 2)y = 5 \end{cases}$$

α. Να αποδείξετε ότι το σύστημα αυτό έχει μοναδική λύση για κάθε $\mu \neq \pm 3$, την οποία και να προσδιορίσετε. Μονάδες 15

β. Να λυθεί το σύστημα όταν $\mu = 3$. Μονάδες 5

γ. Να λυθεί το σύστημα όταν $\mu = -3$. Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

A. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων:

α. $x^2 + 3x - 4$ β. $x^2 - 2x - 3$ γ. $x^2 - 1$ δ. $x^2 + 2$

Μονάδες 12

B. Δίνεται η συνάρτηση f με:
$$f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 3x - 4)}$$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μονάδες 4

β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Δείξτε ότι αν $\theta > 0$ τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 12
- B. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού; Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση:
- α. Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει ότι: $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$
Μονάδες 2
- β. Το τριώνυμο $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες όταν $\beta^2 > 4a\gamma$ Μονάδες 2
- γ. Αν για ένα γραμμικό σύστημα 2×2 ισχύει ότι $D \neq 0$ τότε το σύστημα αυτό είναι αδύνατο Μονάδες 2
- δ. Για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι: $-|x| \leq x$ Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Δίνεται η παράσταση $A = \frac{x^2 - 3x}{|x - 1| - 2}$

- A. Να λύσετε την εξίσωση: $|x - 1| - 2 = 0$ Μονάδες 8
- B. Να γράψετε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση A
Μονάδες 7
- Γ. Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} (k + 1)x - 2y = k + 1 \\ kx - ky = 1 \end{cases}$$

- A. Να βρεθούν οι τιμές του k ώστε το παραπάνω σύστημα να έχει μοναδική λύση
Μονάδες 8
- B. Να βρεθεί η μοναδική λύση (x_0, y_0) για τις τιμές του k που βρήκατε στο παραπάνω ερώτημα
Μονάδες 8
- Γ. Να βρεθούν οι τιμές του k για τις οποίες η λύση (x_0, y_0) του συστήματος ικανοποιεί τη σχέση $|x_0 - y_0| > 3$ Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \lambda x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda - 3 \quad \lambda \neq 0$

- A. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10
- B. Αν $\lambda = 3$ να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{f(x)} \geq -1$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$. Μονάδες 10
- B. Πότε μία συνάρτηση f σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της λέγεται γνησίως φθίνουσα; Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α. Αν $|x - 1| + |y - 2| = 0$, τότε $x = 1$ και $y = 2$.
- β. Η ευθεία $x = -2$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- γ. Αν το σύστημα δύο εξισώσεων που παριστάνουν ευθείες είναι αδύνατο, οι ευθείες είναι παράλληλες.
- δ. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$ με $a < 0$ είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R}
- ε. Το συμμετρικό του σημείου $M(\alpha, \beta)$, ως προς την αρχή των αξόνων, είναι το σημείο $\Lambda(-\alpha, \beta)$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

A. Να βρεθεί το πρόσημο των τριωνύμων :

α. $x^2 + 3x - 4$ β. $x^2 - 2x - 3$ γ. $x^2 - 1$ δ. $x^2 + 2$

Μονάδες 12

B. Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \frac{(x^2 - 1)(x^2 + 2)}{(x^2 - 2x - 3)(x^2 + 3x - 4)}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . Μονάδες 4
- β. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq 0$ Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

A. Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα : $\begin{cases} (4\lambda^2 - 6)x - y = -3 \\ -5\lambda x + y = 8 \end{cases}$ να είναι αδύνατο

Μονάδες 10

B. Αν $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$ και $\epsilon\omega = \lambda$, όπου λ μία από τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα, να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω

Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με : $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - x - 6}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 5
- β. Να εξετάσετε αν είναι άρτια η περιττή. Μονάδες 8
- γ. Να λύσετε την ανίσωση : $\left| \frac{1}{f(x)} \right| \geq \frac{1}{2}$ Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αποδείξτε ότι εάν $a > 0$, $a \neq 1$, $\theta_1, \theta_2 > 0$ τότε: $\log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

Μονάδες 10

B. Τι ονομάζεται εκθετική συνάρτηση με βάση a ;

Γ. Στις παρακάτω προτάσεις κυκλώστε Σ (εάν είναι σωστή) ή Λ (εάν είναι λάθος)

α. Εάν $x > y$ τότε $(0,3)^x > (0,3)^y$

β. Η γραφική παράσταση της $f(x) = \log_a x$ είναι συμμετρική ως προς την $y = x$, με τη γραφική παράσταση της $g(x) = a^x$, ($0 < a \neq 1$)

γ. Το πολυώνυμο $P(x) = 2\lambda x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ είναι 3^{ου} βαθμού για κάθε τιμή του λ .

δ. Στην εξίσωση $a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$ με $a_0 \neq 0$ κάθε διαιρέτης του a_0 είναι και ρίζα της εξίσωσης.

ε. Ισχύει $2\sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha$.

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax - 2$. Εάν το $P(x)$ έχει ρίζα ένα άρτιο, θετικό ακέραιο αριθμό ρ , τότε:

α. Βρείτε την τιμή του ρ .

β. Εάν $\rho = 2$, βρείτε την τιμή του a

γ. Εάν $a = 3$ και η διαίρεση $P(x) : (x + \lambda)$ έχει υπόλοιπο -4 , βρείτε το λ .

Μονάδες 5 + 10 + 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 7x - 6$.

α. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

β. Να γραφεί το $P(x)$ ως γινόμενο παραγόντων

γ. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$

δ. Να λυθεί η εξίσωση $e^{3\ln x} - 7e^{\ln x} - 6 = 0$

δ. Να λυθεί η εξίσωση $P(\eta\mu x) = 0$

Μονάδες 5 × 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται το πολυώνυμο:

$P(x) = (4^{\frac{\lambda+3}{2}} - 12 \cdot 2^{\lambda-1})x^4 - (\lambda+1)x^3 + (1+\log_a)x^2 - (2 + \log_a^3)x - 6$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ και $a > 0$.

α. Εάν το $P(x)$ είναι 3^{ου} βαθμού, να βρεθεί το λ

β. Εάν $\lambda = -2$ και το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x + \lambda$, να βρεθεί η τιμή του a .

γ. Εάν $\lambda = -2$ και $a = 10$, να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$

Μονάδες 10 + 5 + 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε την ιδιότητα: Αν $\theta > 0$ τότε: $|x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta$ Μονάδες 13

B. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος;

α. Αν $\theta > 0$ τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$ ή $x = -\theta$

β. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$. Η

απόστασή τους δίνεται από τον τύπο $(AB) = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 + (y_2 + y_1)^2}$

γ. Ισχύει $|a|^2 = a^2$

δ. Αν x_1, x_2 λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, τότε $x_1 + x_2 = \frac{\beta}{a}$ Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

A. Να λύσετε την εξίσωση: $x^4 + 2x^2 - 24 = 0$ Μονάδες 13

B. Να λυθεί η εξίσωση: $2|x + 1| = |x - 4|$ Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

A. Να λύσετε την ανίσωση: $(x - 1)(x^2 - 5x + 6)(x^2 + x + 1) > 0$ Μονάδες 15

B. Αν x_1, x_2 λύσεις της εξίσωσης $2x^2 + 3x + 1 = 0$ να υπολογίσετε τις παραστάσεις

$x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$ Μονάδες 5

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση με ρίζες τους αριθμούς 1 και $\frac{-3}{2}$ Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Να λυθεί για τις διάφορες τιμές του λ το σύστημα:
$$\begin{cases} \lambda^2 x + \lambda y = 1 \\ x + \lambda y = \lambda \end{cases}$$

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Τι ονομάζουμε απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού a ; Μονάδες 10

B. Να αποδειχτεί ότι:

$$\text{αν } \theta > 0, \text{ τότε } |x| < \theta \Leftrightarrow -\theta < x < \theta \quad \text{Μονάδες 15}$$

Θέμα 2^ο

Να βρεθεί ο λ ώστε οι ευθείες

$$\varepsilon_1: y + 6 = \frac{\lambda + 1}{2}x \text{ και } \varepsilon_2: y - 8 = \frac{1 - \lambda}{12}x \text{ να είναι παράλληλες} \quad \text{Μονάδες 25}$$

Θέμα 3^ο

Να βρεθεί για ποιες τιμές του πραγματικού λ το σύστημα:

$$\begin{cases} \lambda x + 8\lambda y = 4 \\ x + \lambda^3 y = \lambda \end{cases}$$

έχει άπειρες λύσεις και για ποιες είναι αδύνατο Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Έστω η εξίσωση $ax^2 + 3\beta x + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ και τέτοια ώστε να ισχύει:

$$a\gamma - \beta^2 = a^2$$

Αν $\rho_1, \rho_2 \in \mathbb{R}$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + 3\beta x + \gamma = 0$ με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, να

δειχθεί ότι: $\rho_1^2 + \rho_2^2 + 9 = 7\rho_1 \cdot \rho_2$ Μονάδες 25