ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν συν(α + β) ≠ 0, συνα ≠ 0 και συνβ ≠0 να δείξετε ότι $εφ(α + β) = \dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$

Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σ(σωστό) ή ως Λ(Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει: $συν(α + β) = ημα \cdot ημβ - συνα \cdot συνβ$

β. Αν α >1 τότε η συνάρτηση $f(x) = α^x$ είναι γνησίως αύξουσα

γ. Αν α >0 με α ≠ 1, τότε για οποιουσδήποτε $θ_1$, $θ_2$ >0 ισχύει:

$$\log_α \frac{θ_1}{θ_2} = \log_α θ_1 - \log_α θ_2$$

δ. Ο αριθμός 2 είναι ρίζα της εξίσωσης: $x^3 - 3x^2 + 4 = 0$ Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Α. Να δείξετε ότι: $\dfrac{συνα \cdot ημ2α}{1 + συν2α} = ημα$ Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $2ημx = συν2x - 1$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Α. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2αx^2 - βx - 1$

Αν έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x): (x +1)είναι 2 , να δείξετε ότι α = 1 και β = 2 Μονάδες 10

Β. Για α = 1 και β = 2

α. Να λυθεί η ανίσωση P(x) ≤ 0 Μονάδες 10

β. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση του P(x) τέμνει τον x΄x

Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(e^x - 1)$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης Μονάδες 5

Β. Να λυθεί η εξίσωση: f(x) = ln2 Μονάδες 10

Γ. Να λυθεί η ανίσωση: f(x) < x Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho)=0$. Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τους παρακάτω τύπους ως Σωστό ή Λάθος

α. $\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha$

β. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha - 1$

γ. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

δ. $\eta\mu(\alpha-\beta) = \eta\mu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta$

ε. $\sigma\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\beta - 1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha}$ Μονάδες 5

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες. (Οι δοσμένοι λογάριθμοι θεωρείται ότι έχουν νόημα)

α. $\log 10 =$ ……

β. $e^{\ln\theta} =$ ……

γ. $\log(\theta_1\cdot\theta_2) =$ ……

δ. $\log\dfrac{\theta_1}{\theta_2} =$ ……

ε. Αν $9^x = 3$ τότε $x =$ …… Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Για τη γωνία x με $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ ισχύει: $5\sigma\upsilon\nu 2x - 18\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

α. Να βρείτε το συνx Μονάδες 10

β. Αν $\sigma\upsilon\nu x = -\dfrac{1}{5}$ να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημ2x, συν2x και εφ2x.

Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^2 + \beta$

Α. Αν $P(-1) = 0$ και $P(2) = 0$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10

Β. Αν $\alpha = -5$ και $\beta = 4$, τότε:

α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ Μονάδες 8

β. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της P(x) βρίσκεται κάτω από τον άξονα x΄x. Μονάδες 7

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(11x^2 - 7x + 10) - \log x^2 - 1$

α. Να βρείτε τα x για τα οποία ορίζεται η f Μονάδες 7

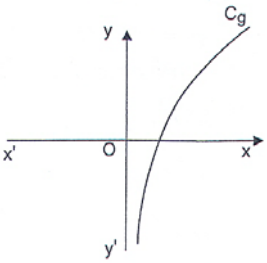
β. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα x΄x

Μονάδες 18

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχτεί ότι $εφ(α + β) = \dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$ Μονάδες 10



Β. Δίνεται η γραφική παράσταση

της συνάρτησης $g(x) = \log_α x$ με $α > 1$

α. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της;

β. Τι είδους μονοτονία έχει;

γ. Έχει ακρότατα;

δ. Ποιο είναι το σημείο τομής της με τον άξονα x΄x;

ε. Γράψτε τον τύπο h(x) της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση είναι συμμετρική με τη γραφική παράσταση της g με άξονα συμμετρίας την ευθεία που διχοτομεί τις γωνίες $\widehat{xOy}$ και $\widehat{x'Oy'}$ δηλαδή την ευθεία y = x Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Το πολυώνυμο $P(x) = (x-2)^{2010} + x^{2009} - 2$ έχει ρίζα το 1

β. Στην Α.Π 3, β, 13, … ο αριθμητικός μέσος του 1ου και του 3ου όρου είναι β = 9

γ. Η αριθμητική πρόοδος −2 , 1, 4, ….. έχει άθροισμα των 10 πρώτων όρων της $S_{10} = 25$

δ. Ισχύει ο τύπος $συν(α + β) = συνα \cdot συνβ - ημα \cdot ημβ$

ε. Η τριγωνομετρική εξίσωση εφx = εφα έχει λύσεις τις $x = 2κπ + α$ με $κ \in Z$. Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Δίνεται ότι ισχύει: $ημx + \sqrt{3} \cdot συνx = 2$ (1)

α. Να δείξετε πως η (1) είναι ισοδύναμη με την $ημ\left(x + \dfrac{π}{3}\right) = 1$

β. Να λυθεί η εξίσωση (1) στο [0, π). Μονάδες 10

Β. Δίνεται ότι ισχύει: $3 \cdot συν^2\dfrac{x}{2} + συν2x = 3 \cdot ημ^2\dfrac{x}{2} - 2$ (2)

α. Να δείξετε πως η (2) είναι ισοδύναμη με την $2 \cdot συν^2x + 3 \cdot συνx + 1 = 0$

β. Να λυθεί η εξίσωση (2)

γ. Ποιες μορφές λύσεων απ' αυτές που βρήκατε αντιστοιχούν σε γωνίες των οποίων η τελική πλευρά τους βρίσκεται πάνω στον άξονα των συνημιτόνων του τριγωνομετρικού κύκλου και με ποια μορφή θα μπορούσατε να τις εκφράσετε με έναν τύπο Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 + αx + β$. Επίσης δίνεται ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου με το x είναι ίσο με $-\dfrac{1}{2}$ και το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 1$

Α. Να υπολογιστούν τα α, β Μονάδες 10

Β. Αν α = 2 και $β = -\dfrac{1}{2}$ τότε:

α. Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου P(x) και να γραφεί το P(x) σε παραγοντοποιημένη μορφή με παράγοντες πολυώνυμα 1ου βαθμού Μονάδες 10

β. Να λυθεί η ανισότητα $P(x) \geq x^3 - \dfrac{1}{2}$ Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $e^{\frac{1}{2}f(x)\ln e^2 + \ln\frac{1}{2} + \ln 2} = e^{2x} - 1$

Α. Να αποδειχτεί ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ και να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

Β. Να βρεθεί για ποια τιμή του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον x΄x

Γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq x$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).

Μονάδες 10

Β. Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν είναι σωστές και το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες :

α. Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

β. Η συνάρτηση $f(x) = e^x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

γ. Ισχύει $συν2α = 1 - 2ημ^2α$, για κάθε $α \in \mathbb{R}$.

δ. Αν α, β, γ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, τότε β = α + γ.

ε. Αν α + β + γ = 0, τότε το πολυώνυμο $P(x) = αx^3 + βx + γ$ έχει ρίζα το 1.

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - αx^2 - βx + 2$

Α. Αν το P(x) έχει παράγοντα το x – 2 και το υπόλοιπο της διαίρεσής του με το x–1 είναι –2, να βρείτε τις τιμές των α και β. Μονάδες 13

Β. Για α = 3 και β = 3 να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 Μονάδες 12

Θέμα 3ο

Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{ημ2x}{1 - συν2x} \cdot \dfrac{1 - συνx}{συνx}$.

Α. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες έχει νόημα η παράσταση

Μονάδες 5

Β. Να δείξετε ότι $A = εφ\dfrac{x}{2}$, για κάθε x για το οποίο έχει νόημα η παράσταση

Μονάδες 10

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $4A \cdot συν\dfrac{x}{2} + 1 = συνx$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log\left(2^x + 1\right) + \log\left(2^x - 1\right)$ και $g(x) = \log\left(2^{x+1} + 7\right)$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους. Μονάδες 4

β. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = g(x). Μονάδες 7

γ. Βρείτε για ποια $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $g(x) > 0$. Μονάδες 4

δ. Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} f(x) = \log\left(2^y + 2\right) \\ g(y) = \log\left(21 - 3 \cdot 2^{2x}\right) \end{cases}$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ δια $x-\rho$ είναι $P(\rho)$

Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος

α. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

β. Η παράσταση $2x^5 + x^{-2} + 1$ είναι πολυώνυμο

γ. $\alpha^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\alpha^2}$ με $\alpha > 0$

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \log_2 x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$

ε. Αν $x-\rho$ παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ τότε το ρ είναι ρίζα του $P(x)$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $2\eta\mu^2\frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu 2x = 1$ (1)

Α. Να δείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$

Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση (1) Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - (\alpha - 3)x^3 + \beta x^2 - x - 2$

Α. Να βρεθούν τα α και β αν $x + 1$ παράγοντας του $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x-1)$ είναι -4 Μονάδες 8

Β. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = -1$, να λύσετε:

α. την εξίσωση $P(x) = 0$ Μονάδες 8

β. την ανίσωση $P(x) \leq 0$ Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln(e^x + 2)$

α. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων Μονάδες 5

β. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + g(x) = \ln 4$ Μονάδες 10

γ. Να λυθεί η ανίσωση: $2 \cdot f(x) < g(x) + \ln 4$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – ρ αν και μόνον αν το ρ είναι

ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνον αν P(ρ) = 0 Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας, καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις με **Σ** αν είναι σωστή ή με **Λ** αν είναι λάθος .

α. $\left(\sqrt{3}\right)^{-9} < \left(\sqrt{3}\right)^{-12}$

β. Αν η εξίσωση $\alpha x^5 + \beta x^4 + \gamma x^3 + \delta x^2 + x + 6 = 0$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in R)$, με $\alpha \neq 0$ έχει 5 ρίζες στο R, τότε αυτές θα ανήκουν στο σύνολο $A = \{\pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \pm 6\}$.

γ. Η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \ln x^4$ γράφεται πάντα $f(x) = 4\ln x$.

δ. Κάθε μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

ε. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}$ Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Έστω η γωνία α με $90^o < \alpha < 180^o$, για την οποία ισχύει :

$$\sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu(\alpha + 30°) + \eta\mu(\alpha + 30°) = -\frac{6}{5}.$$

α. Να αποδείξετε ότι : $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\dfrac{3}{5}$. Μονάδες 9

β. Να βρείτε **:** **i.** το ημα **ii.** την $\varepsilon\varphi\dfrac{\alpha}{2}$. Μονάδες 8+8

Θέμα 3ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = 2x^4 - \kappa x^3 + 5x^2 - \lambda x + 2$.

α. Να βρείτε τα κ, λ ώστε το 2 να είναι ρίζα του P(x) και το x –1 να είναι παράγοντας του P(x).

Για κ = 6 και λ = 3 να λυθεί:

β. η εξίσωση : P(x) = 0 και

γ. η ανίσωση : $P(x) \leq 0$ Μονάδες 10 +7 +8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(3x - 11)}{\ln(x - 5)}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. Μονάδες 9

β. Να λυθεί η εξίσωση f(x) = 2. Μονάδες 8

Αν x > 6, να λύσετε την ανίσωση f(x) > 1. Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 = \log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2)$, όπου $0 < \alpha \neq 1$ και θ_1 , $\theta_2 > 0$.

Μονάδες 12

Β. Πότε μια ακολουθία λέγεται αριθμητική πρόοδος; Μονάδες 3

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη* ***Σωστό*** *ή* ***Λάθος*** *δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$.

β. Οι αριθμοί α, β και γ, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε και μόνο τότε όταν $\beta = \dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

γ. $\eta\mu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$.

δ. Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

ε. Το άθροισμα S_ν των πρώτων ν όρων μιας γεωμετρικής προόδου (α_ν), που έχει πρώτο όρο α_1 και λόγο $\lambda \neq 1$, είναι: $S_\nu = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1}$. Μονάδες 5×2

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι για κάθε πραγματικό αριθμό x ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sigma\upsilon\nu x .$$

Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-2+\sigma\upsilon\nu 2x$

Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - x^2 - (4\alpha - \beta)x - \beta + 11$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Α. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-2$ και διαιρούμενο με το $x-1$ δίνει υπόλοιπο 4, να αποδείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = -7$. Μονάδες 13

Β. Για $\alpha = 2$ και $\beta = -7$, να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Δίνονται οι αριθμοί $\log 178$, $\log\sqrt{81(2^x+2\cdot 3^x)}$, $x\cdot\log 3$. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι παραπάνω αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $εφ2α = \dfrac{2εφα}{1-εφ^2α}$ με $α \neq κπ \pm \dfrac{π}{4}$ και $α \neq 2κπ \pm \dfrac{π}{2}$, $κ \in \mathbb{Z}$

Μονάδες 10

Β. Αν $f(x) = \log_α^x$ συνάρτηση με $0 < α < 1$ να γράψετε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του x Μονάδες 5

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες ή προτάσεις ώστε να είναι αληθείς:

α. $\log θ_1 + \log θ_2 =$ …….με $θ_1, θ_2 > 0$

β. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x) = e^x$ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο….

γ. $εφx = εφα \Leftrightarrow x =$

δ. Αν ο $α \in \mathbb{R}$ είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x) τότε P(α) = ……..

ε. $\sqrt[ν]{α^μ}$ = …….. με $α > 0$, $μ \in \mathbb{Z}$, ν θετικός ακέραιος Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Αν $συν\left(\dfrac{π}{6} + α\right) = \sqrt{\dfrac{3}{6}}\, συνα + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}\, ημα$

α. Να αποδείξετε ότι $συνα = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ Μονάδες 8

β. Να υπολογίσετε το $ημ\dfrac{α}{2}$ όταν $0 < α < \dfrac{π}{2}$ Μονάδες 7

γ. Να λυθεί η εξίσωση $4(ημ^3x \cdot συνx + συν^3x \cdot ημx) = 3συνα$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Το πολυώνυμο P(x) διαιρείται με το $x^2 + 2$ και δίνει πηλίκο $(λ-2)x + 1$ και υπόλοιπο $(-2λ-1)x + 1$, $λ \in \mathbb{R}$

α. Να αποδείξετε ότι $P(x) = (λ-2)x^3 + x^2 - 5x + 3$ Μονάδες 9

β. Να βρείτε το βαθμό του P(x) Μονάδες 6

γ. Για λ = 3 να βρείτε το α ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το $x - α$

Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση φ με $φ(x) = \ln(x^2 - 2x + 1)$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της φ Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση: $φ(x) = 4 \cdot \ln^2|x-1|$ Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση: $(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}φ(x)} - e^{\ln\sqrt{27} - \ln 3} < 0$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το (x – p) είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = p. Είναι δηλαδή υ = P(ρ).

Β. Να απαντήσετε αν είναι σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) καθεμιά από τις προτάσεις:

α. Αν $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$, τότε ένας ακέραιος αριθμός $\rho \neq 0$ αν δεν διαιρεί το α_0, τότε δεν είναι ρίζα της εξίσωσης (οι συντελεστές ακέραιοι).

β. Η εξίσωση $\alpha x^{2009} + (\alpha^2 + 2)x^{2008} + x^2 + 5 = 0$ έχει βαθμό 2009 για κάθε τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

γ. Το άθροισμα ή η διαφορά δύο πολυωνύμων ίδιου βαθμού είναι πολυώνυμο ίδιου βαθμού.

δ. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x).

Θέμα 2ο

Δίδεται το πολυώνυμο:

$P(x) = 6x^4 - x^3 - 7x^2 + \alpha x + \beta$. Αν το πολυώνυμο P(x) έχει ρίζα το –1και παράγοντα το x –1 να αποδείξετε ότι α = β = 1. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0, για α = β= 1.

Θέμα 3ο

Δίδονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(2\alpha + x) + \eta\mu(2\alpha - x)}{\sigma\upsilon\nu(2\alpha + x) + \sigma\upsilon\nu(2\alpha - x)} \text{ και } B = \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha} - \frac{\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha}$$

Να αποδείξετε ότι:

α. Η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x

β. Η παράσταση B = 2εφ2α = 2A

Θέμα 4ο

Δίδεται η συνάρτηση:

$f(x) = \log(2^{2x} - 4) - \log(2^x - 2) - 1$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 0.

γ. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι κάτω από τον άξονα x΄x

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

Αν τρεις μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, τότε ισχύει $\beta^2 = \alpha \cdot \gamma$ Μονάδες 10

Β. Να συμπληρωθούν τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Ο $\log_{\alpha}^{\theta}$ είναι ……(όπου $\theta > 0$, $0 < \alpha \neq 1$)

β. Ο $\nu^{ος}$ όρος μιας αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω δίνεται από τον τύπο: $\alpha_\nu =$ ……

γ. $\varepsilon\varphi^2\alpha = \dfrac{.....\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{.....}$

δ. $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x =$ ….. ή $x =$ …….

ε. Ο βαθμός του γινόμενου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι……

Μονάδες 15

Θέμα 2ο

α. Να αποδείξετε:

$$\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha,\ \alpha \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$$ Μονάδες 10

β. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{4}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$, $x \in (-\pi, 3\pi)$

Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 6$ ικανοποιεί τις συνθήκες: έχει παράγοντα το $x - 2$ και η διαίρεση με το $x + 1$ δίνει υπόλοιπο 18.

α. Να αποδειχθεί ότι: $\alpha = 1$ και $\beta = -13$ Μονάδες 15

β. Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Δίνεται η ακολουθία: $(0<\alpha \neq 1)$ $\alpha_1 = \log\sqrt{\alpha}$, $\alpha_2 = \log\sqrt[4]{\alpha}$, $\alpha_3 = \log\sqrt[8]{\alpha}$,…….

α. Να εξετάσετε αν είναι αριθμητική ή γεωμετρική πρόοδος Μονάδες 10

β. Να βρείτε τον α_{50} Μονάδες 5

γ. Να βρείτε το S_{50} Μονάδες 5

δ. Να εξετάσετε το πρόσημο του S_{50}, με $0 < \alpha \neq 1$ Μονάδες 5

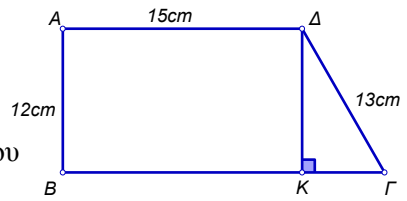
ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του, δηλαδή: $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$

Μονάδες 12

Β. Να υπολογιστούν:



α. η περίμετρος

β. το εμβαδόν του τραπεζίου Μονάδες 13

Θέμα 2ο

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ= 6cm, ΑΓ = 9cm, ΒΓ = 7cm

α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου Μονάδες 7

β. Να βρεθεί η διάμεσος από τη γωνία Α Μονάδες 8

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας

ΠΟΛΥΓΩΝΟ	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ (ω)	ΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ (φ)	ΠΛΕΥΡΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ (λ_ν)
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ			
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ			
ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΟ			

Μονάδες 15

β. Να βρεθεί το εμβαδόν τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R = 6cm

Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Σε κύκλο (Ο, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά ΑΒ = 12.

Να υπολογίσετε:

α. την ακτίνα R του κύκλου Μονάδες 6

β. το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Ο, R) Μονάδες 6

γ. το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 6

δ. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο

Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α.

α. Αποδείξτε τον τύπο $ημ2x = 2ημx \cdot συνx$ Μονάδες 4

β. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

$σφ(β - α) = \frac{σφβ.....}{.....}$, $ημx = 0$ τότε $x = ...$ $κ \in .....$ Μονάδες 4

γ. Τι λέγεται αριθμητική πρόοδος; Μονάδες 2

Γράψτε τον τύπο που μας δίνει το νιοστό όρο της γεωμετρικής προόδου Μονάδα 1

Β.

α. Αν $α > 0$, $α \neq 1$ και $θ_1$, $θ_2 > 0$ δείξτε ότι: $\log_α(θ_1 \cdot θ_2) = \log_α θ_1 + \log_α θ_2$. Μονάδες 5

β. Τι λέγεται λογάριθμος του θ ως προς βάση το α; Μονάδες 2

Ποιοι περιορισμοί ισχύουν για το α και το θ; Μονάδα 1

γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

$\log_α α^3 = ...$, $e^{2\ln 3} = ...$, $\log(xy) = ...$ όταν $xy > 0$

Μονάδες 6

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{ημ4α}{1 + συν4α} = εφ2α$ Μονάδες 8

β. $\frac{ημ(α+β) - ημ(α-β)}{συν(α+β) + συν(α-β)} = εφβ$ Μονάδες 8

Β. Να βρείτε το $x \in (0, π)$ ώστε οι αριθμοί $συν2x$, $ημ^2\frac{x}{2} - συνx$, 3 να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 - (κ + 11)x + λ - κ$

Α. Να βρείτε το λ, όταν το $x + 1$ διαιρεί το $P(x)$. Μονάδες 6

Β. Αν $λ = -4$ τότε:

α. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ Μονάδες 6

β. Να δείξετε ότι $κ = 2$, όταν το $(x + 1)^2$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Μονάδες 6

γ. Για $κ = 2$, να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$. Μονάδες

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(e^{2x} - κe^x + λ)$, με $f(0) = \log 2$, $f(\ln 6) = \log 12$.

Α. Να δείξετε ότι $κ = 5$ και $λ = 6$ Μονάδες 6

Β. Αν $κ = 5$ και $λ = 6$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f Μονάδες 6

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 1 - \log(e^x + 1)$ Μονάδες 7

γ. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $f(\ln 5) - f(0)$, $f(\ln 5)$, $f(\ln 6)$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\text{συν}\,2\alpha = 2\text{συν}^2\alpha - 1$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λανθασμένες:

α. $\text{ημ}^2\alpha - \text{συν}^2\alpha = \text{συν}2\alpha$

β. $\log x_1 \cdot \log x_2 = \log(x_1 + x_2)$

γ. $\text{ημ}2\alpha = 2\text{ημ}\alpha \cdot \text{συν}\alpha$

δ. $(\sqrt{2})^x = 1$ τότε $x = 0$

ε. αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-1)$, τότε $P(1) = 1$

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Να αποδείξετε ότι:

α. $\dfrac{\text{συν}(\alpha-\beta) - \text{συν}(\alpha+\beta)}{\text{συν}(\alpha-\beta) + \text{συν}(\alpha+\beta)} = \text{εφ}\alpha \cdot \text{εφ}\beta$ Μονάδες 10

β. $\text{εφ}\alpha = \dfrac{1}{\text{εφ}\alpha} - \dfrac{2}{\text{εφ}2\alpha}$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Να λυθεί η εξίσωση: $\log(2 \cdot 3^x + 2^x) + \log 81 = x \cdot \log 3 + \log 178$

Μονάδες 25

Θέμα 4ο

Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(x) = x^3 + (2\alpha + \beta)x^2 + 4\beta x - (4\alpha + 1)$ και

$Q(x) = x^3 + (2\kappa + 3\lambda + 10)x^2 + (\kappa + \lambda - 7)x + (3\kappa + 6\lambda - 8)$.

Α. Αν ισχύουν ότι: $\alpha + \beta = 2$ και η διαίρεση του $P(x)$ με το $x - 2$ δίνει υπόλοιπο -1, να βρείτε τις τιμές των α και β Μονάδες 10

Β. Για τις τιμές $\alpha = 4$ και $\beta = -2$

α. Να προσδιορίσετε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ να είναι ίσα.

Μονάδες 8

β. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = -1$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι $ημ(α + β) = ημα \cdot συνβ + συνα \cdot ημβ$ Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι: $συν2α = 2συν^2α - 1$ Μονάδες 8

Γ. Να απαντήσετε αν είναι σωστό ή λάθος κάθε ένα από τα παρακάτω

α. $\log_α α = 0,\ 0<α \neq 1$

β. $\log_α θ^κ = κ\log_α θ,\ 0 < α \neq 1,\ θ > 0,\ κ \in \mathbb{R}$

γ. $συν^2α = ημ^2α + συν2α$ Μονάδες 9

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $ημ(α + β) \cdot ημ(α - β) = συν^2β - συν^2α$ Μονάδες 7

Β. Να δειχθεί ότι: $εφ\left(\frac{π}{4} - α\right) = \frac{συν2α}{1 + ημ2α}$ Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $ημ2x + ημ^2x = συν^2x$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = 0$ Μονάδες 13

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 2x - 3$ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση: $2^{2x+2} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$ Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η ανίσωση: $\log(x^2 + 2) > \log x + \log 3$ Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, $\theta > 0$ και $\kappa \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $\log_\alpha \theta^\kappa = \kappa \log_\alpha \theta$.

Μονάδες 12

Β. Τι λέγεται βαθμός ενός πολυωνύμου; Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο γραπτό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος.**

α. $\varepsilon\varphi(\alpha-\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha - \varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\,\varepsilon\varphi\beta}$ $(\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) \neq 0, \sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0, \sigma\upsilon\nu\beta \neq 0)$

β. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν.

γ. Η εκθετική συνάρτηση με τύπο $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha \neq 1$ έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(0,+\infty)$.

δ. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta > 0$ ισχύει $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \theta$. Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)+\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$, $\beta = \dfrac{\eta\mu 2\theta}{2\sigma\upsilon\nu\theta}$

και $\gamma = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\theta}{2\varepsilon\varphi\theta}\cdot\eta\mu 2\theta$ $(\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0, \eta\mu 2\theta \neq 0, \eta\mu\theta \neq 0)$.

α. Να αποδείξετε ότι **i)** $\alpha = 1$, **ii)** $\beta = \eta\mu\theta$, **iii)** $\gamma = \sigma\upsilon\nu\theta$ Μονάδες 15

β. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\frac{\alpha}{2}$, β, $1-\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου. Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \kappa x + 2$.

Α. Να βρεθεί ο $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντα το $x-1$.

Μονάδες 8

Β. Για $\kappa = -3$

α. Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$. Μονάδες 8

β. Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 0$. Μονάδες 9

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(2x) = \ln(3e^x - 3)$. Μονάδες 7

γ. Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ώστε οι αριθμοί $\alpha = f(x)$, $\beta = x$, $\gamma = 2\ln 2$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Μονάδες 7

δ. Να βρείτε τις τιμές του $\theta \in (0,\pi)$ ώστε $f(2\eta\mu\theta) = \ln(e-1)$. Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x – ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0 . Μονάδες 13

Β. Να γράψετε συμπληρωμένες τις παρακάτω προτάσεις .

Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2, \theta > 0$ και $k \in R$ ισχύουν :

α. $\log_\alpha (\theta_1 \cdot \theta_2) =$ ……

β. $\log_\alpha \dfrac{\theta_1}{\theta_2} =$ …….

γ. $\log_\alpha \theta^k =$ ……. Μονάδες 4 + 4 + 4

Θέμα 2ο

Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ισούται με 120 και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της ισούται με 440. Να βρεθούν :

α. Η διαφορά ω και ο πρώτος όρος α_1 της προόδου. Μονάδες 11

β. Ο $15^{ος}$ όρος της προόδου Μονάδες 7

γ. Το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου. Μονάδες 7

Θέμα 3ο

Α. Δίνεται η ανίσωση $3^{x-2} > 1$ τότε ισχύει :

α. $x > 2$, **β.** $x = 0$, **γ.** $x < 2$, **δ.** $x = 2$, **ε.** $x \leq 2$

Μονάδες 5

Β. Η παράσταση $\frac{1}{2}\log 25 + \frac{1}{3}\log 8$ είναι ίση με :

α. $\frac{1}{6}$, **β.** $\frac{1}{6}\log 200$, **γ.** $\frac{5}{6}\log 34$, **δ.** 1, **ε.** log200 Μονάδες 5

Γ. Η συνάρτηση f(x) = log (x – 6) + log(7 – x) ορίζεται αν :

α. $x = 6$, **β.** $x < 6$, **γ.** $x > 7$, **δ.** $x = 7$, **ε.** $6 < x < 7$ Μονάδες 5

Δ. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ είναι σταθερή μόνο όταν :

α. $\alpha = 1$, **β.** $\alpha = 0$, **γ.** $\alpha \in \{0, 1\}$ Μονάδες 5

Ε. Η εξίσωση $3^x = 5$ έχει λύση την:

α. $x = \log_5 3$, **β.** $x = \log_3 5$, **γ.** $x = 5^3$ Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

Α. Να λυθεί η εξίσωση f(χ) = 0 Μονάδες 10

Β. Να βρείτε τα διαστήματα , στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x . Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

α. συν $2\alpha = 1 - 2\,\eta\mu^2\alpha$

β. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1 + \sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

Β. Τι ονομάζουμε λογάριθμο ενός θετικού αριθμού θ με βάση α θετικό αριθμό και διάφορο του 1

Γ. Να μεταφέρετε στην κόλλα τις παρακάτω προτάσεις και να τις συμπληρώσετε ώστε να είναι αληθείς:

α. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με α …… και α……. έχει σύνολο τιμών……..

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x - \rho$ είναι ίσο με…….

γ. εφ(α + β) = ……..

δ. $e^{\ln x}$ = ……..

ε. log1 = …….

Θέμα 2ο

Αν $5\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 8\sigma\upsilon\nu\alpha + 3 = 0$ και $\alpha \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ τότε:

α. Να αποδείξετε ότι συνα = $\dfrac{3}{5}$

β. Για συνα = $\dfrac{3}{5}$ να υπολογίσετε τις τιμές ημα, εφ2α, συν$\dfrac{\alpha}{2}$

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + \alpha x^2 - 5x + \beta$

α. Να προσδιορίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το $x - 1$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x + 2 να είναι -12

β. Για $\alpha = -3$ και $\beta = 6$ να βρείτε τις τιμές του x ώστε $P(x) \leq 0$

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \ln(e^x - 1)$ και $g(x) = \ln(e^x + 2)$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g

β. Να συγκρίνετε τις τιμές f(ln2) και $g(-1)$

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x + f(x) = \ln 2 + g(x)$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\dfrac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta}$ Μονάδες 12

Β. Να αναφέρετε με τι ισούται ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων Μονάδες 5

Γ. Να συμπληρώσετε τις ισότητες:

α. $\log_\alpha \alpha =$

β. $\log_\alpha 1 =$

γ. $\log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2 =$

δ. $\log_\alpha \theta^\kappa =$

Δίνεται $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$, $0<\alpha\neq 1$, $\kappa\in\mathbb{N}*$ Μονάδες 8

Θέμα 2ο

Α. Να δείξετε ότι: $\eta\mu^3\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu^3\alpha\cdot\eta\mu\alpha=\dfrac{1}{2}\eta\mu 2\alpha$ Μονάδες 15

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\eta\mu x^3\cdot\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^3 x\cdot\eta\mu x=\dfrac{1}{4}$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=x^3-(\kappa+1)x^2+(\kappa-1)x+2$ $\kappa\in\mathbb{R}$

Α. Αν το P(x) έχει ρίζες το 2 να βρεθεί ο $\kappa\in\mathbb{R}$ Μονάδες 10

Β. Αν $\kappa=2$ να λυθεί η εξίσωση $P(x)=x-2$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\log(4^x-8)-x\log 2-\log 7$

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x) Μονάδες 6

Β. Να δείξετε ότι: $f(x)=\log\left(\dfrac{4^x-8}{7\cdot 2^x}\right)$ Μονάδες 9

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x - p$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = p$. Είναι δηλαδή $\upsilon = P(p)$ Μονάδες 15

Β. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας συμπληρωμένες τις παρακάτω προτάσεις που αναφέρονται στη συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $0 < \alpha \neq 1$.

α. Το πεδίο ορισμού της είναι το ……..

β. Το σύνολο τιμών της είναι το ……

γ. Είναι γνησίως αύξουσα όταν …….

δ. Είναι γνησίως φθίνουσα όταν ……

ε. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο …… Μονάδες 5

Γ. Πότε μια ακολουθία (α_ν) $\nu \in \mathbb{N}*$, λέγεται αριθμητική πρόοδος . Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Δίνεται η εξίσωση $2\text{συν}2x - 11\text{συν}x - 1 = 0$ με $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Α. Να αποδείξετε ότι $\text{συν}x = -\frac{1}{4}$ Μονάδες 10

Β. Να υπολογίσετε το $\text{ημ}2x$ και το $\text{συν}\frac{x}{2}$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνονται τα πολυώνυμα

$P(x) = 3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + \beta x + \alpha$, $\alpha , \beta \in \mathbb{R}$ και $Q(x) = x^2 - 3x + 2$.

Α. Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ της διαίρεσης $P(x) : Q(x)$ και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > \upsilon(x)$ Μονάδες 7

Γ. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες το Q(x) είναι παράγοντας του P(x) . Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha \cdot x - \ln 3} - \frac{1}{3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Α. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 5

Β. Αν ισχύει $f(-1) = \frac{8}{3}$, να βρείτε την τιμή του α . Μονάδες 5

Γ. Για $\alpha = -\ln 9$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3^{-2x-1} - \frac{1}{3}$ Μονάδες 5

β. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > \frac{3^{2009-x} - 1}{3}$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αποδείξτε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x - ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x = ρ. Είναι δηλαδή υ = P(ρ). Μονάδες 13

Β. Συμπληρώστε

1. αν συνx = συνθ τοτε x =…
2. συν(α – β) =….
3. ημ(α – β) =…..
4. εφ(α – β) =….
5. $\log_\alpha \alpha^\chi = \ldots \quad 0 < \alpha \neq 1$
6. $\log_\alpha \alpha = \ldots \quad 0 < \alpha \neq 1$ Μονάδες 6×2

Θέμα 2ο

Α.

α. Λύστε την εξίσωση ημχ = 1. Μονάδες 5

β. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει ημΑ·συνΒ + συνΑ·ημΒ =1 δείξτε ότι είναι ορθογώνιο.

Μονάδες 10

Β. Δείξτε ότι: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \sigma\varphi\alpha$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - \alpha x + 6$.

α. Υπολογίστε το α ώστε το P(x) να έχει παράγοντα το χ – 1. Μονάδες. 7

β. Βρείτε τις ακέραιες ρίζες της P(x) = 0 για α = 5. Μονάδες 10

γ. Βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x):(x - 1) για α = 5. Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \log(4^x - 4) - \log 2^x - \log 3$.

α. Βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μονάδες 5

β. Δείξτε ότι $f(\chi) = \log\frac{4^x - 4}{3\cdot 2^x}$ Μονάδες 8

γ. Λύστε την εξίσωση $4^x - 3\cdot 2^x - 4 = 0$ Μονάδες 10

δ. Σε ποια σημεία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x; Μονάδες 2

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\text{συν}(\alpha+\beta) \neq 0$ και $\text{συν}\alpha \neq 0$, $\text{συν}\beta \neq 0$ να αποδείξετε ότι

$$\text{εφ}(\alpha+\beta) = \frac{\text{εφ}\alpha + \text{εφ}\beta}{1-\text{εφ}\alpha\cdot\text{εφ}\beta}$$

Β. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

1. $\text{ημ}(\alpha+\beta) = \text{ημ}\alpha + \text{ημ}\beta$
2. Αν $\log_\alpha \theta = x$ τότε $x^\alpha = \theta$
3. Αν $(x+\rho)$ παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ τότε $P(-\rho) = 0$
4. $\text{ημ}^2\alpha = \dfrac{1-\text{συν}2\alpha}{2}$
5. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,+\infty)$ ισχύει $\log(x_1\cdot x_2) = (\log x_1) + (\log x_2)$

Μονάδες. 15 + 10

Θέμα 2ο

Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\text{ημ}2\alpha}{1+\text{συν}2\alpha} = \text{εφ}\alpha$

Να λυθεί η εξίσωση $\text{συν}2x - \text{ημ}x - 1 = 0$ στο $[0, 2\pi]$

Μονάδες 11 + 14

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 - (5+\beta)x^2 + 10x - \beta + 1$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί.

Α. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $x-1$ να είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $x-2$ να είναι ίσο με -3.

Μονάδες 8

Β. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = 4$

α. Να κάνετε την αλγοριθμική διαίρεση $P(x):(2x+1)$ και να γράψετε την ταυτότητά της

β. Να λύσετε την ανίσωση $P(x) \geq 0$. Μονάδες 8 + 9

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln\dfrac{e^x-2}{e^x+4}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \ln 5 - \ln 3$

γ. Να λυθεί η ανίσωση $\ln\dfrac{e^{2x}-2e^x}{e^x+4} > 0$ Μονάδες 8 + 8 + 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το x–ρ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ δηλαδή υ=P(ρ). Μονάδες 10

Β. Επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή συνέχεια της πρότασης:
«Το πολυώνυμο $P(x)=(3x-2)^{2010}-x^{2009}$ έχει παράγοντα το ……. .»

α. x β. x–1 γ. x+1 δ. $x+\frac{2}{3}$ ε. $x-\frac{2}{3}$ Μονάδες 3

Γ. Να συμληρωθούν οι παρακάτω τύποι:

α. $\log(\theta_1\cdot\theta_2)=$…… με $\theta_1, \theta_2>0$ Μονάδες 2

β. συν(α+β) =……. Μονάδες 2

γ. εφ(α–β) =…….. με α, β, $\alpha-\beta\neq\kappa\pi+\frac{\pi}{2}$ για $\kappa\in Z$ Μονάδες 2

Δ. Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)** τις παρακάτω προτάσεις :

α. $e^x=\theta \Leftrightarrow \ln\theta=x$ με $\theta>0$ Μονάδες 2

β. $\log\theta^\nu=\frac{1}{\nu}\log\theta$ με $\theta>0,\ \nu\in N^*$ Μονάδες 2

γ. $e^{\ln x}=x$ με $x>0$ Μονάδες 2

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\frac{2\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)}=\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta$

(με τους απαιτούμενους περιορισμούς να θεωρούνται δεδομένοι) Μονάδες 15

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\sigma\upsilon\nu x-2\eta\mu^2\frac{x}{2}=0$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-x^2-2x+2$

Α. Ποιες είναι οι πιθανές ακέραιες ρίζες του $P(x)$; Μονάδες 5

Β. Να δείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του $P(x)$. Μονάδες 5

Γ. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x +2 και να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο x +2. Μονάδες 10

Δ. Να λύσετε την ανίσωση $P(x)\leq-6$. Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(4^x-2^x)$ και $g(x)=\ln(2^x-1)+\ln3$.

Α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παραπάνω συναρτήσεων. Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$. Μονάδες 10

Γ. Για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=\ln12-\ln2$. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x = \rho$ Μονάδες 10

Β. Να δώσετε τον ορισμό: Πότε δύο πολυώνυμα $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $Q(x) = \beta_\kappa x^\kappa + \beta_{\kappa-1}x^{\kappa-1} + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$ με $\nu \geq \kappa$ με πραγματικούς συντελεστές είναι ίσα

Μονάδες 5

Γ. Να απαντήσετε στο φύλλο αναφοράς βάζοντας Σ ή Λ δίπλα από κάθε αριθμό

α. Αν $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ έχει ρίζα το ρ, τότε ο γ είναι πολλαπλάσιο του ρ

β. $\log_\alpha \theta^\kappa = \alpha \cdot \log_\kappa \theta$

γ. $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2}$

δ. Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $\alpha > 1$ είναι γνησίως φθίνουσα

ε. Αν $\eta\mu x = \eta\mu\theta \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \theta, \kappa \in \mathbb{Z}$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

α. Να λυθεί η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu 2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0$ Μονάδες 15

β. Για $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ να βρεθεί το $\sigma\upsilon\nu 2x$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - (\alpha+1)x^2 + (\alpha-1)x + 2$ το οποίο έχει παράγοντα το $x-2$

Α. Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ Μονάδες 7

Β.

α. Για $\alpha = 2$ να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας Διαίρεσης του $P(x)$ δια του $x+3$

Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = x-2$ Μονάδες 10

Θέμα 4ο

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{5^{\log(x-1)} - 1}$ Μονάδες 10

Β.

α. Να αποδείξετε ότι: $100^{\log\sqrt{5}} = 5$ Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση: $25^{\log(x-1)} - 6 \cdot 5^{\log(x-1)} + 100^{\log\sqrt{5}} = 0$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σ(Σωστό) ή ως Λ(Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Ισχύει: $\varepsilon\varphi 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

β. Ισχύει: $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \dfrac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$

γ. Σε μια αριθμητική πρόοδο ισχύει: $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - \omega$.

δ. Ισχύει: $\log_\alpha\alpha^x = x$

ε. Η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$ με $0 < \alpha < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\eta\mu 2\alpha + \eta\mu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$ Μονάδες 10

Β. Να λύσετε τη εξίσωση: $\eta\mu 2x - \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x = 0$ Μονάδες 15

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + \alpha x^3 - 4x^2 - 3x + 2\alpha + 6$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Α. Να βρείτε για ποια τιμή του α, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) δια του x +1 είναι ίσο με τον αριθμό 6. Μονάδες 12

Β. Για την τιμή του α που βρήκατε στο ερώτημα (Α) να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Σε αριθμητική πρόοδο δίνονται οι όροι:

$\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = \log(x+10)$, $\alpha_4 = \log 4x$

Α. Να βρείτε το x Μονάδες 10

Β. Για x = 10, τότε:

α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha_1 = \log 5$ Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι: $\alpha_2 + \alpha_4 + \ldots\ldots + \alpha_{20} = 10 + 90\log 2$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι: $ημ(α + β) = ημα \cdot συνβ + ημβ \cdot συνα$ Μονάδες 10

Β. Το ημ3α είναι ίσο με:

α. $ημ2α \cdot συνα - ημα \cdot συν2α$

β. $1 - συν3α$

γ. $συν\left(\frac{π}{2} + 3α\right)$

δ. $\frac{ημ6α}{2συν3α}$

ε. κανένα από τα παραπάνω Μονάδες 5

Να βρείτε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

Γ. Τα πολυώνυμα $P(x) = x^4 - βx + 5$ και $g(x) = x^4 + βx^2 + 5 - β$ με $β \in \mathbb{R}$ είναι ίσα για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αν $β =$ ……

Να συμπληρώσετε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε.

Δ. Οι αριθμοί $3α$, $α + 4$, $α - 1$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε το $α =$ …….

Να συμπληρώσετε τη σωστή απάντηση και να την αιτιολογήσετε Μονάδες 5

Θέμα 2ο

Α. Να λύσετε την εξίσωση $2 = ημ^2x + 2συνx$ Μονάδες 15

Β. Να λύσετε την εξίσωση $1 + συν2x = 2(2συνx - 1)$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Έστω πολυώνυμο P(x) βαθμού $ν > 2$ και $g(x) = x^2 - α^2$, $α \neq 0$.

Α. Να γράψετε για τα πολυώνυμα αυτά την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης P(x) : g(x) Μονάδες 3

Β. Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης P(x) : g(x) είναι:

$$υ(x) = \frac{P(α) - P(-α)}{2α}x + \frac{P(α) + P(-α)}{2}$$ Μονάδες 17

Γ. Στη συνέχεια να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ δια του $g(x) = x^2 - 1$ χωρίς να γίνει η διαίρεση Μονάδες 5

Θέμα 4ο

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Α. Να λυθεί η εξίσωση $3f(2x) - 26f(x) - 9 = 0$ Μονάδες 8

Β. Να λυθεί η ανίσωση $f(2x + 1) \cdot f(3) > f(0)$ Μονάδες 4

Γ. Αν $α > 0$ και $f(α) = 2$

α. Να βρείτε το α Μονάδες 4

β. Να δείξετε ότι: $f(5α) = 32$ Μονάδες 2

γ. Να δείξετε ότι: $\frac{3}{5} < α < \frac{4}{5}$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχτεί ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το $x - p$ αν και μόνο αν το p είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν $P(p) = 0$ Μονάδες 9

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, σαν Σωστό ή Λάθος.

α. Ο βαθμός κάθε μη μηδενικού πολυωνύμου είναι φυσικός αριθμός

β. Κάθε πολυώνυμο νιωστού βαθμού έχει τουλάχιστον ν – ρίζες πραγματικές

γ. Το άθροισμα ή η διαφορά δύο μη μηδενικών πολυωνύμων του ίδιου βαθμού είναι ίδιου βαθμού πολυώνυμο πάντα

δ. $10^x = \theta \Leftrightarrow x = \ln\theta$

ε. $\ln\theta = 1 \Leftrightarrow \theta = e$

στ. $\ln^2\theta = \ln\theta^2$, για κάθε $\theta > 0$ Μονάδες 12

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά $e^{\ln\theta} = \ldots\ldots$ και $10^{\log 5} = \ldots\ldots$ Μονάδες 2

Δ. Από τα παρακάτω να απαντήσετε στο τετράδιό σας πιο είναι το Σωστό:

α. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\eta\mu^2\alpha - 1$

β. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \eta\mu^2\alpha - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$

γ. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 4\eta\mu^2\alpha - 1$

δ. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$ Μονάδες 2

Θέμα 2ο

Αν $3\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ και $\eta\mu x > 0$, να υπολογιστούν τα παρακάτω:

α. $\sigma\upsilon\nu x$ Μονάδες 7

β. $\eta\mu x$ Μονάδες 4

γ. $\eta\mu 2x$ Μονάδες 7

δ. $\sigma\upsilon\nu 2x$ Μονάδες 7

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = \lambda x^3 - \mu x^2 - x - 2$ $\lambda, \mu \in \Re$

Α. Να βρεθούν τα λ, μ ώστε το P(x) διαιρούμενο με το $(x-1)$ να δίνει υπόλοιπο -2, ενώ διαιρούμενο με $x - 2$ δίνει υπόλοιπο 4 Μονάδες 13

Β. Για $\mu = 0$ και $\lambda = 1$ να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 4$ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Α. Για ποιες τιμές του x ορίζονται οι συναρτήσεις:

$f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln(e^{2x} - 2)$ Μονάδες 13

Β. Να λυθεί η ανίσωση $g(x) \leq x$ Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:
$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log\theta_1 + \log\theta_2$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$

β. Αν δύο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

γ. Οι μη μηδενικοί αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν ισχύει: $\beta^2 = \alpha\gamma$

δ. $\alpha > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος τότε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

ε. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ και για κάθε $\theta > 0$ τότε: $\alpha^x = \theta \Leftrightarrow x = \log_\alpha\theta$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο: $f(x) = x^3 - \alpha x^2 + 2\beta x - 4$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Α. Αν το f(x) έχει παράγοντα το $(x-1)$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης του f(x) με το (x + 1) είναι -10 να υπολογίσετε τους α, β. Μονάδες 15

Β. Για α = 1 και β = 2 να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση:

$2\eta\mu^3 x + \frac{3}{2}\sigma\upsilon\nu 2x - 11\eta\mu x + \frac{9}{2} = 0$ (1) στο διάστημα $[0, \pi]$ Μονάδες 10

Β. Αν x είναι η μικρότερη ρίζα της (1) να βρείτε για ποιες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:
$\sigma\upsilon\nu x + 2\sigma\upsilon\nu x + \ldots + \nu\sigma\upsilon\nu x \leq 5\sqrt{3}$. Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 4^{\alpha + \frac{1}{2}}\ln x - \frac{2^\alpha}{\ln x}$ με $\alpha \in \mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι:
αν $f(e^2) = 15$ τότε $\alpha = 1$ Μονάδες 13

Β. Να δείξετε ότι: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ Μονάδες 5

Γ. Για α = 1 να λυθεί η ανίσωση: $2f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \leq 6$ Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $συν2α = 2συν^2α – 1$. Μονάδες 10

Β. Πότε ένας αριθμός ρ είναι ρίζα ενός πολυωνύμου P(x). Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις.

α. $e^{\ln x} = x$, **β.** $εφ2α = \frac{1+εφ^2α}{2εφα}$, **γ.** $\log_α α$

δ. Για τη συνάρτηση $f(x) = α^x$, $α > 1$ ισχύει: $x_1 < x_2$ τότε $α^{x_1} > α^{x_2}$.

ε. $\log_α(θ_1 \cdot θ_2) = \log_α θ_1 \cdot \log_α θ_2$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $εφ(x - \frac{π}{4}) + σφx = \frac{εφ^2x + 1}{εφ^2x + εφx}$ Μονάδες 15

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $εφ(x - \frac{π}{4}) + σφx = 1$ Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Α. Αν το πολυώνυμο $P(x) = αx^4 + x^3 – (α^3 + 1)x^2 – α^2x + 4$ έχει παράγοντα το $(x + 1)$ να βρεθεί ο $α \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10

Β. Για $α = 2$ να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 0$ Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)$, $x \geq 0$ με $\ln f(x) = αx + β$, $α, β \in \mathbb{R}$ Μονάδες 10

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = \frac{3}{16}$ Μονάδες 5

Α. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq \frac{1}{3}$ Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\,\alpha + \varepsilon\varphi\,\beta}{1 - \varepsilon\varphi\,\alpha \cdot \varepsilon\varphi\,\beta}$, όπου $\sigma\upsilon\nu\,\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\,\beta \neq 0$ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \neq 0$.

Μονάδες 13

Β. Να συμπληρωθούν οι ισότητες :

α. $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) =$ ……

β. $\eta\mu\, 2\alpha =$ ……

γ. $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \ldots.$, όπου , $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και $\theta_1 > 0$, $\theta_2 > 0$

δ. $\alpha^{\log_\alpha \theta} = \ldots.$, όπου $\alpha > 0$, με $\alpha \neq 1$ και $\theta > 0$

Μονάδες 12

Θέμα 2ο

α. Να αποδειχθεί ότι : $\sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\,\chi$

β. Να λυθεί η εξίσωση : $\sigma\upsilon\nu\left(\chi + \frac{\pi}{3}\right) + \sigma\upsilon\nu\left(\chi - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

γ. Από τις λύσεις που βρήκατε στο ερώτημα β. , να βρείτε εκείνες που ανήκουν $(0, \pi)$

Μονάδες 9 + 8 + 8

Θέμα 3ο

α. Να λυθεί η εξίσωση : $9^\chi - 8 \cdot 3^\chi - 9 = 0$

β. Να λυθεί η ανίσωση : $\left(\frac{1}{2}\right)^{\chi^2 - \chi - 1} > \frac{1}{2}$

γ. Να λυθεί η εξίσωση : $\log(\chi^2 + 1) - \log\chi = \log 2$

Μονάδες 9 + 8 + 8

Θέμα 4ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(\chi) = \chi^3 + \alpha\chi^2 + \beta\chi + 6$.

α. Αν το $P(\chi)$ έχει παράγοντα το $\chi - 1$ και $P(-1) = 8$, να αποδείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = -5$.

β. Για τις τιμές των α και β που βρήκατε στο (α) ερώτημα να λύσετε την ανίσωση $P(\chi) \leq 0$.

Μονάδες 12 + 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

α. Να αποδείξετε ότι $εφ(α + β) = \dfrac{εφα + εφβ}{1 - εφα \cdot εφβ}$ Μονάδες 10

β. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω ισότητες:

- $ημ2α =$ ……
- $ημ(α + β) =$……
- $2συν^2α - 1 =$ ……..
- $συνα \cdot συνβ + ημα \cdot ημβ =$ ……. Μονάδες 6

γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω σχέσεις (όλες οι σχέσεις είναι σωστά ορισμένες):

- $\log_α(θ_1 \cdot θ_2) =$ ……
- $\ln e^x =$ …….
- $\ln 1 =$ …….
- $\log x > 0 \Leftrightarrow$ ..x…….
- $10^{\log x} =$ ……
- $\log_α \dfrac{θ_1}{θ_2} =$ …….
- $\log \sqrt{α} =$ …….
- $\ln x^3 =$ ……..
- $\ln x < 0 \Leftrightarrow$ …….x…….. Μονάδες 9

Θέμα 2ο

Να λύσετε την εξίσωση: $2συν^2x + 3συνx - 2 = 0$

Μονάδες 25

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = (λ^3 - λ)x^3 - (λ^2 - λ)x^2 - (λ^2 - 1)x + 1 - λ$

α. Να βρείτε το βαθμό του για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ.

Μονάδες 9

β. Αν το P(x) είναι τρίτου βαθμού και το $x - 1$ διαιρεί το P(x), να βρείτε τον πραγματικό αριθμό λ. Μονάδες 8

γ. Αν $λ = 2$, να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x η γραφική παράσταση του P(x) βρίσκεται πάνω από τον άξονα x΄x. Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η εκθετική συνάρτηση $f(x) = \left(\dfrac{2α + 1}{α - 1}\right)^x$, $α \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η f να είναι γνησίως φθίνουσα Μονάδες 9

β. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α, έτσι ώστε: $f(1) - f(2) = 2f(3)$ Μονάδες 8

γ. Για $α = -1$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \sqrt{e}$ Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Αν θ_1, θ_2 θετικοί αριθμοί και $0 < \alpha \neq 1$ να αποδείξετε ότι $\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$

Μονάδες 13

Β. Να συμπληρώσετε στην κόλα σας τους παρακάτω τύπους:

α. ημ2α = ……..

β. ημ(α – β) = ……..

γ. εφ(α + β) =……..

δ. log10 = ……..

ε. $e^{\ln\theta}$ = ……θ >0

στ. $\ln e^{\kappa}$ = …….. $\kappa \in \mathbb{R}$ Μονάδες 12

Θέμα 2ο

Α. Να αποδείξετε ότι: $\dfrac{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)} = \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta$ Μονάδες 12

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu^2x + 3\sigma\upsilon\nu x - 2 = 0$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(3x-11)}{\ln(x-5)}$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 10

Β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2 Μονάδες 15

Θέμα 4ο

Α. Να βρεθούν οι αριθμοί α, β ώστε το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 5x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ να έχει παράγοντα το $x-1$ και ρίζα το 2. Μονάδες 13

Β. Αν α = 5 και β = 5 να λύσετε την ανίσωση P(x) >0 Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο P(x) έχει παράγοντα το x–ρ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του P(x), δηλαδή αν και μόνο αν P(ρ) = 0. Μονάδες 8

Β. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

α. Η παράσταση $(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)^2$ ισούται με:

Α: 1 + ημ2x **Β:** 1 + συν2x **Γ:** 1 – ημ2x **Δ:** συν2x **Ε:** Τίποτε από τα προηγούμενα

β. Έστω **P(x)** ένα πολυώνυμο του **x** και **ρ** ένας πραγματικός αριθμός. Αν **π(x)** είναι το πηλίκο και **υ(x)** το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου **P(x)** με το πολυώνυμο **(x-ρ)**, τότε, το υπόλοιπο **υ(x)** είναι :

Α: Πάντοτε πολυώνυμο ίδιου βαθμού με το **P(x)**.
Β: Πολυώνυμο πρώτου βαθμού.
Γ: Σταθερό πολυώνυμο.
Δ: Πάντοτε το μηδενικό πολυώνυμο. Μονάδες 4

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου τότε $\beta^2 = \alpha + \gamma$.

β. Αν το πολυώνυμο $P(x) = x^{2000} + \lambda x - 2$, όπου λ πραγματικός αριθμός, έχει παράγοντα το x–1, τότε το λ = 1.

γ. Ισχύει ότι $\log\alpha \cdot \log\beta = \log(\alpha \cdot \beta)$ για κάθε $\alpha, \beta > 0$.

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{4}{\pi}\right)^x$ είναι γνησίως αύξουσα

ε. Κάθε σταθερό πολυώνυμο είναι πρώτου βαθμού. Μονάδες 10

Δ. Να δώσετε τον ορισμό της γεωμετρικής προόδου. Μονάδες 3

Θέμα 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$, $\alpha_2 = \sigma\upsilon\nu^2\alpha$, $\alpha_3 = 1$, όπου η γωνία α ικανοποιεί τη σχέση $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

α. Να αποδείξετε ότι αυτοί οι αριθμοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. Μονάδες 7

β. Να βρείτε τη διαφορά ω αυτής της προόδου. Μονάδες 8

γ. Να βρείτε το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της προόδου. Μονάδες 10

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4$.

α. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός ρ = 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

β. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το (x-1).

γ. Να λύσετε την εξίσωση: $x^3 + 4 = x^2 + 4x$

δ. Να λύσετε την ανίσωση : $P(x) \geq 0$ Μονάδες 5 +7 +8 +5

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x} - 1}{e^x + 5}\right)$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f(x). Μονάδες 5

β. Να λύσετε την εξίσωση f(x) = 2ln2 . Μονάδες 10

γ. Να λύσετε την ανίσωση f(x) > 0. Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να δείξετε ότι $συν2α = 2συν^2α - 1$ Μονάδες 10

Β. Σημειώστε Σ, Λ στις παρακάτω προτάσεις Μονάδες 15

α. Ισχύει $ημ^2α = \dfrac{1 + συν2α}{2}$

β. Ισχύει $ημ2α = ημασυνα$

γ. Η $f(x) = α^x$ με $0 < α < 1$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

δ. Η $f(x) = logx$ έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$

ε. Αν $α > 0$ με $α \neq 1$ $θ_1, θ_2 > 0$ και, τότε ισχύει $logθ_1 - logθ_2 = log\dfrac{θ_1}{θ_2}$

Θέμα 2ο

α. Να δείξετε ότι $συν\left(x + \dfrac{π}{4}\right) + συν\left(x - \dfrac{π}{4}\right) = \sqrt{2}συνx$

β. Να λύσετε την εξίσωση $συν\left(x + \dfrac{π}{4}\right) + συν\left(x - \dfrac{π}{4}\right) = 1$

Μονάδες 13 + 12

Θέμα 3ο

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + αx^2 + βx - 6$ με $α, β \in \mathbb{R}$

Α. Αν το $x - 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και το 2 είναι ρίζα του $P(x)$, να υπολογίσετε τα α, β.

Μονάδες 9

Β. Αν $α = -6$ και $β = 11$

α. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$ Μονάδες 8

β. Να λύσετε την ανίσωση $\left(\dfrac{1}{e}\right)^{P(x)} > 1$ Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$f(x) = \ln\left(e^{2x} - 2e^x + 3\right)$, $g(x) = \ln3 + \ln\left(e^x - 1\right)$

α. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των $f(x)$, $g(x)$ Μονάδες 8

β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ Μονάδες 8

γ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 2g(x)$ Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α.

α. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση: $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + ... + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$

με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α_0. Μονάδες 10

β. Τι ονομάζουμε λογάριθμο του $\theta > 0$ με βάση α όπου $0 < \alpha \neq 1$

Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λάθος (Λ)

α. Ισχύει ότι: $\text{συν}2\alpha = \text{ημ}^2\alpha - \text{συν}^2\alpha$, **Σ Λ**

β. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το (χ-ρ) ισούται με το P(ρ)

Σ Λ

γ. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό μηδέν. **Σ Λ**

δ. Η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ είναι γνήσια αύξουσα στο R **Σ Λ**

ε. Αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$, τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ **Σ Λ**

Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \lambda^3x^3 - 3(\lambda+1)x^2 + 11x - 6$

α. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το 1 να είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x)

Μονάδες 8

β. Για λ = 1 να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0 Μονάδες 8

γ. Για λ = 1 να λύσετε την ανίσωση P(x) <0 Μονάδες 9

Θέμα 3ο

α. Να δείξετε ότι $\text{ημ}x + \text{συν}x = \sqrt{2}\text{ημ}\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$ Μονάδες 12

β. Να λύσετε την εξίσωση $\text{ημ}(\pi\ln x) + \text{συν}(\pi\ln x) = 1$ Μονάδες 13

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2\ln x} - x^{2\ln\lambda} + 2\ln\lambda$,με $\lambda > 0$ και $x \in (0, +\infty)$

α. Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το A(1,1) να βρεθεί η τιμή του λ

Μονάδες 6

β. Για $\lambda = \sqrt{e}$ να αποδείξετε ότι $f(x) = x^2 - x + 1$ Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $2f(\text{συν}2\theta) = \text{συν}4\theta + 4\text{ημ}^2\theta + 1$ Μονάδες 7

δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(\text{συν}2\theta) = 1 + \frac{\text{συν}4\theta}{2}$ Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Έστω x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

α. $x_1 + x_2 = -\dfrac{\beta}{\alpha}$ **β.** $x_1 \cdot x_2 = -\dfrac{\gamma}{\alpha}$

Β. Πότε μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α λέγεται περιττή;

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με την ένδειξη σωστό (Σ) ή λάθος (Λ).

α. Αν η συνάρτηση f με πεδίο στο Α τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει ότι:

αν $x_1 < x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$

β. Ισχύει ότι $\sqrt{\sqrt[\mu]{\alpha}} = \sqrt[\nu+\rho]{\alpha}$ όπου $\alpha \geq 0$ και ν, μ φυσικοί με $\nu \geq 2$, $\mu \geq 2$

γ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta\chi + \gamma$ με $\alpha \neq 0$ αν οι τιμές της f διατηρούν σταθερό πρόσημο στο R τότε $\Delta < 0$.

δ. Ισχύει ότι $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in R$.

ε. Τα σημεία Α (1, 2) και Β (-1, 2) είναι συμμετρικά ως προς τον x΄x.

Μονάδες 10 + 5 + 10

Θέμα 2ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με εξισώσεις

ε_1: $y = |2 - \lambda| \cdot x + 2009$, $\lambda \in R$

ε_2: $y = 3x + \mu^3 - 5$, $\mu \in R$

α. Να βρεθούν οι τιμές του λ ώστε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

β. Να βρεθεί η τιμή του μ αν η ευθεία ε2 διέρχεται από το Β (3, – 4).

γ. Να βρεθεί το σημείο Γ το οποίο είναι συμμετρικό του Β ως προς το Ο (0,0).

δ. Να βρεθεί το μήκος του τμήματος ΒΓ.

Μονάδες 8 + 7 + 5 + 5

Θέμα 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2 \cdot x^2 + 18$, $x \in R$.

α. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή

β. Να προσδιορίσετε το ακρότατο της f

γ. Να μελετήσετε την μονοτονία της f στο διάστημα $(-\infty, 0)$

δ. Να λυθεί η ανίσωση: $\dfrac{f(x) \cdot (x^2 - 4x + 3)}{x^2 - x + 1} > 0$

Μονάδες 6 + 6 + 5 + 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \lambda \cdot x^2 - (\lambda - 1) \cdot x - 2\lambda + 2$, $\lambda \neq 0$ και $x \in R$

α. Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ ώστε η f να διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in R$

β. Να προσδιοριστούν οι τιμές του λ, ώστε η εξίσωση $f(x) = 0$ να έχει ρίζες ετερόσημες.

γ. Να λυθεί η ανίσωση $S < -2\lambda$ όπου S το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

Μονάδες 10 + 8 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$ με $\alpha \neq 1$ τότε για οποιουσδήποτε $\theta_1, \theta_2 > 0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_\alpha\theta_1 + \log_\alpha\theta_2$ Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με τη λέξη Σωστό ή Λάθος

α. $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta) = \dfrac{\varepsilon\varphi\alpha + \varepsilon\varphi\beta}{1 - \varepsilon\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\beta}$ με $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\beta \neq 0$

β. $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$

γ. Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x + \rho$ είναι ίσο με $P(\rho)$.

δ. Αν $0 < \alpha \neq 1$ και $\theta, \kappa \in R$ με $\theta > 0$ τότε $\log_\alpha\theta^\kappa = \kappa\log_\alpha\theta$

ε. Αν $0 < x_1 < x_2$ τότε $\ln x_1 < \ln x_2$ Μονάδες 15

Θέμα 2ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + \alpha x^2 - \beta x + 6$

Α. Να προσδιοριστούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)$ να έχει παράγοντες τα

$x + 2$ και $x - 3$ Μονάδες 12

Β. Για $\alpha = -2$ και $\beta = 5$ να λυθεί η ανίσωση $P(x) > 0$ Μονάδες 13

Θέμα 3ο

Α. Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu 2x - \sqrt{2}\,\sigma\upsilon\nu x = 0$ Μονάδες 10

Β. Να αποδείξετε ότι:

α. $(\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha)^2 = 1 + \eta\mu 2\alpha$ Μονάδες 7

β. $\dfrac{(1+\eta\mu 2\alpha)(\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu\alpha} = \sigma\upsilon\nu 2\alpha$ Μονάδες 8

Θέμα 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \log(11x^2 - 7x + 10) - \log x^2 - 1$

Α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 10

Β. Να βρεθούν τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$

Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι:

Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για $x=\rho$. Είναι δηλαδή $u=P(\rho)$ Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως Σωστή ή Λάθος καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό ίσο με μηδέν

β. Αν το $P(\rho)=0$, τότε το ρ λέγεται ρίζα του πολυωνύμου P(x)

γ. Αν $\alpha>0$ με $\alpha\neq1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta_1, \theta_2>0$ ισχύει:

$\log_\alpha(\theta_1\cdot\theta_2)=\log_\alpha\theta_1\cdot\log_\alpha\theta_2$

δ. $\ln 1^x = x$

ε. $\log 100^x = 2x$ Μονάδες 10

Θέμα 2ο

Α. Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της 1ης στήλης με ένα μόνο στοιχείο της 2ης στήλης

1η ΣΤΗΛΗ	2η ΣΤΗΛΗ
1. ημ(α – β)	α. ημα · ημβ – συνα · συνβ
2. ημ2α	β. 2ημα · συνα
3. συν2α	γ. ημα · συνβ – συνα · ημβ
4. συν(α – β)	δ. συνα · συνβ + ημα · ημβ
	ε. $2\text{συν}^2\alpha - 1$
	στ. $1 - 2\text{συν}^2\alpha$

Μονάδες 8

Β. Να λυθεί η εξίσωση: $\text{συν}2x - 3\text{συν}x - 1 = 0$ Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η εξίσωση: $\ln x^3 + \ln x^4 + \ln x^5 + \ldots + \ln x^{12} = 150$ Μονάδες 9

Θέμα 3ο

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 12$

Α. Να προσδιοριστούν οι πραγματικοί αριθμοί α και β ώστε το πολυώνυμο P(x) να έχει παράγοντα το $(x+1)(x-2)$ Μονάδες 13

Β. Για τις τιμές των α και β που βρήκατε, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$ Μονάδες 12

Θέμα 4ο

Α. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος 39, 32, 25,……

α. Να βρείτε τους όρους α_{18} και α_{41} Μονάδες 4

β. Πόσοι είναι οι θετικοί όροι της αριθμητικής προόδου; Μονάδες 5

γ. Να υπολογίσετε το άθροισμα

$S = \alpha_{19} + \alpha_{20} + \ldots + \alpha_{41}$ Μονάδες 8

Β. Να λυθεί η εξίσωση:

$\log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$ Μονάδες 8