

# ΓΕΛ

## ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α.



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Να δείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτεινουσας Μονάδες 15
- B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη σωστή (Σ) ή λάθος (Λ):
- Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του
  - Εάν ένας ρόμβος έχει διαγώνιες ίσες τότε είναι τετράγωνο
  - Εάν το ύψος ενός τριγώνου είναι και διάμεσός του τότε αυτό είναι ισοσκελές
  - Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες
  - Οι διαγώνιοι ενός ισοσκελούς τραπέζιου διχοτομούνται Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος του  $B\Delta$ . Από το σημείο  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$  που τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:

- A.  $A\Delta = \Delta E$  Μονάδες 8
- B.  $\overset{\Delta}{Z}\Delta B = \overset{\Delta}{B}\Delta\Gamma$  Μονάδες 8
- Γ. Το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές Μονάδες 9

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = A\Gamma$  και  $M$  μέσο της  $B\Gamma$ . Η προέκταση της  $AM$  τέμνει την προέκταση της  $\Delta\Gamma$  στο  $E$ . Να δειχθεί ότι:

- A.  $AM \perp B\Gamma$  Μονάδες 6
- B.  $AM = ME$  Μονάδες 6
- Γ.  $ABE\Gamma$  ρόμβος Μονάδες 7
- Δ. το  $\Gamma$  μέσο του  $\Delta E$  Μονάδες 6

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $\Gamma\Delta = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ .

- A. Να δειχθεί ότι  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$  Μονάδες 5
- B. Από το  $B$  φέρουμε  $BE \perp \Gamma\Delta$ . Να αποδειχθεί ότι η  $A\Gamma$  διέρχεται από το μέσο  $M$  της  $BE$ . Μονάδες 6
- Γ. Να αποδειχθεί ότι  $AE \perp B\Delta$  και  $AE = B\Delta$  Μονάδες 7
- Δ. Αν  $N$  το σημείο τομής των  $AE$  και  $B\Delta$ , τότε να αποδειχθεί ότι  $MN \parallel \Gamma\Delta$  και  $MN = \frac{\Gamma\Delta}{4}$ . Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά της είναι το μισό της υποτεινουσας και αντίστροφα. Μονάδες 15
- B. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και μία γωνία ίση, τότε είναι ίσα.
- β. Η διάμεσος τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα των διαγωνίων
- γ. Το άθροισμα των γωνιών κυρτού  $n$ -γώνου είναι  $(2n - 4) \cdot 90^\circ$
- δ. Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι κάθετες.
- ε. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη, τότε οι εντός και επί τα αυτά γωνίες είναι παραπληρωματικές. Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημεία  $\Delta$ ,  $E$  των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $B\Delta = \Gamma E$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $\Delta E$ , να δείξετε ότι:

- A. Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές Μονάδες 8
- B. Η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $A$  Μονάδες 8
- Γ. Τα τρίγωνα  $M\Delta B$  και  $M\Gamma E$  είναι ίσα Μονάδες 9

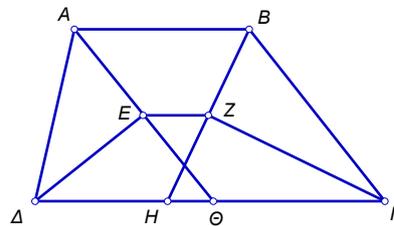
Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $A\Delta$ . Αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα:

- A. Να δείξετε ότι  $\widehat{E\Delta Z} = 90^\circ$  Μονάδες 10
- B. Αν  $M$  είναι το μέσο της  $EZ$ , να δείξετε ότι  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$  Μονάδες 10
- Γ. Να δείξετε ότι οι γωνίες  $A\Gamma E$  και  $AZ\Delta$  είναι παραπληρωματικές Μονάδες 5

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$ , οι διχοτόμοι των γωνιών  $A$  και  $\Delta$  τέμνονται στο  $E$  και οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο  $Z$ . Αν οι προεκτάσεις των  $AE$  και  $BZ$  τέμνουν τη  $\Gamma\Delta$  στα  $\Theta$  και  $H$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι:



- A. Τα τρίγωνα  $A\Delta\Theta$  και  $B\Gamma H$  είναι ισοσκελή Μονάδες 10
- B. Τα  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των  $A\Theta$  και  $BH$  αντίστοιχα Μονάδες 5
- Γ.  $EZ \parallel AB$  Μονάδες 10

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Να αποδειχτεί ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της Μονάδες 10
- B. Τι λέγεται διάμεσος τραπεζίου Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηριστούν με σωστό (Σ), λάθος(Λ) οι πιο κάτω προτάσεις:
  - α. Έγκεντρο τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών
  - β. Αν δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά τότε  $\delta = R + \rho$  όπου  $\delta$  η διάκεντρος των δύο κύκλων με ακτίνες  $R, \rho$
  - γ. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα
  - δ. Οι διαγώνιες παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του
  - ε. Μια εγγεγραμμένη σε κύκλο γωνία είναι  $35^\circ$ , τότε το τόξο στο οποίο βαίνει είναι  $17,5^\circ$

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $A\Gamma = A'\Gamma'$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $A\Delta = A'\Delta'$ , όπου  $A\Delta, A'\Delta'$  διχοτόμοι. Να αποδείξετε ότι:

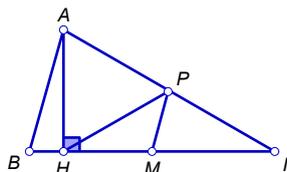
- A.  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- B.  $B\Gamma = B'\Gamma'$  και
- Γ.  $AB = A'B'$

Μονάδες 25

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $A\Gamma > AB$  και  $AH$  το ύψος του. Αν  $M$  και  $P$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα να δείξετε ότι:

- A.  $PM \parallel AB$
- B. το τρίγωνο  $P\Gamma H$  είναι ισοσκελές
- Γ.  $\widehat{HPM} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$



Μονάδες 8

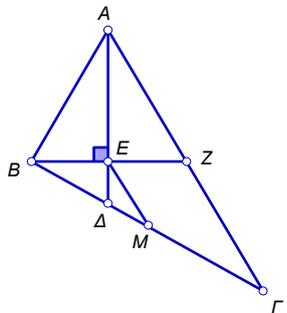
Μονάδες 8

Μονάδες 9

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $A\Gamma = 2AB$ . Από το  $B$  φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο  $A\Delta$  που την τέμνει στο  $E$  και την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Να δείξετε ότι:

- A.  $ABZ$  ισόπλευρο τρίγωνο
- B.  $EZ = \frac{AB}{2}$
- Γ. αν  $M$  μέσο της  $B\Gamma$  τότε  $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$  και  $EM \parallel A\Gamma$
- Δ.  $\widehat{\Delta EM} = 30^\circ$



Μονάδες 5

Μονάδες 5

Μονάδες 10

Μονάδες 5

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$

Μονάδες 10

B. Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν είναι σωστές και το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες :

α. Ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι πάντοτε ρόμβος.

β. Δύο γωνίες με πλευρές κάθετες είναι πάντοτε ίσες.

γ. Σε ένα ισόπλευρο τρίγωνο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται.

δ. Κάθε τετράγωνο είναι και ρόμβος.

ε. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η διάμεσος ισούται πάντοτε με το μισό της υποτεινούσας.

Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει  $\hat{\Gamma}_{εξ} = 120^\circ$  και  $\hat{A} = 3 \cdot \hat{B}$ .

A. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου.

Μονάδες 12

B. Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου αυτού, να αποδείξετε ότι  $AM=AG$ .

Μονάδες 13

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ προς το μέρος του Δ και πάνω στην προέκταση παίρνουμε τμήμα  $\Delta K = A\Delta$ . Επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ προς το μέρος του Μ και πάνω στην προέκταση παίρνουμε τμήμα  $MN = AM$ .

A. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΝΓ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 10

B. Να αποδείξετε ότι  $\Delta M = \frac{KN}{2}$

Μονάδες 5

Γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΚΝΓ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$  και έστω Μ το μέσο της υποτεινούσας του ΒΓ. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο της ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ.

A. Να αποδείξετε ότι  $\Delta M = A\Delta$ .

Μονάδες 12

B. Να αποδείξετε ότι  $A\Delta = \frac{AB}{3}$

Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- Α. Αποδείξτε ότι αν δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες, τότε και τα αποστήματά τους είναι ίσα Μονάδες 9
- Β. Γράψτε τα κριτήρια του παραλληλόγραμμου Μονάδες 8
- Γ. Χαρακτηρίστε Σωστό-Λάθος τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος
- β. Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι  $180^\circ$
- γ. Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μια γωνία του είναι οξεία
- δ. Ο κύκλος  $(\Lambda, \rho)$  εφάπτεται εσωτερικά στον κύκλο  $(\text{K}, \text{R})$  αν  $\text{K}\Lambda = \text{R} + \rho$  Μονάδες 8

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε μία ευθεία ( $\epsilon$ ) θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ. Προς το ίδιο μέρος της ευθείας (ίδιο ημιεπίπεδο) κατασκευάζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ. Αποδείξτε ότι:

$\text{AE} = \text{ΓΔ}$  Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{\text{A}} = 90^\circ$ ) με  $\hat{\text{B}} > \hat{\text{Γ}}$ . Αν ΑΜ διάμεσος και ΑΔ ύψος του, δείξτε ότι  $\widehat{\text{ΜΑΔ}} = \hat{\text{B}} - \hat{\text{Γ}}$ . Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $\text{AB} \parallel \text{ΓΔ}$ ) με  $\text{ΓΔ} = \text{AB} + \text{ΒΔ}$ . Αν Μ το μέσο της διαγωνίου ΑΓ, αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΒΔΜ είναι ορθογώνιο Μονάδες 25

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι : Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτεινουσας και αντίστροφα.

Μονάδες 15

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

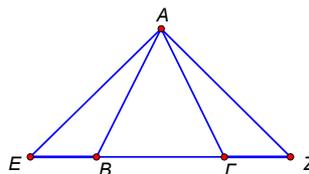
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
- Αν οι διαγώνιες ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε είναι ορθογώνιο.
- Σε ορθογώνιο τρίγωνο το μέσο της υποτεινουσας ισαπέχει από τις κορυφές του.
- Αν ένας ρόμβος έχει ίσες διαγωνίους, τότε είναι τετράγωνο.
- Ένα τραπέζιο που έχει δύο οποιεσδήποτε γωνίες του ίσες έχει και τις διαγώνιες ίσες πάντα.

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και στις προεκτάσεις της  $B\Gamma$  τα σημεία  $E, Z$ , τέτοια ώστε  $BE=Z\Gamma$ . Να αποδειχθεί ότι :

- το τρίγωνο  $AEZ$  είναι ισοσκελές.
- τα τρίγωνα  $ABZ$  και  $A\Gamma E$  είναι ίσα.

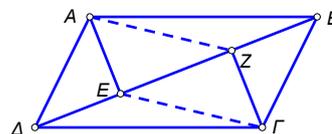


Μονάδες 13 + 12

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Έστω  $AB\Gamma\Delta$  παραλληλόγραμμο και  $E, Z$  οι προβολές αντίστοιχα των  $A, B$  στην διαγώνιο  $\Delta B$ .

- Να αποδείξετε ότι  $AE=Z\Gamma$ .
- Να αποδείξετε ότι το  $A\Gamma E Z$  είναι παραλληλόγραμμο.



Μονάδες 15 + 10

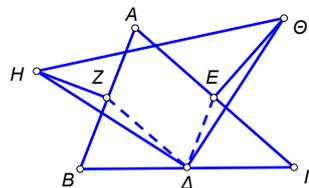
Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} < 90^\circ$  και  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma, \Gamma A, AB$  αντίστοιχα. Στο εξωτερικό του τριγώνου φέρνουμε τα τμήματα

$$ZH \perp AB \text{ με } ZH = \frac{AB}{2}, \quad E\Theta \perp A\Gamma \text{ με } E\Theta = \frac{A\Gamma}{2}$$

Να αποδείξετε ότι :

- Το  $AZ\Delta E$  είναι παραλληλόγραμμο.
- $\Delta E=ZH$  και  $\Delta Z=E\Theta$ .
- $\widehat{\Delta ZH} = \widehat{\Delta E\Theta}$ .
- Το τρίγωνο  $H\Delta\Theta$  είναι ισοσκελές.



Μονάδες 5

Μονάδες 5

Μονάδες 8

Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου, που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτεινύσας. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι κάθετες.
- β.** Δύο τρίγωνα, που έχουν όλες τις γωνίες τους μία προς μία ίσες, είναι πάντα ίσα.
- γ.** Μια οποιαδήποτε διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι και ύψος και διχοτόμος.
- δ.** Δύο παράλληλες ευθείες ( $\epsilon_1$ ) και ( $\epsilon_2$ ) που τέμνονται από μια τρίτη ευθεία ( $\epsilon$ ), σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.
- ε.** Το παραλληλόγραμμο, του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα, είναι ρόμβος.

Μονάδες  $5 \times 2 = 10$ Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  τα οποία έχουν:  $AB = \Delta E$ ,  $\hat{A} = \hat{\Delta}$  και  $AH = \Delta\Theta$  όπου  $AH$  και  $\Delta\Theta$  διχοτόμοι των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  αντίστοιχα.. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα. Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το ύψος του  $AK$ . Αν  $\Delta, E, Z$  τα μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $\Delta EZK$  είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  του οποίου οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $K$ . Από το  $K$  φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς την πλευρά  $B\Gamma$ , η οποία τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

- A.** Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = B\Delta + E\Gamma$ . Μονάδες 12
- B.** Από το  $K$  φέρνουμε  $K\Lambda // AB$ , που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Lambda$  και  $KM // A\Gamma$ , που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $M$ . Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου  $K\Lambda M$  είναι ίση με τη πλευρά  $B\Gamma$ .

Μονάδες 13

**ΘΕΜΑΤΑ**

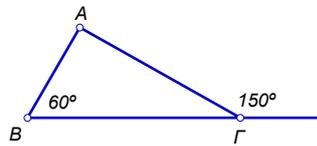
**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

α. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές δηλ.

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2^{\circ}$$

β. Στο τρίγωνο του διπλανού σχήματος είναι

$\hat{B} = 60^{\circ}$ ,  $\hat{\Gamma}_{\text{εξ.}} = 150^{\circ}$ . Να βρείτε τις  $\hat{\Gamma}$  και  $\hat{A}$ .



**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ)

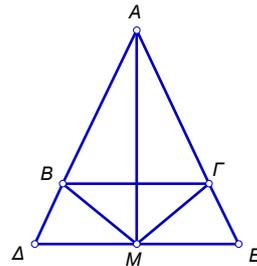
σημεία Δ, Ε στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα ώστε

ΒΔ = ΓΕ και Μ μέσο της ΔΕ. Να δείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές

β. Η ΑΜ διχοτόμος της  $\hat{A}$

γ. Το τρίγωνο ΜΒΓ είναι ισοσκελές.



**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται το τραπέζιο ΑΒΓΔ όπου ΑΒ // ΔΓ με

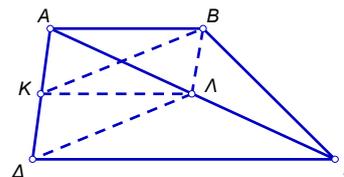
ΑΒ = α, ΔΓ = 2α, Κ μέσο της ΑΔ και Λ

μέσο της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:

α. ΚΛ = α

β. ΑΒΛΚ είναι παραλληλόγραμμο

γ. ΒΚ // ΔΛ.



**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^{\circ}$ )

και σημείο Δ μέσο της ΑΒ. Αν Ε σημείο της

υποτείνουσας ΒΓ ώστε ΔΕ = ΑΔ και ΕΖ ⊥ ΔΕ

όπου Ζ σημείο της ΑΓ. Να δείξετε ότι:

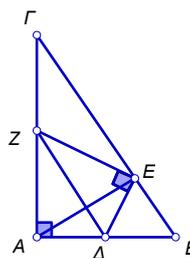
α.  $\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{E}\hat{\Delta}Z$

β. ΔΖ // ΒΓ

γ. ΔΖ μεσοκάθετη της ΑΕ

δ.  $\Delta Z = \frac{B\Gamma}{2}$  και

ε.  $E Z = \frac{A\Gamma}{2}$ .



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτεινούσας Μονάδες 10
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι αληθείς ή με (Λ) αν είναι ψευδείς:
- α.** Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών τριγώνου είναι  $180^\circ$
- β.** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες περιμέτρους, τότε είναι ίσα
- γ.** Αν οι κύκλοι  $(\Lambda, \rho)$ ,  $(\text{K}, R)$  εφάπτονται εσωτερικά, τότε η διάκεντρος  $\delta$  είναι ίση με  $R - \rho$  ( $R > \rho$ )
- δ.** Αν δύο απέναντι γωνίες τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε είναι παραλληλόγραμμο
- ε.** Η διάμεσος ενός τραπέζιου ισούται με το ημιάθροισμα των απέναντι πλευρών του Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Έστω γωνία  $\widehat{xAy}$ . Από το σημείο M της Ay φέρνουμε  $MN \parallel Ax$  (N εσωτερικό της  $\widehat{xAy}$ ) ώστε  $MN = AM$ . Από το N φέρνουμε παράλληλη στην Ay, που τέμνει την Ax στο P. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Η AN είναι διχοτόμος της  $\widehat{A}$  Μονάδες 10
- β.**  $MP \perp AN$  Μονάδες 15

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\widehat{A} = 60^\circ$ ,  $AG = 2AB$ . Φέρνουμε τη διχοτόμο AΔ και από το B κάθετη στην AΔ που τέμνει την AΔ στο E και την AΓ στο Z

- α.** Αποδείξτε ότι  $\widehat{ABZ}$  είναι ισόπλευρο Μονάδες 12
- β.** Αποδείξτε ότι  $\widehat{AB\Gamma} = 90^\circ$  Μονάδες 13

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\widehat{B} = 3\widehat{\Gamma}$ . Φέρνουμε τη  $BE \perp \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\widehat{\Gamma} = 45^\circ$  Μονάδες 9
- β.** το ABΓE είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 9
- γ.**  $AE \perp B\Delta$  Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο γραπτό σας, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό ή Λάθος.
- α.** Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.
- β.** Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
- γ.** Οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.
- δ.** Το άθροισμα δύο γωνιών τριγώνου είναι μικρότερο από  $180^\circ$
- ε.** Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες Μονάδες 10

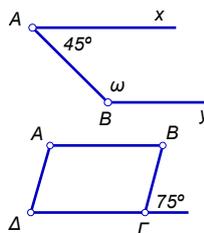
Θέμα 2<sup>ο</sup>

- A.** Να υπολογιστεί η γωνία  $\omega$  σχήματα:

αν είναι:

$$A_x \parallel B_y \quad AB \parallel \Gamma\Delta, A\Delta \parallel B\Gamma$$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας



Μονάδες 16

- B.** Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι:

**α:**  $180^\circ$  **β:**  $270^\circ$  **γ:**  $360^\circ$  **δ:**  $540^\circ$  **ε:** κανένα από τα προηγούμενα

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Μονάδες 9

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 70\text{cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 30\text{cm}$ ,  $A\Delta = B\Gamma = 22\text{cm}$ .

Να βρεθούν:

- α.** Η περίμετρος  $\Pi$  του τραpezίου
- β.** η διάμεσος  $EZ$

Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και προεκτείνουμε την  $BA$  κατά τμήμα  $A\Delta = AB$  και τη  $\Gamma A$  κατά τμήμα  $A\epsilon = A\Gamma$ . Προεκτείνουμε τη διάμεσο  $MA$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ , η οποία τέμνει τη  $\Delta\epsilon$  στο  $K$ . Να αποδείξετε ότι:

- α.**  $\Delta\epsilon = B\Gamma$
- β.** τα τρίγωνα  $ABM$  και  $A\Delta K$  είναι ίσα
- γ.** η  $AK$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $A\Delta\epsilon$ .

Μονάδες 8

Μονάδες 8

Μονάδες 9

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται .  
Μονάδες 15
- B. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:
- α. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι .....και.....
- β. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με.....
- γ. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη τότε σχηματίζουν τις ..... μέρη γωνίες παραπληρωματικές.
- δ. Σε κάθε τετράγωνο οι διαγώνιοί του:  
α) ..... β) ..... γ)..... και δ).....
- ε. Η διάμεσος του τραπέζιου είναι..... προς τις βάσεις του και ίση με.....

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ). Φέρουμε τα ύψη BE και ΓΔ τα οποία τέμνονται στο O. Να αποδείξετε ότι:

- A. Τα τρίγωνα ABE και ΑΔΓ είναι ίσα. Μονάδες 15
- B. Το τρίγωνο BOΓ είναι ισοσκελές . Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με  $AB = 2 \cdot BΓ$  . Από την κορυφή A φέρνουμε ΑΕ κάθετη στη BΓ. Έστω Η , Ζ μέσα των AB και ΓΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- A. Το ΗBΓΖ είναι ρόμβος. Μονάδες 7
- B. Το  $EΗ = \frac{AB}{2}$  . Μονάδες 5
- Γ. Το ΗZE είναι ισοσκελές τρίγωνο. Μονάδες 5
- Δ. Η EZ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΕΓ. Μονάδες 8

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\beta > \gamma$  και τα μέσα Δ , E , Z των πλευρών του AB , ΑΓ , BΓ αντίστοιχα . Φέρουμε το ύψος AK και έστω Θ το σημείο τομής της ΔE με την AZ. Να αποδείξετε ότι:

- A. Το τετράπλευρο ΔEZK είναι ισοσκελές τραπέζιο. Μονάδες 8
- B. Το τετράπλευρο ΑΔZE είναι ορθογώνιο Μονάδες 4
- Γ.  $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$  . Μονάδες 7
- Δ. Αν  $\widehat{AZB} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$  τότε ισχύει  $BK = \frac{B\Gamma}{4}$  Μονάδες 6

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Ένα τετράπλευρο που έχει μόνο δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες είναι παραλληλόγραμμο.
- β.** Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μια γωνία του ορθή.
- γ.** Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών του γωνιών.
- δ.** Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσάς του.
- ε.** Οι διαγώνιοι ενός τραapeζίου είναι ίσες. Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Έστω  $M$  και  $N$  τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Φέρουμε  $MD$  και  $NE$  κάθετες στη  $B\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- A.** Τα τρίγωνα  $MBD$  και  $N\Gamma E$  είναι ίσα. Μονάδες 15
- B.** Το  $ME = ND$ . Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τραpezίο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB \parallel \Gamma\Delta$  και  $AB > \Delta\Gamma$ . Φέρουμε τα ύψη του  $\Delta E$  και  $\Gamma Z$ . Αν  $A = 60^\circ$  και  $AB = 10\alpha$ ,  $\Gamma\Delta = 6\alpha$ .

- A.** Να αποδείξετε ότι:  $AE = BZ = 2\alpha$ . Μονάδες 10
- B.** Να υπολογίσετε το  $A\Delta$  συναρτήσει του  $\alpha$ . Μονάδες 8
- Γ.** Να υπολογίσετε την περίμετρο του τραpezίου συναρτήσει του  $\alpha$ . Μονάδες 7

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $\Delta$ ,  $M$  τα μέσα των πλευρών  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στην προέκταση της πλευράς  $AB$  προς το  $B$  παίρνουμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $BE = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι:

- A.** Το τρίγωνο  $\Delta M\Gamma$  είναι ισοσκελές. Μονάδες 9
- B.**  $BE = \Delta M$  Μονάδες 6
- Γ.** Το  $B\Delta M E$  είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 5
- Δ.** Η  $\Delta E$  τέμνει τη  $BM$  στο μέσον της. Μονάδες 5

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να δείξετε ότι: Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους Μονάδες 10
- B.** Να χαρακτηρίσετε με Σ (σωστό) ή Λ (λάθος) τις ακόλουθες προτάσεις:
- α.** Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με την υποτείνουσα.
- β.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.
- γ.** Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.
- δ.** Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
- ε.** Αν δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με δύο πλευρές ενός άλλου ορθογωνίου τριγώνου, τότε τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα

Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  και  $M, K$  τα μέσα των  $B\Gamma$  και  $EZ$  αντίστοιχα, αν  $AB = \Delta E$ ,  $B\Gamma = EZ$  και  $AM = \Delta K$ .

Να δείξετε ότι:

- A.** Τα τρίγωνα  $AMB$  και  $\Delta KE$  είναι ίσα Μονάδες 12
- B.** Τα τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $\Delta EZ$  είναι ίσα Μονάδες 13

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με κέντρο  $O$ . Αν  $E$  και  $Z$  τα μέσα των  $OA$  και  $OG$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

- A.** Το  $BE\Delta Z$  είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 13
- B.** Αν  $A\Gamma = 2B\Delta$  το  $BE\Delta Z$  είναι ορθογώνιο Μονάδες 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB < A\Gamma$ ),  $A\Delta$  το ύψος του και  $K, \Lambda, M$  τα μέσα των  $AB, A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

- A.** Το  $K\Lambda M\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο Μονάδες 13
- B.** Αν  $AB = 8$ ,  $B\Gamma = 10$  και  $\widehat{BA\Delta} = 30^\circ$ , να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπεζίου

Μονάδες 12

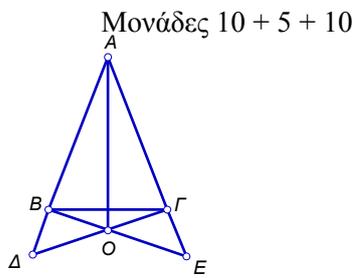
**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1°**

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι ίσο με 2 ορθές γωνίες,
- B. Να διατυπώσετε τον ορισμό του τραπέζιου.
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιο σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, «ν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α. Δύο τρίγωνα, που έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία και μία γωνία του ενός είναι ίση με μία γωνία του άλλου είναι πάντοτε: ίσα.
- β. Το σημείο τομής των διαμέσων ενός τριγώνου λέγεται ορθόκεντρο.
- γ. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτείνουσες και μία κάθετη πλευρά του ενός είναι ίση με μία κάθετη πλευρά του άλλου τότε είναι ίσα .
- δ. Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν πλευρές τους παράλληλες μία προς μία είναι ίσες.
- ε. Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ίση με 180°.

**Θέμα 2°**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών ΑΒ , ΑΓ προς τα Β, Γ παίρνουμε τα σημεία Δ , Ε αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ.

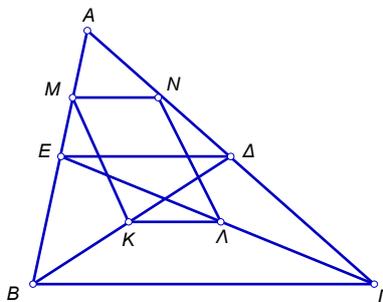


- α. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΒΓΔ και ΒΓΕ είναι ίσα
- β. Αν οι ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο Ο δείξτε ότι τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές
- γ. Δείξτε ότι η ΑΟ διχοτομεί τη γωνία Α

Μονάδες 10 + 6 + 9

**Θέμα 3°**

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ τα μέσα των διαμέσων του ΒΔ , ΓΕ αντίστοιχα. Αν τα Μ , Ν είναι τα μέσα των ΑΕ και ΑΔ αντίστοιχα.:

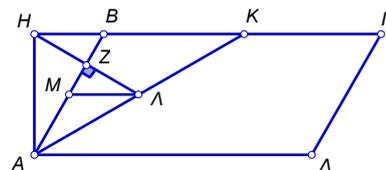


- α. Δείξτε ότι το ΒΕΔΓ είναι τραπέζιο.
- β. Δείξτε ότι  $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{4}$
- γ. Δείξτε ότι το ΚΛΝΜ είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 5+ 10 + 10

**Θέμα 4°**

Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με  $\hat{A} = 60^\circ$  φέρνουμε την διχοτόμο ΑΚ της γωνίας Α όπου Κ σημείο της ΒΓ. Έστω Λ μέσον της ΑΚ και Μ το μέσον της ΑΒ. Φέρνουμε από το Λ την ΛΖ κάθετη στο ΑΒ και προεκτείνουμε το ΛΖ κατά ευθύγραμμο τμήμα ΖΗ=ΛΖ.



- α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΑΚ είναι ισοσκελές. Μονάδες 10
- β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΑΜ είναι ισόπλευρο . Μονάδες 10
- γ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΛΑΗ είναι εγγράψιμο σε κύκλο Μονάδες 5

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Μονάδες 15
- B.** Να σημειώσετε αν είναι Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Δυο τρίγωνα που έχουν τις τρεις γωνίες τους ίσες μια προς μια, είναι ίσα.
- β.** Αν οι διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες, τότε είναι ορθογώνιο.
- γ.** Η διάμεσος ενός τραapeζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του τραapeζίου και ίση με το ημίθροισμά τους.
- δ.** Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι και ύψος, τότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.
- ε.** Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δυο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου. Μονάδες  $5 \times 2$

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ( $AB = AG$ ). Προεκτείνουμε την βάση ΒΓ προς το μέρος του Β κατά τμήμα ΒΔ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ, ώστε να ισχύει  $BD = GE$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{A}$  τέμνει την ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Μονάδες 13
- β.**  $DE = BG$ . Μονάδες 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$ . Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα και ΑΗ το ύψος προς την υποτείνουσα, να αποδείξετε ότι :

- α.**  $EZ = AG$ . Μονάδες 13
- β.**  $HG = \frac{BG}{4}$ . Μονάδες 12

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι αν σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο μία οξεία γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε

η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας.

Μονάδες 13

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις σωστές (Σ) ή λάθος (Λ)

**α.** Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι ίσες

**β.** Οι διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του

**γ.** Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου είναι ίσες

**δ.** Το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών τριγώνου ισαπέχει από τις πλευρές του.

Μονάδες 12

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και  $M$  το μέσον της βάσης  $B\Gamma$ .

**A.** Αν  $M\Delta$ ,  $ME$  είναι οι αποστάσεις του  $M$  από τις πλευρές  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα να δείξετε

ότι:  $M\Delta = ME$

Μονάδες 13

**B.** Να δείξετε ότι η  $AM$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta ME$

Μονάδες 12

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $A\Delta$ .

**A.** Αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB$ ,  $A\Gamma$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι  $\widehat{E\Delta Z} = \hat{A} = 90^\circ$

Μονάδες 13

**B.** Αν  $\hat{B} = 30^\circ$  να αποδείξετε ότι:  $AZ = \frac{EZ}{2}$

Μονάδες 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι

$AB = 2B\Gamma$  και  $\hat{B} > 90^\circ$ . Φέρνουμε

την  $AE \perp B\Gamma$  και έστω  $Z$ ,  $H$  τα μέσα

των  $\Delta\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα όπως

φαίνεται στο σχήμα. Να δείξετε ότι:

**A.** Το  $H\beta\Gamma Z$  είναι ρόμβος

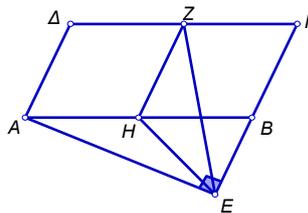
Μονάδες 8

**B.**  $HZ = HB = HE$

Μονάδες 8

**Γ.** Η  $EZ$  είναι διχοτόμος της  $\widehat{HE\Gamma}$

Μονάδες 9



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Να αποδείξετε ότι: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Μονάδες 15

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν , γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

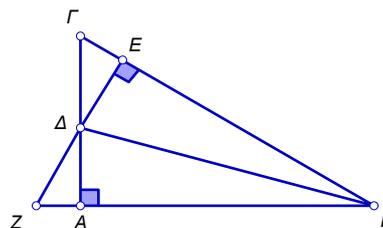
- α.** Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής .
- β.** Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοί του διχοτομούνται και τέμνονται κάθετα .
- γ.** Το άθροισμα των γωνιών κυρτού  $n - γώνου$  είναι ίσο με  $2n$  ορθές .
- δ.** Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους
- ε.** Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια κάθετη πλευρά του είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας τότε η απέναντι γωνία του είναι ίση με  $30^\circ$  .

Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος  $B\Delta$  της γωνίας  $B$ .

Φέρνουμε  $\Delta E \perp B\Gamma$  και προεκτείνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα  $E\Delta$  ,  $BA$  τα οποία τέμνονται στο σημείο  $Z$ . Να αποδείξετε ότι:



**A.**  $A\Delta = \Delta E$

Μονάδες 10

**B.**  $BZ = B\Gamma$

Μονάδες 15

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και έστω  $M$  ,  $K$  τα μέσα των  $AB$  ,  $\Delta\Gamma$  αντίστοιχα .

**A.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $AM\Gamma K$  είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 10

**B.** Αν η  $B\Delta$  τέμνει τις  $AK$  ,  $\Gamma M$  στα σημεία  $\Lambda$  ,  $P$  αντίστοιχα να δείξετε ότι:

**α.** Τα  $AK$  και  $M\Gamma$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $B\Delta$

Μονάδες 5

**β.**  $A\Lambda = 2\Lambda K$

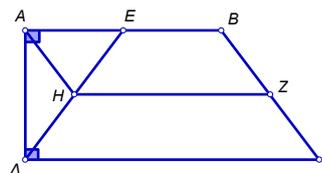
Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$

και  $AB = a$  ,  $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}a$  . Αν  $E$  ,  $Z$  ,  $H$  είναι τα μέσα

των  $AB$  ,  $B\Gamma$  ,  $\Delta E$  αντίστοιχα να αποδείξετε ότι:



**A.**  $HZ = a$

Μονάδες 10

**B.** Το  $ABZH$  είναι παραλληλόγραμμο

Μονάδες 5

**Γ.** Το  $EBZH$  είναι ισοσκελές τραπέζιο

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα γωνιών τριγώνου είναι 2 ορθές Μονάδες 11
- B. Να δοθούν οι ορισμοί του ρόμβου και του τραπεζίου Μονάδες 6
- Γ. Να συμπληρωθούν τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:
- α. Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι ..... Μονάδες 2
- β. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μία γωνία του ισούται με  $30^\circ$ , τότε η απέναντι πλευρά του είναι ίση με ..... Μονάδες 2
- γ. Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων ενός τραπεζίου είναι ..... και ίσο με ..... Μονάδες 4

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:

- α. από τη βάση Μονάδες 12
- β. από τις ίσες πλευρές Μονάδες 13

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = ΑΓ) φέρνουμε το ύψος του ΑΔ και προεκτείνουμε τη ΒΓ κατά τμήμα ΓΜ = ΒΓ. Αν Κ είναι το μέσο του ΑΜ και η ΔΚ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

- α. ΚΓ // ΑΒ Μονάδες 3
- β. τα τρίγωνα ΕΒΔ και ΔΚΓ είναι ίσα Μονάδες 10
- γ. το ΚΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 5
- δ.  $ΕΔ = \frac{ΑΜ}{2}$  Μονάδες 7

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{Α} = 90^\circ$ ) με  $\hat{Β} = 30^\circ$  η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

- α. ΜΔ = ΑΔ Μονάδες 12
- β.  $ΜΔ = \frac{ΑΒ}{3}$  Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

Α.

α. Ποιο τετράπλευρο ονομάζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο; Μονάδες 5

β. Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι ορθογώνιου παραλληλογράμμου είναι ίσες  
Μονάδες 12

Β. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, οι εντός και επί ταυτά γωνίες που σχηματίζονται είναι .....

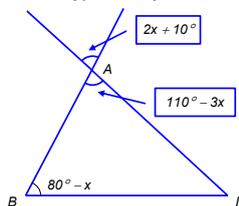
β. Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με .....

γ. Η διάμεσος ορθογώνιου τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίση με .....

δ. Η διάμεσος τραπέζιου είναι ίση με ..... Μονάδες 8

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα να υπολογισθούν



οι γωνίες Α, Β, Γ του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Στις πλευρές Οχ, Ογ οξείας γωνίας χΟγ θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΑ

ΟΓ και ΟΒ, ΟΔ ώστε ΟΑ = ΟΒ και ΟΓ = ΟΔ.

α. Δείξτε ότι τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ είναι ίσα. Μονάδες 12

β. Αν ΑΔ και ΒΓ τέμνονται στο Κ, δείξτε ότι ΟΚ διχοτόμος της γωνίας χΟγ.

Μονάδες 13

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΔ και τα μέσα Κ, Λ, Μ των πλευρών

τ ου ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα.

α. Δείξτε ότι το ΚΛΜΒ είναι παραλληλόγραμμο. Μονάδες 12

β. Δείξτε ότι το ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

## Θέμα 1°

- A. Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.
- B. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό (Σ) ή Λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:
- Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα τότε οι αντίστοιχες χορδές τους είναι ίσες.
  - Οι διαγώνιες κάθε παραλληλογράμμου διχοτομούν τις γωνίες του.
  - Δύο γωνίες που οι πλευρές της μιας είναι κάθετες ή παράλληλες με τις πλευρές της άλλης είναι ίσες
  - Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου ισούται με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών
  - Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιοι είναι διχοτόμοι των γωνιών του.

Μονάδες  $15 + 2 \times 5$ 

## Θέμα 2°

Δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $\beta = \beta'$ ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\delta_a = \delta_a'$ . Να αποδείξετε ότι:

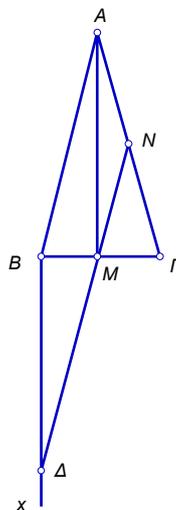
- $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$
- $\alpha = \alpha'$  και  $\gamma = \gamma'$

Μονάδες  $13 + 12$ 

## Θέμα 3°

Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρνουμε την διάμεσο  $AM$  και την ημιευθεία  $Bx$  κάθετη στην  $B\Gamma$  στο ημιεπίπεδο της  $B\Gamma$  που δεν ανήκει το  $A$ . Στην  $Bx$  παίρνω σημείο  $\Delta$  ώστε  $B\Delta = AM$ . Αν  $N$  το μέσον της  $A\Gamma$  να αποδείξετε ότι:

- $M\Delta$  παράλληλη της  $AB$
- $MN$  παράλληλη της  $AB$
- Τα σημεία  $\Delta, M, N$  είναι συνευθειακά



## Θέμα 4°

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $\hat{A} = 60^\circ$  και  $A\Gamma = 2 AB$ . Αν  $A\Delta$  η διχοτόμος της γωνίας  $A$  και η κάθετη  $BE$  προς την  $A\Delta$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$  και  $M$  το μέσον της  $B\Gamma$  να δείξετε ότι:

- Η  $BZ$  είναι διάμεσος του τριγώνου  $AB\Gamma$

$$\beta. EZ = \frac{Z\Gamma}{2}$$

$$\gamma. EM = \frac{A\Gamma}{4}$$

- Το τρίγωνο  $BEM$  είναι ισοσκελές

Μονάδες  $7 + 7 + 7 + 4$

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να δείξετε ότι αν σε τρίγωνο μία διάμεσος ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε αυτό είναι ορθογώνιο με υποτεινούσα την πλευρά αυτή.

Μονάδες 13

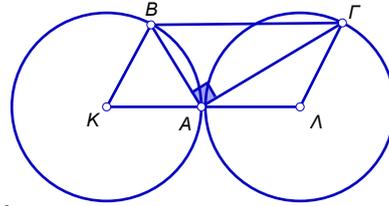
B. Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:

- α. Αν δύο ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα έχουν ίσες υποτεινούσες, είναι ίσα.  
 β. Το παραλληλόγραμμο που έχει ίσες διαγώνιες είναι ρόμβος.  
 γ. Αν οι εξωτερικές γωνίες δύο απέναντι κορυφών τετραπλεύρου είναι παραπληρωματικές, τότε αυτό είναι εγγράφημο σε κύκλο.  
 δ. Το τραπέζιο που έχει δύο διαδοχικές γωνίες ίσες είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνονται οι κύκλοι  $(K,R)$  και  $(\Lambda,R)$  που εφάπτονται εξωτερικά στο A. Αν είναι  $\widehat{BA\Gamma} = 90^\circ$  να δείξετε ότι:



A. Οι γωνίες  $\widehat{AKB}$  και  $\widehat{\Lambda\Lambda\Gamma}$  είναι παραπληρωματικές.

B. Το τετράπλευρο BΓΛK είναι παραλληλόγραμμο.

Μονάδες 13 +12

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Από σημείο Σ εκτός κύκλου  $(O,R)$  φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΣΑ, ΣΒ αυτού και το ευθύγραμμο τμήμα ΣΟ που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Γ. Αν η εφαπτόμενη του κύκλου στο Γ, τέμνει τις ΣΑ, ΣΒ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο ΣΔΕ είναι ισοσκελές.

Μονάδες 12

β. Το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

Μονάδες 13

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Από την κορυφή Β τριγώνου ΑΒΓ με  $AB < AG$  φέρνουμε κάθετη ΒΔ στην διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{A}$  που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν Μ είναι το μέσον της ΒΓ να δείξετε ότι:

α.  $\Delta M \parallel AG$ .

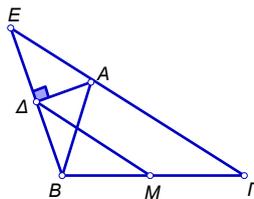
Μονάδες 10

β.  $\Delta M = \frac{AB+AG}{2}$ .

Μονάδες 10

γ.  $\Delta M > \Delta B$ .

Μονάδες 5



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι ίσο με  $180^\circ$

Μονάδες 13

B. Να δώσετε τον ορισμό: τι ονομάζεται παραλληλόγραμμο Μονάδες 6

Γ. Να απαντήσετε στο φύλλο αναφοράς βάζοντας Σ ή Λ δίπλα από κάθε αριθμό

α. Σε δύο παράλληλες ευθείες που τέμνονται από τρίτη ευθεία, οι σχηματιζόμενες εντός εναλλάξ γωνίες είναι ίσες

β. Η εξωτερική γωνία τριγώνου είναι μεγαλύτερη από κάθε μία από τις απέναντι εσωτερικές

γ. Η διάκεντρος δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά είναι ίση με το άθροισμα των ακτίνων τους Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Πάνω στην πλευρά  $B\Gamma$  παίρνουμε σημεία  $M, N$  έτσι ώστε  $BM = \Gamma N$ . Φέρουμε από τα  $B$  και  $\Gamma$  κάθετες προς τις  $AM$  και  $AN$  αντίστοιχα οι οποίες τις τέμνουν στα  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα.

α. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $ABM$  και  $A\Gamma N$  είναι ίσα Μονάδες 15

β. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισοσκελές Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο  $AB\Gamma$  οι διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνονται στο σημείο  $\Delta$

A. Να αποδείξετε ότι:  $\Delta = \frac{A}{2}$  Μονάδες 9

Αν η διχοτόμος  $B\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$  και ισχύουν ότι  $\frac{\widehat{\Gamma_{εξ}}}{2} = 60^\circ$  και

$$\widehat{BE\Gamma} = \frac{5}{2} \cdot \widehat{\Delta}$$

α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ABE$  είναι ισοσκελές Μονάδες 8

Θέμα 4<sup>ο</sup>

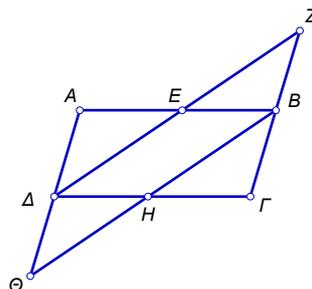
Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με

$\Delta E Z \parallel B H \Theta$ . Να αποδείξετε ότι:

α. Το  $EBH\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο

β.  $ZB = \Delta\Theta$

γ. Οι  $A\Gamma, EH, Z\Theta$  διέρχονται από το ίδιο σημείο



Μονάδες 10

Μονάδες 8

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Να αποδείξετε ότι: Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους. Μονάδες 15
- B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
  - α. Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθυγράμμου τμήματος.....
  - β. Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας.....
  - γ. Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου
    - i. ....
    - ii. ....
  - δ. Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από μία τρίτη, οι εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες είναι.....
  - ε. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με..... Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ (AB || ΓΔ) με AB = AΔ = BΓ = 2 α και  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Αν N, M είναι τα μέσα των AΓ, BΔ αντίστοιχως, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

- α. Το ΔΓ Μονάδες 15
- β. Το MN Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

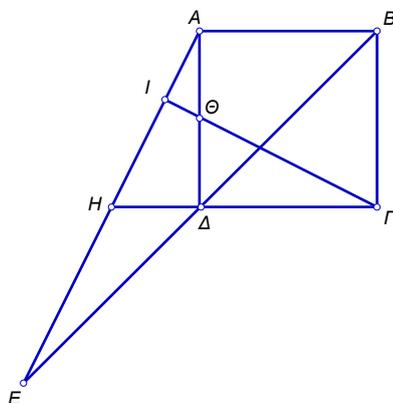
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του AΔ.

- A. Αν E, Z είναι τα μέσα των AB και AΓ, να αποδείξετε ότι:  $\widehat{EZ} = \hat{A} = 90^\circ$ . Μονάδες 12
- B. Αν M είναι το μέσο της EZ να αποδείξετε ότι:  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$  Μονάδες 13

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ. Στην προέκταση της διαγωνίου BΔ παίρνουμε τμήμα ΔE = BΔ. Αν Θ είναι το μέσο της AΔ, τότε να αποδείξετε ότι:

- A. Το H είναι μέσο της AE
- B.  $\hat{A}H\Delta = \hat{\Gamma}\Delta\Theta$
- Γ. Η ευθεία ΓI είναι κάθετη στην AE



- Μονάδες 10
- Μονάδες 8
- Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να δείξετε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν και μόνο αν οι απέναντι γωνίες του ανά δύο είναι ίσες Μονάδες 12
- B.** Τι λέγεται εγγεγραμμένος και τι περιγεγραμμένος κύκλος ενός τριγώνου και πώς λέγονται τα κέντρα αυτών; Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε περίπτωση:
- α.** Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τ' αυτά μέρη γωνίες συμπληρωματικές.
- β.** Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός κυρτού ν-γώνου είναι 4 ορθές.
- γ.** Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι διαγωνιοί του διχοτομούν τις γωνίες του.
- δ.** Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου. Μονάδες 8

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB < AG$  και  $\hat{A} = 60^\circ$  φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ.

- α.** Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να δείξετε ότι:  $MD = ME$  Μονάδες 10
- β.** Αν Κ είναι το μέσο της ΑΓ, να δείξετε ότι:  $DK = \frac{AG - AB}{2}$  Μονάδες 15

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  και Μ μέσο της ΒΓ φέρνουμε τη μεσοκάθετη της ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Δ και την προέκταση της ΒΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:

- A.** ΒΔ διχοτόμος της γωνίας Β Μονάδες 5
- B.** Α μέσο της ΕΒ Μονάδες 10
- Γ.**  $DE = 2 \cdot MD$  Μονάδες 10

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB$ . Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ

και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- A.** Το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 15
- B.** Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε  $\Theta\Delta = \Delta\Gamma - AB$ . Μονάδες 10

## ΘΕΜΑΤΑ

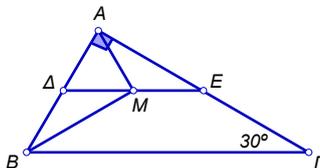
Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου, που φέρεται από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της υποτεινύσας Μονάδες 11
- B.**
- α.** Τι ονομάζουμε παραλληλόγραμμο; (ορισμός) Μονάδες 4
- β.** Τι ονομάζουμε τραπέζιο; (ορισμός) Μονάδες 4
- Γ.** Στον κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να αντιστοιχίσετε το γράμμα Σ αν είναι σωστός ή το γράμμα Λ αν είναι λάθος και να μεταφέρετε την απάντησή σας στην κόλλα σας.
- α.** Οι διαγώνιοι τραπέζιου διχοτομούνται
- β.** Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν τα αποστήματα τους είναι ίσα
- γ.** Από σημείο εκτός ευθείας άγονται τουλάχιστον δύο παράλληλες προς αυτήν Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται γωνία  $\widehat{XO\Psi}$ . Πάνω στην πλευρά  $OX$  παίρνουμε δύο σημεία  $A, B$  και πάνω στην πλευρά  $O\Psi$  δύο σημεία  $\Gamma, \Delta$  τέτοια ώστε να ισχύει:  $O\Gamma = OA$  και  $O\Delta = OB$ . Αν  $M$  τυχόν σημείο της διχοτόμου του της γωνίας  $\widehat{XO\Psi}$ , τότε να αποδείξετε ότι ισχύει:

- α.**  $MA = M\Gamma$  Μονάδες 8
- β.**  $MB = M\Delta$  Μονάδες 8
- γ.** Τα τρίγωνα  $MAB$  και  $M\Gamma\Delta$  είναι ίσα Μονάδες 9

Θέμα 3<sup>ο</sup>

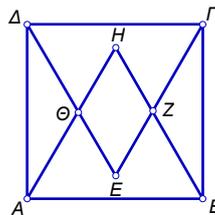
Στο διπλανό σχήμα έχουμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .

Τα σημεία  $\Delta, E$  είναι μέσα των πλευρών  $AB, A\Gamma$  αντιστοίχως και  $M$  είναι το μέσον της  $\Delta E$ . Να αποδείξετε ότι:

- A.**  $\Delta E = AB$  Μονάδες 8
- B.**  $AM \perp BM$  Μονάδες 8
- Γ.** η  $BM$  διχοτομεί τη γωνία  $\hat{B}$  Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και με πλευρές  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  έχουμε κατασκευάσει εντός αυτού ισόπλευρα τρίγωνα  $ABZ, \Gamma\Delta E$  αντιστοίχως.



- A.** Να δειχτεί ότι το τρίγωνο  $\Gamma HB$  είναι ισοσκελές Μονάδες 5
- B.** Να δειχτεί ότι τα τρίγωνα  $\Gamma HB$  και  $\Delta\Theta A$  είναι ίσα Μονάδες 5
- Γ.** Να δειχτεί ότι το τετράπλευρο  $E H Z \Theta$  είναι ρόμβος Μονάδες 10
- Δ.** Να δειχτεί ότι η ευθεία  $\Theta H$  είναι μεσοκάθετος της  $B\Gamma$  Μονάδες 5

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

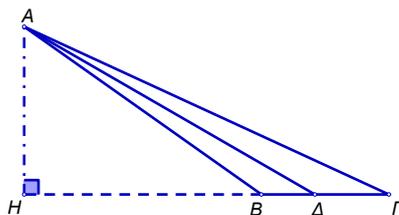
- A.** Να αποδείξετε ότι αν οι διαγώνιοι ενός τετραπλεύρου διχοτομούνται τότε αυτό είναι παραλληλόγραμμο . Μονάδες 10
- B.** Πότε ένα παραλληλόγραμμο ονομάζεται ορθογώνιο , πότε ρόμβος και πότε τετράγωνο; Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Δύο ίσες γωνίες με κοινή κορυφή λέγονται κατακορυφήν
- β.** Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της .
- γ.** Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.
- δ.** Το κέντρο βάρους ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων και η απόστασή του από κάθε κορυφή είναι το  $\frac{1}{3}$  του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου .
- ε.** Αν ο διαγώνιοι ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες τότε αυτό είναι τετράγωνο . Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $A\Delta$  . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $E$  . Αν η παράλληλη από το  $E$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $Z$  , να αποδείξετε ότι  $AE = BZ$  . Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  , η διχοτόμος του  $A\Delta$  και το ύψος του  $AH$  . Αν είναι  $A\Delta = 2 \cdot AH$  να αποδειχθεί ότι  $\hat{B} - \hat{\Gamma} = 120^\circ$



Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

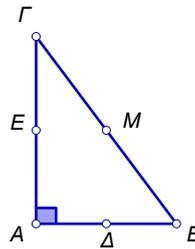
Δίνεται τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  ,  $E$  τυχαίο σημείο της  $\Delta\Gamma$  και  $AZ$  η διχοτόμος της γωνίας  $BAE$  ( $Z$  σημείο της  $B\Gamma$ ). Από το  $\Delta$  φέρνουμε κάθετο στην  $AZ$  που τέμνει την  $AE$  στο  $H$  , την  $AZ$  στο  $\Theta$  και την  $AB$  στο  $I$  . Να δείξετε ότι:

- A.**  $E\Delta = EH$  Μονάδες 10
- B.** Τα τρίγωνα  $A\Delta I$  και  $BAZ$  είναι ίσα Μονάδες 8
- Γ.**  $AE = BZ + \Delta E$  Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- α. Να αποδείξετε ότι, η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρνουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.
- β. Στο διπλανό σχήμα τα σημεία Δ, Ε, Μ είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $AM = ΔΕ$ .

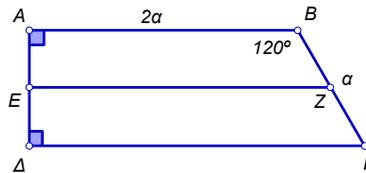
Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $AB // ΓΔ$ . Από το σημείο Δ φέρνουμε  $ΔΖ ⊥ ΒΓ$  και από τυχαίο σημείο Η της βάσης ΔΓ το  $ΗΘ ⊥ ΑΔ$ , το  $ΗΕ ⊥ ΒΓ$  και το  $ΗΙ ⊥ ΔΖ$ .

- α. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΗΙΖΕ είναι ορθογώνιο.
- β. Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΗΘΔ και ΔΙΗ
- γ. Να αποδείξετε ότι  $ΔΘ + ΓΕ = ΓΖ$ .

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $\hat{A} = \hat{Δ} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 120^\circ$ . Αν  $AB = 2α$  και  $ΒΓ = α$  να υπολογίσετε την διάμεσο ΕΖ ως συνάρτηση του α.

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB < ΑΓ$ , η διχοτόμος του ΑΔ και το σημείο Μ μέσο της ΒΓ. Αν το σημείο Ε είναι η προβολή του Β στην ΑΔ να δείξετε ότι:

- α.  $EM // ΑΓ$
- β.  $EM = \frac{ΑΓ - ΑΒ}{2}$
- γ.  $\widehat{ΔΕΜ} = \frac{\hat{A}}{2}$

## ΘΕΜΑΤΑ

## Θέμα 1°

- A.** Να αποδείξετε ότι αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μια ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει  
Μονάδες 12
- B.** Ποιος γεωμετρικός τόπος αντιπροσωπεύει το σύνολο των σημείων και μόνον αυτών που:
- α.** Έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα ενός ευθυγράμμου τμήματος.  
**β.** Έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τις πλευρές μιας γωνίας Μονάδες 3
- Γ.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:
- α.**  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = \dots\dots\dots$   
**β.**  $\hat{\Gamma}_{εξ} = \dots\dots\dots$  και  $\hat{B}_{εξ} = \dots\dots\dots$   
**γ.**  $\hat{A}_{εξ} + \hat{B}_{εξ} + \hat{\Gamma}_{εξ} = \dots\dots\dots$  Μονάδες 4
- Δ.** Να αντιστοιχίσετε τις προτάσεις των στηλών Α και Β

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
<p><b>1.</b> Διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου προς την υποτείνουσα</p> <p><b>2.</b> Ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (<math>\hat{A} = 90^\circ</math>) με <math>\hat{B} = 30^\circ</math></p> <p><b>3.</b> Το τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου</p> <p><b>4.</b> Χωρίζει τη διάμεσο τριγώνου σε δύο τμήματα, από τα οποία το ένα (προς την κορυφή) είναι διπλάσιο από το άλλο</p>	<p><b>α.</b> είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ισούται με το μισό της</p> <p><b>β.</b> ορθόκентρο</p> <p><b>γ.</b> βαρύκентρο</p> <p><b>δ.</b> <math>B\Gamma = 2A\Gamma</math></p> <p><b>ε.</b> είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας</p>

Μονάδες 6

## Θέμα 2°

Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι  $AB = \Gamma\Delta$  και  $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$ . Εξωτερικά του ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΕΑΔ. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Η γωνία ΕΔΓ ισούται με  $\hat{A} + 60^\circ$  Μονάδες 12
- β.** Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές Μονάδες 13

## Θέμα 3°

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ και  $\Gamma\Delta = \frac{3}{2}AB$ . Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ,

ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο ΕΒΓΔ είναι τραπέζιο Μονάδες 2,5
- β.** Το τετράπλευρο ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 12,5
- γ.** Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει την ΓΔ στο Θ, τότε η ΘΔ ισούται με τη διαφορά των βάσεων του τραpezίου Μονάδες 10

## Θέμα 4°

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του με κέντρο Ο. Έστω Α' το αντιδιαμετρικό σημείο της κορυφής Α και Η το ορθόκентρο του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι:

- α.** Το τετράπλευρο ΗΒΑ'Γ είναι παραλληλόγραμμο Μονάδες 7,5
- β.** Το ευθύγραμμο τμήμα ΗΑ' διχοτομεί την πλευρά ΒΓ στο σημείο Κ Μονάδες 2,5

**γ.** Το ευθύγραμμο τμήμα  $OK = \frac{AH}{2}$  Μονάδες 7,5

- δ.** Αν Θ το βαρύκентρο του τριγώνου ΑΒΓ τότε το ΟΗ διέρχεται από το Θ. Μονάδες 7,5

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Διατυπώστε και αποδείξτε το θεώρημα: Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας. Μονάδες 15
- B.** Να συμπληρώσετε σωστά τα κενά των προτάσεων:
- α.** Ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις διαγώνιες ίσες είναι.....
- β.** Δύο χορδές κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν.....
- γ.** Κάθε σημείο της..... μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της.
- δ.** Το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι ..... προς την τρίτη πλευρά και ίσο με.....
- ε.** Όταν μια γωνία ορθογωνίου τριγώνου είναι  $30^\circ$  τότε η απέναντί της ..... είναι ίση με..... Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ γωνία Α είναι τριπλάσια της γωνίας Β. Αν  $\hat{\Gamma}_{\text{εξωτ}} = 144^\circ$ :

- A.** Να υπολογιστούν οι γωνίες του Μονάδες 15
- B.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $\Delta H = B\Delta$  και  $EZ = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι:

- A.**  $AH = AZ$
- B.** τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{B} = 30^\circ$  η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:

- A.**  $M\Delta = A\Delta$
- B.**  $M\Delta = \frac{AB}{3}$  Μονάδες 25

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε το θεώρημα: « Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινούσας » Μονάδες 10
- B.** Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος ;
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα
  - Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 3 ορθές
  - Το μέτρο μιας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μέτρο του αντίστοιχου τόξου της.
  - Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του, διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της
  - Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

- A.** Επιλέξτε τη σωστή απάντηση στην παρακάτω πρόταση:

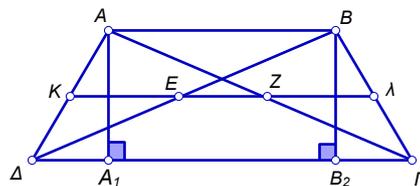
Σε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $B = \Gamma$ ) είναι  $\hat{B} = 40^\circ$ . Τότε η  $\hat{A}$  είναι ίση με:

**A:**  $50^\circ$     **β:**  $40^\circ$     **γ:**  $120^\circ$     **δ:**  $100^\circ$     **ε:**  $150^\circ$     Μονάδες 10

- B.** Στις ίσες πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$ , έτσι ώστε:  $B\Delta = \Gamma E$ . Να αποδειχτεί ότι  $\Gamma\Delta = BE$ . Μονάδες 15

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) είναι  $\hat{A} = \hat{B} = 120^\circ$ . Αν  $AB = 6\text{cm}$ ,  $B\Gamma = 4\text{cm}$  και  $AA_1$ ,  $BB_1$  τα ύψη του από τις κορυφές  $A$  και  $B$ , να υπολογίσετε:

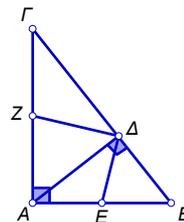


- την πλευρά  $\Gamma\Delta$  Μονάδες 10
- τη διάμεσο  $K\Lambda$  του τραπεζίου Μονάδες 10
- το ευθύγραμμο τμήμα  $E\text{Ζ}$  που ενώνει τα μέσα των διαγωνίων του Μονάδες 5

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ )

και το ύψος του  $A\Delta$ . Αν  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$  τότε:



- Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $A\Delta E$  και  $A\Delta Z$  είναι ισοσκελή με  $AE = \Delta E$  και  $AZ = \Delta Z$  αντίστοιχα. Μονάδες 5
- Να γράψετε τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου  $A\Delta E$  που είναι ίσες μεταξύ τους καθώς και τις γωνίες του ισοσκελούς τριγώνου  $A\Delta Z$  που είναι ίσες μεταξύ τους. Στη συνέχεια να δείξετε ότι  $\widehat{E\Delta Z} = 90^\circ$  Μονάδες 10
- Αφού σχεδιάσετε το ευθύγραμμο τμήμα  $E\text{Ζ}$  να αποδείξετε ότι:  $E\text{Ζ} = \frac{B\Gamma}{2}$  Μονάδες 5
- Αν  $M$  είναι το μέσο του τμήματος  $E\text{Ζ}$  να δείξετε ότι:  $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$  Μονάδες 5

## ΘΕΜΑΤΑ

## Θέμα 1°

- A.** Να αποδείξετε ότι αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας (Σ) αν η πρόταση είναι σωστή και (Λ) αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι το ένα τρίτο του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.
- β.** Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου, που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίση με το μισό της μιας κάθετης πλευράς.
- γ.** Το άθροισμα των γωνιών κυρτού  $n$ -γώνου είναι  $2n-4$  ορθές.
- δ.** Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι κάθετες. Μονάδες  $4 \times 2 = 8$
- Γ.** Να συμπληρώσετε την πρόταση: Μονάδες 2  
 Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι ..... προς την τρίτη πλευρά και ίσο με ..... .

## Θέμα 2°

Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) η μεγάλη του βάση ΑΒ είναι διπλάσια

της πλευράς ΑΔ και η γωνία Β= 60°. Αν δίνεται ότι το μήκος της πλευράς ΑΔ είναι  $\frac{a}{2}$

να υπολογίσετε συναρτήσει του  $a$

- α.** Το μήκος της βάσης ΓΔ του τραπέζιου. Μονάδες 15
- β.** Το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου ΕΖ. Μονάδες 10

## Θέμα 3°

Από την κορυφή Α ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την ημιευθεία Αχ κάθετη στην πλευρά ΑΓ (στο ημιεπίπεδο της ΑΓ που δεν ανήκει το τρίγωνο) και πάνω σε αυτήν παίρνουμε τμήμα ΑΔ=ΒΓ. Αν ΒΚ είναι το ύψος του τριγώνου από την κορυφή Β να δείξετε ότι:

- α.** Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Μονάδες 8
- β.** Η ΒΔ διχοτομεί τη γωνία ΚΒΑ. Μονάδες 12
- γ.** Η γωνία Δ είναι: Μονάδες 5

**A:** 30°    **B:** 60°    **Γ:** 20°    **Δ:** 15°    **E:** 25°

## Θέμα 4°

Σε τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε σημείο Η της πλευράς ΒΓ έτσι ώστε  $BH = \frac{BG}{4}$  και Ε το

μέσο της διαμέσου ΒΔ. Αν από το Δ φέρω παράλληλη στην ΑΒ που τέμνει τη ΒΓ στο Ν τότε να αποδείξετε:

- α.** ότι το Ν είναι μέσο της ΒΓ. Μονάδες 5
- β.** η ΔΝ είναι παράλληλη και ίση με το μισό της ΑΒ Μονάδες 5
- γ.** η ΕΗ είναι παράλληλη και ίση με  $\frac{AB}{4}$  Μονάδες 15

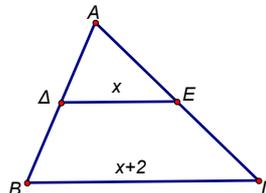
**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1°**

**A.** Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας. Μονάδες 10

**B.** Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις.

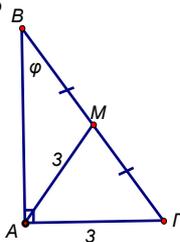
**α.** Αν στο διπλανό σχήμα τα σημεία Δ, Ε είναι αντίστοιχα τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ τότε το x ισούται με:



**A:** 1    **B:** 2    **Γ:** 3    **Δ:** 4    **Ε:** 5

Μονάδες 5

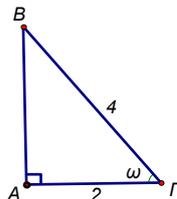
**β.** Στο διπλανό σχήμα η γωνία φ είναι ίση με:



**A:** 20°    **B:** 30°    **Γ:** 40°  
**Δ:** 60°    **Ε:** 70°

Μονάδες 5

**γ.** Στο διπλανό σχήμα η γωνία ω είναι ίση με :

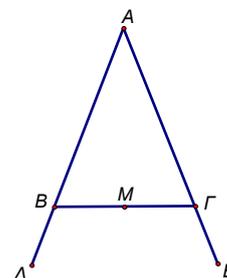


**A:** 20°    **B:** 30°    **Γ:** 40°  
**Δ:** 60°    **Ε:** 70°

Μονάδες 5

**Θέμα 2°**

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Στην προέκταση του ΑΒ προς το μέρος του Β παίρνω τμήμα ΒΔ και στην προέκταση του ΑΓ προς μέρος του Γ παίρνω τμήμα ΓΕ έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ. Έστω επίσης Μ το μέσο της ΒΓ.



- A.** Δείξτε ότι  $\widehat{\Delta B M} = \widehat{E G M}$  Μονάδες 8
- B.** Δείξτε ότι  $M \Delta = M E$  Μονάδες 10

**Γ.** Αν  $\hat{A} = 40^\circ$  να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 7

**Θέμα 3°**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ( $AB < AG$ ). Φέρνω τη διάμεσο ΑΜ και το ύψος ΑΔ. Δείξτε ότι:

- A.**  $\widehat{\Delta A M} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$  Μονάδες 15
- B.** Αν  $\hat{B} = 60^\circ$  τότε  $M \Delta = \frac{B \Gamma}{4}$  Μονάδες 10

**Θέμα 4°**

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $AB \parallel \Gamma \Delta$  και  $\Gamma \Delta = 2AB$ .

- A.** Αν Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ δείξτε ότι  $ZH = \frac{3AB}{2}$
- B.** Αν Ε είναι το μέσο της ΓΔ δείξτε ότι το ΑΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο
- Γ.** Αν η ΖΗ τέμνει τις ΑΕ, ΑΓ στα σημεία Θ και Ι αντίστοιχα, δείξτε ότι  $\Theta I = \frac{AB}{2}$

Μονάδες 7 + 8 + 10

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

Α. Να αποδείξετε την πρόταση : « Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) η μία οξεία γωνία του είναι  $30^\circ$  τότε η απέναντι κάθετη πλευρά του είναι το μισό της υποτεινουσας και αντιστρόφως » .

Μονάδες 16

Β. Αν οι γωνίες  $\omega = 100^\circ - x$  και  $\varphi = 20^\circ + x$  έχουν τις πλευρές τους κάθετες τότε το  $x$  ισούται με:  $\alpha: 40^\circ$ ,  $\beta: 45^\circ$ ,  $\gamma: 50^\circ$ ,  $\delta: 5^\circ$ ,  $\epsilon: 10^\circ$

Μονάδες 3

Γ.

α. Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο όταν οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες .

Σ Λ

Μονάδες 3

β. Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι πάντα εσωτερικό σημείο του

Σ Λ

Μονάδες 3

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ , Α'Β'Γ' έχουν  $\beta = \beta'$  ,  $\hat{A} = \hat{A}'$  και  $\delta_a = \delta_a'$  . Να δείξετε ότι :

α.  $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$  ,

Μονάδες 12

β.  $\alpha = \alpha'$  και  $\gamma = \gamma'$  .

Μονάδες 13

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Φέρνουμε ΑΕ κάθετη στην ΔΒ . Αν τα Κ , Λ ταμésα των ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα δείξτε ότι :

α.  $\widehat{ΚΕΛ} = 90^\circ$ .

Μονάδες 8

β.  $ΚΛ = \frac{ΑΓ}{2}$

Μονάδες 8

γ. Αν  $\widehat{ΒΑΓ} = 30^\circ$  τότε  $ΚΛ = ΒΓ$  .

Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ και τυχαίο σημείο Ε της πλευράς ΔΓ . Φέρνουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\widehat{ΒΑΕ}$  που τέμνει τη ΒΓ στο Ζ . Από το Ε φέρνουμε κάθετη στην ΑΖ που τέμνει την ΑΖ στο Κ (το Κ εσωτερικό της ΑΖ) και την προέκταση της ΑΒ στο Θ και την ΕΗ  $\perp$  ΑΒ .

Να δείξετε ότι :

α. ΑΕ = ΑΘ

Μονάδες 8

β. Τα τρίγωνα ΘΗΕ , ΑΒΖ είναι ίσα .

Μονάδες 8

γ. ΑΕ = ΔΕ + ΒΖ .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

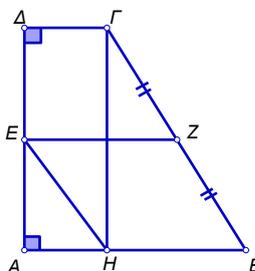
Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Να δώσετε τον ορισμό του παραλληλογράμμου Μονάδες 5
- B. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτεινουσας Μονάδες 10
- Γ. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε με (Σ) τη σωστή και με (Λ) τη λανθασμένη.
  - α. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα με ίσες περιμέτρους είναι ίσα.
  - β. Κάθε τετράπλευρο που έχει ίσες διαγώνιους είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
  - γ. Σε κάθε τραπέζιο η ευθεία που ενώνει τα μέσα των δύο βάσεων είναι κάθετη σε αυτές.
  - δ. Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες.
  - ε. Το μέσο της υποτεινουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου ισαπέχει από τις τρεις κορυφές του τριγώνου. Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τετράπλευρο ABΓΔ με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και  $AB > \Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma = 4\Gamma\Delta$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ . Φέρνουμε την  $\Gamma H \perp AB$  ( $\Gamma H$  κάθετη  $AB$ ) και E μέσο  $A\Delta$ , Z μέσο  $B\Gamma$ . Να δείξετε ότι:

- α. Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τραπέζιο
- β.  $HB = EZ = 2\Gamma\Delta$
- γ. Το τετράπλευρο EHBZ είναι παραλληλόγραμμο

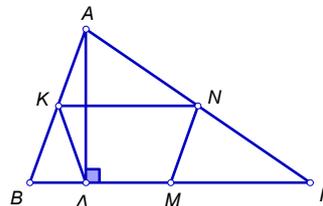


- Μονάδες 5
- Μονάδες 10
- Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και  $\hat{B} < 90^\circ$ . Αν είναι το M μέσο της  $B\Gamma$ , το N μέσο της  $A\Gamma$ , το K μέσο της  $AB$  και το  $\Delta$  ύψος από την κορυφή A να αποδείξετε ότι:

- α.  $K\Delta MN$  ισοσκελές τραπέζιο
- β.  $\Delta M = MN$
- γ.  $AB = 2\Delta M$

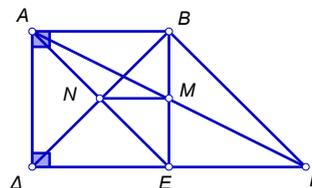


- Μονάδες 10
- Μονάδες 10
- Μονάδες 5

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τραπέζιο ABΓΔ ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\Delta\Gamma = 2AB$  και  $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$ . Φέρνουμε  $BE \perp \Delta\Gamma$  που τέμνει την διαγώνιο  $A\Gamma$  στο M. Φέρνουμε την  $AE$  που τέμνει την  $B\Delta$  στο N. Να αποδείξετε ότι:

- α.  $\hat{\Gamma} = 45^\circ$
- β. Το τετράπλευρο ABΓE είναι παραλληλόγραμμο
- γ.  $AE$  κάθετη στη  $B\Delta$
- δ.  $MN = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$



- Μονάδες 5
- Μονάδες 5
- Μονάδες 10
- Μονάδες 5



