

# ΓΕΛ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β.



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι: Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινούς επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινούσα. Μονάδες 13

**B.** Να χαρακτηρίσετε σαν σωστές (Σ) ή Λάθος(Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

**α.** Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  πλευρές τριγώνου με  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$  τότε  $\hat{A} < 90^\circ$

**β.** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση  $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cdot \text{συν}B$

**γ.** Σε κάθε τρίγωνο με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  και ημιπερίμετρο  $\tau$  ισχύει  $E = \sqrt{(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}$

**δ.** Αν  $\varphi_v$  η γωνία κανονικού πολυγώνου και  $\omega_v$  η κεντρική γωνία του τότε ισχύει:

$$\hat{\varphi}_v = 180^\circ - \hat{\omega}_v$$

Μονάδες 12

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} = 60^\circ, \beta = 5, \gamma = 3$ . Να δειχθεί ότι:

**A.**  $\alpha = \sqrt{19}$  Μονάδες 8

**B.**  $\mu_\alpha = \frac{7}{2}$  Μονάδες 8

**Γ.**  $M\Delta = \frac{8\sqrt{19}}{19}$ , όπου ΜΔ η προβολή της διαμέσου  $\mu_\alpha$  στην πλευρά  $\alpha$  Μονάδες 9

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με  $\hat{A} > 90^\circ$  με  $AB = 5, AG = 3$  και  $(AB\Gamma) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ . Να

δειχθούν:

**A.**  $\hat{A} = 120^\circ$  Μονάδες 8

**B.**  $\alpha = 7$  και  $v_\alpha = \frac{15\sqrt{3}}{14}$  Μονάδες 8

**Γ.** Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο P εκτός αυτού. Φέρουμε την εφαπτομένη PA ώστε

ώστε  $(PA) = R\sqrt{3}$ . Επίσης φέρουμε την PO και έστω Γ το σημείο τομής της με τον κύκλο.

Να υπολογιστούν:

**A.** το ΡΓ Μονάδες 8

**B.** το ΓΑ Μονάδες 8

**Γ.** το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου (ΑΓΡ) Μονάδες 9

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να χαρακτηρίσετε με (Σ) σωστό ή (Λ) λάθος τις προτάσεις:

α. Για ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με  $\hat{B} = 90^\circ$  ισχύει  $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2$

β. Το απόστημα τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R δίνεται από τον τύπο  $\alpha_4 = R\sqrt{2}$

γ. Το εμβαδόν ενός τριγώνου ABΓ δίνεται από τη σχέση  $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$ , όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου

δ. Το εμβαδόν κύκλου ακτίνας ρ, δίνεται από τον τύπο  $E = \pi \cdot \rho^2$  Μονάδες 10

B. Αν ABΓ ορθογώνιο τρίγωνο με  $\hat{A} = 90^\circ$  και AΔ το ύψος προς την υποτείνουσα, να δειχθεί ότι:  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$  Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), φέρουμε το ύψος AΔ. Αν AB = 3 και AΓ = 4, να δείξετε ότι:

A. BΓ = 5 Μονάδες 6

B.  $B\Delta = \frac{9}{5}$  Μονάδες 6

Γ.  $\Delta\Gamma = \frac{16}{5}$  Μονάδες 6

Δ.  $A\Delta = \frac{12}{5}$  Μονάδες 7

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), με AB = 6 και AΓ = 8. Να δείξετε ότι:

A.  $(AB\Gamma) = 24$  Μονάδες 6

B. BΓ = 10 Μονάδες 6

Γ.  $A\Delta = \frac{24}{5}$ , όπου AΔ ύψος Μονάδες 6

Δ.  $\rho = 2$ , όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου Μονάδες 7

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) με πλευρά  $\lambda_3 = 8\sqrt{3}$  cm. Να βρείτε:

A. Το μήκος του κύκλου Μονάδες 12

B. Το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που βρίσκονται μεταξύ του κύκλου και του τριγώνου Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των

$$\text{βάσεων του επί το ύψος, δηλαδή } E = \frac{(B + \beta) \nu}{2} \quad \text{Μονάδες } 9$$

**B.** Να χαρακτηρίσετε ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

**α.** Αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$ , τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

**β.** Για ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $A = 90^\circ$ ) με ύψος  $A\Delta$ , ισχύει:  $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

**γ.** Αν δύο τρίγωνα  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  έχουν  $\nu_\alpha = \nu_{\alpha'}$  και  $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{3}{2}$  τότε  $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{3}{2}$

**δ.** Το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  δίνεται πάντα από τον τύπο  $(AB\Gamma) = \sqrt{(\tau - \alpha) \cdot (\tau - \beta) \cdot (\tau - \gamma)}$ , όπου  $\tau$  η ημπερίμετρός του.

**ε.** Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητας. Μονάδες 10

**Γ.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\beta > \gamma$  να συμπληρώσετε τις ισότητες:

**α.**  $\beta^2 + \gamma^2 =$

**β.**  $\beta^2 - \gamma^2 =$

ώστε να εκφράζουν το 1<sup>ο</sup> και το 2<sup>ο</sup> θεώρημα των διαμέσων αντίστοιχα. Στην απάντηση παραπάνω είναι απαραίτητη η κατασκευή σχήματος. Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma = 1$  και  $B\Gamma = \sqrt{3}$

**A.** Να δείξετε ότι  $\hat{A} = 120^\circ$  Μονάδες 8

**B.** Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της πλευράς  $AB$  πάνω στην  $A\Gamma$  Μονάδες 9

**Γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 8

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 8$ . Να βρείτε:

**A.** Το εμβαδόν του Μονάδες 5

**B.** Το ύψος  $\nu_\alpha$  Μονάδες 7

**Γ.** Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 5

**Δ.** Τη διάμεσο  $AM = \mu_\alpha$  Μονάδες 4

**E.** Την ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 4

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 1$ ,  $A\Gamma = 2$  και  $\hat{A} = 120^\circ$ . Με πλευρές τις  $AB$  και  $A\Gamma$  κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου  $AB\Gamma$  τα τετράγωνα  $AB\Delta E$  και  $A\Gamma Z\Theta$  αντίστοιχα. Τότε:

**A.** Να υπολογιστεί το τμήμα  $E\Theta$  Μονάδες 5

**B.** Να αποδείξετε ότι  $\widehat{AE\Theta} = 90^\circ$  Μονάδες 5

**Γ.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας  $B\Gamma Z\Theta E\Delta$  είναι  $5 + \sqrt{3}$  Μονάδες 15

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Μονάδες 15

**B.** Χαρακτηρίστε με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

**α.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και ΑΔ ύψος ισχύει  $AD^2 = BD \cdot \Delta\Gamma$

**β.** Σε κύκλο (Ο, 4) προεκτείνουμε μια ακτίνα του ΟΑ κατά τμήμα  $AM = 1$ .

Τότε  $\Delta_{(0,4)}^M = 8$

**γ.** Σε τρίγωνο με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  και εμβαδόν  $E$ , η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου είναι  $R = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4 \cdot E}$

**δ.** Η γωνία  $\hat{\phi}_{18}$  ενός κανονικού δεκαοκταγώνου είναι  $\hat{\phi}_{18} = 160^\circ$

**ε.** Το μήκος τόξου  $\mu^\circ$  σε κύκλο ακτίνας  $R$ , είναι  $l = \frac{\pi \cdot R \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$  Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 5\text{cm}$ ,  $AG = 7\text{cm}$  και  $B\Gamma = 6\text{cm}$ . Αν το ΑΔ είναι ύψος και ΑΜ διάμεσος να βρεθεί:

**α.** το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του Μονάδες 7

**β.** να δειχτεί ότι το μήκος της διαμέσου ΑΜ είναι  $2\sqrt{7}$  Μονάδες 6

**γ.** να δειχτεί ότι το μήκος της προβολής της διαμέσου ΑΜ πάνω στη ΒΓ είναι 2 Μονάδες 6

**δ.** το μήκος του ύψους ΑΔ Μονάδες 6

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με  $AB = 3$ ,  $AG = 5$  και  $\hat{A} = 60^\circ$

**α.** να βρεθεί το μήκος της πλευράς ΒΓ Μονάδες 8

**β.** να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 8

**γ.** αν προεκτείνουμε τη ΒΑ κατά τμήμα  $AE = 2$  και την ΑΓ κατά τμήμα  $\Gamma\Delta = 4$  να βρεθεί ο

λόγος  $\frac{(A\epsilon\Delta)}{(A\beta\Gamma)}$  Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε κύκλο (Κ, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρά  $a = 12$ .

Να υπολογίσετε:

**α.** την ακτίνα R του κύκλου Μονάδες 6

**β.** το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 6

**γ.** το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (Κ, R) Μονάδες 6

**δ.** το εμβαδόν της περιοχής που περικλείεται από τη χορδή ΒΓ, το τόξο ΒΓ και δεν έχει κοινά σημεία με το τρίγωνο ΑΒΓ. Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του ισούται με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή αυτής της καθέτου πάνω στην υποτείνουσα. Μονάδες 10

**B.** Στις παρακάτω προτάσεις να σημειώσετε στην κόλλα σας το γράμμα Σ αν είναι σωστές και το γράμμα Λ αν είναι λανθασμένες :

**α.** Το εμβαδόν ενός τριγώνου με πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  δίνεται από τον τύπο  $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4 \cdot \rho}$ , όπου  $\rho$  η

ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου.

**β.** Το εμβαδόν ενός ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

**γ.** Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας  $R$ , ισούται με

$$l_6 = R \cdot \sqrt{3}$$

**δ.** Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας  $R$  δίνεται από τον τύπο  $E = \pi \cdot R^2$

**ε.** Το απόστημα ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας  $R$ , ισούται με

$$a_3 = \frac{R \cdot \sqrt{3}}{2}$$

Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 2$ ,  $A\Gamma = \sqrt{3}$  και  $\hat{A} = 30^\circ$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 1$ . Μονάδες 5

**B.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου. Μονάδες 5

**Γ.** Να βρείτε το εμβαδόν του. Μονάδες 5

**Δ.** Να αποδείξετε ότι  $\mu_a = \frac{\sqrt{13}}{2}$ . Μονάδες 5

**E.** Να βρείτε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 5

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και στην προέκταση μιας ακτίνας του  $OA$  προς το μέρος του  $A$ , παίρνουμε τμήμα  $AP = OA$ . Από το  $P$  φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα  $PK$  προς τον κύκλο.

**A.** Να υπολογίσετε το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος  $PK$  συναρτήσει του  $R$ . Μονάδες 10

**B.** Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $PAK$  συναρτήσει του  $R$ . Μονάδες 15

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$   $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$  και  $AB \parallel \Gamma\Delta$  με  $AB = 20$ ,  $A\Delta = 10\sqrt{3}$  και  $\hat{B} = 120^\circ$ .

**A.** Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 20$  και  $\Gamma\Delta = 30$  Μονάδες 9

**B.** Αν  $M$  και  $N$  τα μέσα των  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι η  $MN$  χωρίζει το τραπέζιο σε δύο ισεμβαδικά τραπέζια. Μονάδες 8

**Γ.** Να υπολογίσετε το μήκος της  $MN$ . Μονάδες 8

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ( $\epsilon$ ) ενός τραpezίου δίνεται από τη σχέση  $E = \frac{B + \beta}{2} \cdot \upsilon$ ,

όπου  $B, \beta$  βάσεις και  $\upsilon$  ύψος.

Μονάδες 15

**B.** Να απαντήσετε με Σωστό ή Λάθος στις παρακάτω προτάσεις:

**α.**  $\Delta^p(O, R) = R^2 - \delta^2$ ,  $R$  ακτίνα και  $\delta$  η απόσταση από το κέντρο του κύκλου του σημείου  $p$

**β.** Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ισχύει:  $\beta \cdot \gamma = \alpha \cdot \upsilon_\alpha$ , όπου  $\beta, \gamma$  κάθετες πλευρές,  $\alpha$  υποτείνουσα και  $\upsilon_\alpha$  το ύψος από το σημείο  $A$

**γ.** Αν δύο τρίγωνα έχουν  $\hat{A} = \hat{A}'$  τότε  $\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$

**δ.** Σε ένα κανονικό  $n$ -γώνο εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R$  ισχύει:

$$\alpha_n^2 + \frac{\lambda_n^2}{4} = R^2, \text{ όπου } \lambda_n \text{ πλευρά και } \alpha_n \text{ απόστημα του } n\text{-γώνου}$$

**ε.** Αν δύο χορδές  $AB, \Gamma\Delta$  τέμνονται εσωτερικά στο σημείο  $P$  ισχύει:

$$PA \cdot PB = PG \cdot PD$$

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ),  $B\Gamma = 10$  και  $A\Gamma = 8$ . Αν  $A\Delta$  το ύψος από την κορυφή  $A$

**α.** Να βρεθεί η  $AB$

Μονάδες 10

**β.** Να υπολογιστεί το ύψος του τριγώνου  $A\Delta$

Μονάδες 15

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Αν σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = 2\mu_\alpha^2$

**α.** Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$

Μονάδες 15

**β.** Να βρεθεί το είδος της  $\hat{A}$

Μονάδες 10

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ημικύκλιο  $(O, R)$  διαμέτρου  $AB$  και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια με διαμέτρους  $AO$  και  $OB$ . Αν ο κύκλος  $(K, \rho)$  εφάπτεται στα τρία ημικύκλια,

**α.** να υπολογίσετε την ακτίνα  $\rho$

Μονάδες 12

**β.** να υπολογίσετε το άθροισμα  $S$  των εμβαδών των καμπυλόγραμμων τριγώνων που περικλείονται μεταξύ των τριών ημικυκλίων και του κύκλου  $(K, \rho)$

Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο, τότε το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών.

Μονάδες 10

**B.**

**α.** Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται:  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 6$  και  $\mu_a = 5$ . Η πλευρά  $\alpha$  είναι ίση με:

- i. 4      ii. 8      iii. 9      iv. 10      v. 11

**β.** Αν σε τρίγωνο  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 8$  το τρίγωνο είναι:

- i. αμβλυγώνιο στο A    ii. ορθογώνιο στο A    iii. αμβλυγώνιο στο B  
iv. αμβλυγώνιο στο Γ    v. ορθογώνιο στο B.

**γ.** Ένα ισόπλευρο τρίγωνο έχει πλευρά 4. Το εμβαδόν του είναι :

- i.  $2\sqrt{3}$       ii. 8      iii.  $4\sqrt{3}$       iv. 6      v.  $\sqrt{3}$

Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\alpha = 7$ ,  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 13$

**α.** Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

**β.** Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην πλευρά ΑΒ.

**γ.** Να υπολογίσετε τη γωνία Γ.

Μονάδες 8 + 8 + 9

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο  $AB = 2R$  και Ο μέσον της ΑΒ. Η κάθετη στο μέσο Μ

του ΟΑ τέμνει το ημικύκλιο στο Γ. Να υπολογίσετε:

**α.** τη γωνία ΒΑΓ.

Μονάδες 10

**β.** το μήκος των ΒΓ, ΜΓ ως συνάρτηση του R.

Μονάδες 15

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\alpha = 7$ ,  $\beta = 6$  και  $\gamma = 5$ .

**α.** Να αποδείξετε ότι  $E = 6\sqrt{6}$ .

Μονάδες 6

**β.** Να βρείτε το ύψος του  $υ_\beta$ .

Μονάδες 5

**γ.** Να βρείτε τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου.

Μονάδες 8

**δ.** Να βρείτε την πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου που είναι ισοδύναμο με το ABΓ.

Μονάδες 6



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν  $E$  ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινούςας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινούσα.
- β.** Το  $P$  είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου  $(O, R)$  αν και μόνο αν  $\Delta_{(O, R)}^P < 0$
- γ.** Το εμβαδόν ενός τριγώνου δίνεται και από τον τύπο  $E = \frac{1}{2} \beta \cdot \gamma \cdot \eta\mu\Gamma$
- δ.** Η γωνία  $\varphi_n$  ενός κανονικού πολυγώνου με  $n$  το πλήθος πλευρές, δίνεται από τον τύπο 
$$\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}.$$
- ε.** Σε κάθε κανονικό πολύγωνο, με  $n$  το πλήθος πλευρές, ακτίνας  $R$ , πλευράς  $\lambda_n$  και αποστήματος  $\alpha_n$ , ισχύει:  $4\alpha_n^2 + \lambda_n^2 = 4R^2$  Μονάδες  $5 \times 2 = 10$

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $AB = 6$ ,  $A\Gamma = 12$  και  $B\Gamma = 8$

- α.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι αμβλυγώνιο. Μονάδες 8
- β.** Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου  $BM$ . Μονάδες 9
- γ.** Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου  $BM$  στην πλευρά  $A\Gamma$  Μονάδες 8

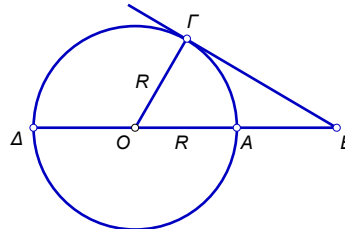
Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = 12$ ,  $B\Gamma = 16$  και  $\hat{B} = 30^\circ$ .

- α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 8
- β.** Αν  $\Delta$  σημείο της πλευράς  $AB$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = \frac{1}{3}AB$  και  $E$  σημείο της πλευράς  $A\Gamma$  τέτοιο ώστε  $GE = \frac{1}{4}A\Gamma$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta E$ . Μονάδες 10
- γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου  $\Delta E\Gamma B$ . Μονάδες 7

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R = OA$ . Στην προέκταση της  $OA$  προς το μέρος του  $A$  παίρνουμε σημείο  $B$ , τέτοιο ώστε  $OA = AB$ . Αν  $B\Gamma$  είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το  $B$  προς τον κύκλο



- A.** Να δείξετε ότι  $B\Gamma = R\sqrt{3}$ . Μονάδες 5
- B.** Να υπολογίσετε, ως συναρτήση της ακτίνας  $R$ :
- α.** Την περίμετρο του μικτόγραμου τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 8
- β.** Το εμβαδόν του μικτόγραμου τριγώνου  $AB\Gamma$ . Μονάδες 12

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Σε κύκλο (O, R) να εγγράψετε τετράγωνο και να αποδείξετε ότι η πλευρά του είναι

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \text{ και το απόστημά του } \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2} \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη Σωστό ή Λάθος.

α. Σε τρίγωνο ABΓ με  $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow \alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$

β. Η πλευρά κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R) είναι  $\lambda_6 = R\sqrt{2}$

γ. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων είναι ίσος με το λόγο ομοιότητας

δ. Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν  $\Delta_{(O,R)}^P > 0$

ε. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) για το ύψος AΔ ισχύει:  $A\Delta^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Έστω τρίγωνο ABΓ και έστω Θ το βαρύκεντρό του. Να αποδείξετε ότι:

α.  $\mu_a^2 + \mu_b^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$  Μονάδες 13

β.  $\Theta A^2 + \Theta B^2 + \Theta \Gamma^2 = \frac{1}{3}(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$  Μονάδες 12

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε κύκλο (O, R) προεκτείνουμε την ακτίνα OA κατά τμήμα AB = R. Αν BΓ εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου, να αποδείξετε ότι:

α. Το τρίγωνο OΓB είναι ορθογώνιο

β.  $B\Gamma = R\sqrt{3}$

γ. Η γωνία  $\hat{B} = 30^\circ$

δ. Η περίμετρος του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ είναι  $\frac{R}{3}(\pi + 3 + 3\sqrt{3})$

ε. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ είναι  $\frac{R^2}{6}(3\sqrt{3} - \pi)$  Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ABΓ είναι:  $\alpha = 7, \beta = 5, \gamma = 4$

α. Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

β. Την προβολή της πλευράς β στην πλευρά γ

γ. Την προβολή της διαμέσου  $\mu_a$  στην πλευρά α

δ. Το εμβαδόν (ABΓ)

ε. Την ακτίνα R του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο κύκλου

Μονάδες 25

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

Α. Σε κύκλο (O,R) να εγγράψετε τετράγωνο και να αποδείξετε ότι η πλευρά του είναι

$$\lambda_4 = R\sqrt{2} \text{ ενώ το απόστημα } \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Α. Αν σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ή κανονικό εξάγωνο, τότε η πλευρά και το απόστημά του είναι αντίστοιχα  $\lambda_3 = \dots, \alpha_3 = \dots, \lambda_6 = \dots, \alpha_6 = \dots$ , δώστε τα αποτελέσματα συναρτήσσει του  $\mathbb{R}$ .

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

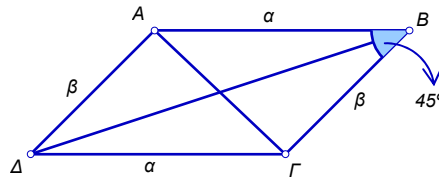
Δίδεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ με

$$\hat{B} = 45^\circ, AB = \Delta\Gamma = \alpha, B\Gamma = A\Delta = \beta.$$

α. Να υπολογίσετε τις διαγώνιους ΑΓ, ΒΔ ως συνάρτηση των πλευρών α, β.

β. Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$

γ. Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma^2 \cdot B\Delta^2 = \alpha^4 + \beta^4$



**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

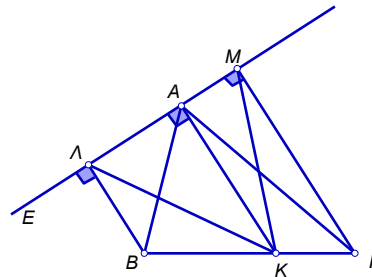
Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ευθεία (ε) που περνά από την κορυφή Α. Αν Κ σημείο της ΒΓ ώστε ΚΑ ⊥ (ε) και ΒΛ ⊥ (ε) και ΓΜ ⊥ (ε). Να δεί-

ξετε ότι τα τρίγωνα

α. (ABK) = (AΛK)

β. (AMK) = (ΑΓK)

γ.  $(AB\Gamma) = \frac{\Lambda M \cdot KA}{2}$



**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

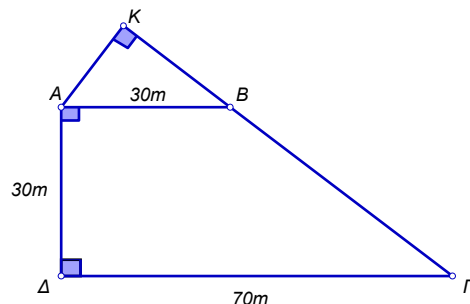
Οικόπεδο σχήματος τραπεζίου έχει

$$AB = A\Delta = 30m, \Delta\Gamma = 70m, \hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$$

α. Να βρείτε το εμβαδόν του ABΓΔ

β. Αν το κόστος για την περιφραξή του είναι 10 € το μέτρο, πόσο στοιχίζει η περιφραξή του ABΓΔ.

γ. Να υπολογίσετε την απόσταση AK του Α από τη ΒΓ.



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

A. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των

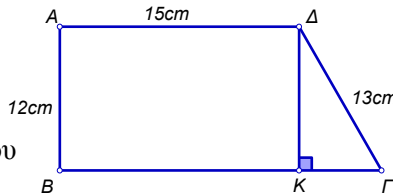
βάσεων του επί το ύψος του, δηλαδή:  $E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot \upsilon$

Μονάδες 12

B. Να υπολογιστούν:

α. η περίμετρος

β. το εμβαδόν του τραπεζίου



Μονάδες 13

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο ABΓ είναι AB= 6cm, AΓ = 9cm, BΓ = 7cm

α. Να βρεθεί το είδος του τριγώνου

Μονάδες 7

β. Να βρεθεί η διάμεσος από τη γωνία A

Μονάδες 8

γ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

α. Να συμπληρωθεί ο πίνακας

ΠΟΛΥΓΩΝΟ	ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΓΩΝΙΑ (ω)	ΓΩΝΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ (φ)	ΠΛΕΥΡΑ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ (λ <sub>v</sub> )
ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ			
ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ			
ΚΑΝΟΝΙΚΟ ΕΞΑΓΩΝΟ			

Μονάδες 15

β. Να βρεθεί το εμβαδόν τετραγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R = 6cm

Μονάδες 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Σε κύκλο (O, R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά AB = 12.

Να υπολογίσετε:

α. την ακτίνα R του κύκλου

Μονάδες 6

β. το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου (O, R)

Μονάδες 6

γ. το εμβαδόν του ισόπλευρου τριγώνου ABΓ

Μονάδες 6

δ. το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τον κύκλο και το ισόπλευρο τρίγωνο

Μονάδες 7

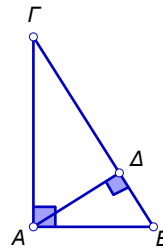
## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας (Πυθαγόρειο Θεώρημα) Μονάδες 10
- B.** Να γράψετε τον ορισμό του κανονικού πολυγώνου Μονάδες 6
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με πλευρές  $a, \beta, \gamma$  αν  $a^2 > \beta^2 + \gamma^2$  τότε η γωνία  $A$  είναι οξεία. Μονάδες 3
- β.** Αν  $a, \beta$  οι πλευρές ενός παραλληλογράμμου τότε το εμβαδόν του  $E$  δίνεται από την ισότητα:  $E = a \cdot \beta$  Μονάδες 3
- γ.** Σε κάθε κανονικό πολύγωνο με πλήθος πλευρών  $n$  ισχύει η σχέση:  $\lambda_n^2 + 4a_n^2 = 4R^2$  Μονάδες 3

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Στο σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $A = 90^\circ$ ,  $AB = 5$  και  $\Delta B = 3$ . Όπου  $AD$  το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην υποτεινούσα  $B\Gamma$ . Να υπολογίσετε:



- A.** το ύψος  $AD$  Μονάδες 12
- B.** την υποτεινούσα  $B\Gamma$  Μονάδες 13

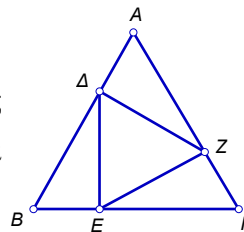
Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνονται δύο τεμνόμενοι κύκλοι  $(K, R)$ ,  $(\Lambda, \rho)$  και  $AB$  η κοινή τους χορδή. Στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) παίρνουμε τυχαίο σημείο  $M$  και φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα  $MD$  και  $ME$  προς τους κύκλους  $(K, R)$ ,  $(\Lambda, \rho)$  αντίστοιχα. Να αποδειχτεί ότι  $MD = ME$ .

Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , πλευράς 3. Στις πλευρές  $AB, B\Gamma, \Gamma A$  παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία  $\Delta, E, Z$  τέτοια ώστε  $A\Delta = BE = \Gamma Z = 1$  όπως στο σχήμα. Να υπολογίσετε:



- A.** το εμβαδόν του τριγώνου  $B\Delta E$  Μονάδες 8
- B.** το εμβαδόν του τριγώνου  $\Delta E Z$  Μονάδες 8
- Γ.** το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 9

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- α. Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε Σωστές ή Λάθος τις προτάσεις:
- α. Ρόμβος με διαγωνίους  $\delta_1, \delta_2$  είναι ισεμβαδικός με ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με πλευρές  $\delta_1, \delta_2$
- β. Το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$  είναι  $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4R}$
- γ. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  η διάμεσός του  $\mu_\alpha = \frac{\sqrt{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}}{2}$
- δ. Το εμβαδόν κυκλικού τομέα κυκλικού δίσκου  $(O, R)$  με επίκεντρη γωνία  $\mu^\circ$  είναι
- $$(O, \widehat{AB}) = \frac{\alpha R^2 \mu}{360}$$
- ε. Το απόστημα ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$  είναι
- $$\alpha_3 = R\sqrt{3} \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ )  $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$  με  $AB = 4$ ,  $A\Delta = 3$  και  $B\Gamma = 5$ .

Να βρείτε

- α. την προβολή της  $B\Gamma$  στη  $\Gamma\Delta$  Μονάδες 10
- β. το εμβαδόν του τραπέζιου  $AB\Gamma\Delta$  Μονάδες 15

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\alpha = 2\gamma$  και  $\beta = \sqrt{7}\gamma$

- α. Να προσδιορίσετε το είδος της γωνίας  $B$  Μονάδες 7
- β. Δείξτε ότι  $\mu_\alpha = \sqrt{3}\gamma$  Μονάδες 10
- γ. Αν  $AE$  το ύψος του  $AB\Gamma$  από την κορυφή  $A$ , δείξτε ότι  $BE = \frac{1}{2}\gamma$  Μονάδες 8

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος  $(O, 2)$  και εγγεγραμμένο τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  κατά τμήμα  $BH = AB$ . Δείξτε ότι:

- A.** η  $A\Gamma$  είναι κάθετη στην  $\Gamma H$  Μονάδες 7
- B.** Υπολογίστε:
- α. το μήκος του τόξου  $B\Gamma$  Μονάδες 6
- β. το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που ορίζεται από τη χορδή  $B\Gamma$  και το τόξο  $B\Gamma$  Μονάδες 6
- γ. το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $B\Gamma H$  που ορίζεται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $BH, \Gamma H$  και το τόξο  $B\Gamma$ . Μονάδες 6

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu(\alpha + \beta) = \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\nu\beta + \sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \eta\mu\beta$  Μονάδες 8

B. Να αποδείξετε ότι:  $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1$  Μονάδες 8

Γ. Να απαντήσετε αν είναι σωστό ή λάθος κάθε ένα από τα παρακάτω

α.  $\log_a a = 0, 0 < a \neq 1$

β.  $\log_a \theta^k = k \log_a \theta, 0 < a \neq 1, \theta > 0, k \in \mathbb{R}$

γ.  $\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha$  Μονάδες 9

Θέμα 2<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι:  $\eta\mu(\alpha + \beta) \cdot \eta\mu(\alpha - \beta) = \sigma\upsilon\nu^2\beta - \sigma\upsilon\nu^2\alpha$  Μονάδες 7

B. Να δειχθεί ότι:  $\epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1 + \eta\mu 2\alpha}$  Μονάδες 8

Γ. Να λυθεί η εξίσωση:  $\eta\mu 2x + \eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x$  Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

A. Να λυθεί η εξίσωση:  $x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12 = 0$  Μονάδες 13

B. Να λυθεί η εξίσωση:  $\sqrt{x^2 - 2x + 6} = 2x - 3$  Μονάδες 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

A. Να λυθεί η εξίσωση:  $2^{2x+2} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$  Μονάδες 12

B. Να λυθεί η ανίσωση:  $\log(x^2 + 2) > \log x + \log 3$  Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο  $P(x)$  έχει παράγοντα το  $x - p$  αν και μόνο αν το  $p$  είναι ρίζα του  $P(x)$ , δηλαδή αν και μόνο αν  $P(p) = 0$  Μονάδες 10
- B.** Τι ονομάζεται μηδενικό πολυώνυμο και τι πολυώνυμο μηδενικού βαθμού Μονάδες 6
- Γ.** Να απαντήσετε αν είναι σωστή ή λάθος κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:
- α.** Για οποιεσδήποτε γωνίες  $\alpha, \beta$  ισχύει ότι:  $\text{συν}(\alpha - \beta) = \text{συν}\alpha \cdot \text{συν}\beta - \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\beta$
- β.** Ο βαθμός του γινομένου δύο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών
- γ.** Η συνάρτηση  $f(x) = a^x$  με  $0 < a \neq 1$  έχει σύνολο τιμών το διάστημα  $(0, +\infty)$ . Μονάδες 9

Θέμα 2<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu(\alpha + \beta) + \eta\mu(\alpha - \beta) = 2\eta\mu\alpha \cdot \text{συν}\beta$  Μονάδες 7
- B.** Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu 6x + \eta\mu 4x = 2\eta\mu 5x \cdot \text{συν}x$  Μονάδες 8
- Γ.** Να λύσετε την εξίσωση  $\eta\mu 6x + \eta\mu 4x + \eta\mu 5x = 0$  Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = x^3 - (\alpha + 3)x^2 + (2\beta + 1)x - 2\alpha$  όπου  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- A.** Αν ο αριθμός 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου και το υπόλοιπο της διαίρεσης του  $P(x)$  δια του  $x + 1$  είναι  $-18$  να βρεθούν τα  $\alpha$  και  $\beta$  Μονάδες 8
- B.** Για  $\alpha = 2$  και  $\beta = \frac{7}{2}$
- α.** Να λυθεί η εξίσωση  $P(x) = 0$  Μονάδες 6
- β.** Να γίνει η διαίρεση του πολυωνύμου  $P(x)$  δια του  $x^2 + 1$  και να γραφεί το  $P(x)$  με την ταυτότητα της ευκλείδειας διαίρεσης Μονάδες 5
- γ.** Να λυθεί η ανίσωση  $P(x) > 7x + 1$  Μονάδες 6

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \log(100x)$   $x > 0$  και  $\alpha \in \mathbb{R}$

- A.** Αν είναι  $f(10) = 25$ , να δειχθεί ότι  $\alpha = 1$  Μονάδες 7
- B.** Για την τιμή  $\alpha = 1$ :
- α.** Να δείξετε ότι η  $f(x)$  έχει τη μορφή:  $f(x) = (\log^2 x + 4\log x)^2$  Μονάδες 9
- γ.** Να λυθεί η εξίσωση  $f(x) = 0$  Μονάδες 9



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι:

αν από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B, τότε ισχύει ότι  $PE^2 = PA \cdot PB$

Μονάδες 10

**B.** Συμπληρώστε τα κενά των παρακάτω προτάσεων:

**α.**  $\hat{A} > 90^\circ \Leftrightarrow a^2 \dots \beta^2 + \gamma^2$

**β.** Το εμβαδόν τριγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο (O, ρ) είναι  $E = \dots$

**γ.** Αν η πλευρά κανονικού πολυγώνου είναι:  $\lambda_n = R\sqrt{3}$ , τότε  $v = \dots$

**δ.** Το μήκος τόξου  $\mu^\circ$ , κύκλου ακτίνας R είναι:  $l = \dots$

**ε.** Σε τρίγωνο ABΓ η διάμεσος  $\mu_a^2 = \frac{\dots}{4}$

Μονάδες 15

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ABΓ είναι  $\hat{A} = 120^\circ$ ,  $\beta = 5$ ,  $\gamma = 3$ . Να υπολογιστούν:

**α.** Το μήκος της πλευράς α

Μονάδες 12

**β.** Το μήκος της προβολής της διαμέσου  $\mu_a$  πάνω στην πλευρά ΒΓ

Μονάδες 13

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ και ο εγγεγραμμένος σ' αυτό κύκλος (O, ρ), ο οποίος εφάπτεται στις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα. Αν είναι  $\Delta_{(O,\rho)}^A = 4$ ,  $\Delta_{(O,\rho)}^B = 16$ ,  $\Delta_{(O,\rho)}^C = 36$ ,

να υπολογιστούν:

**α.** Τα τμήματα ΑΖ, ΒΔ και ΓΕ

Μονάδες 10

**β.** Την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου

Μονάδες 15

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία Α, Β, Γ ώστε  $AB = \lambda_6$  και  $B\Gamma = \lambda_3$ . Αν το Μ είναι μέσον του ΒΓ και Δ το σημείο που τέμνει η προέκταση της ΑΜ τον κύκλο:

**A.** Αποδείξτε ότι:  $\eta \text{ ΑΓ} = 2R$

Μονάδες 9

**B.** Να υπολογίσετε:

**α.** Το τμήμα ΜΔ συναρτήσει του R

Μονάδες 9

**β.** Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΜΓ

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A.** Να αποδείξετε ότι: Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει  $a^2 < b^2 + \gamma^2$  αν και μόνον αν  $\hat{A} > 90^\circ$
- β.** Το εμβαδόν ενός τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.
- γ.** Σε κανονικό πολύγωνο ισχύει  $\varphi_n + \omega_n = 180^\circ$ .
- Γ.** Αντιστοιχίστε κάθε στοιχείο της στήλης A σε ένα μόνο στοιχείο της στήλης B.

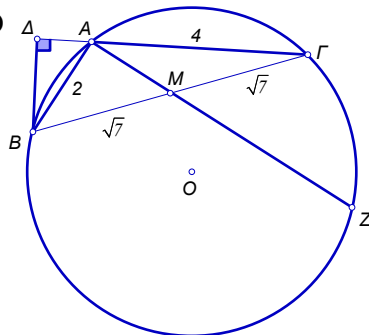
ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
1. μήκος τόξου $\mu^\circ$ σε κύκλο ακτίνας R	<b>α.</b> $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$
2. εμβαδόν κυκλικού τομέα $\mu^\circ$ σε κύκλο ακτίνας R	<b>β.</b> $2\pi R^2$
3. εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	<b>γ.</b> $\frac{\pi R \mu}{180}$
	<b>δ.</b> $\pi R^2$
	<b>ε.</b> $\frac{\pi R \mu}{360}$

Μονάδες 13 + 6 + 6

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου O ακτίνας R, με πλευρές  $AB = 2$ ,  $B\Gamma = 2\sqrt{7}$  και  $A\Gamma = 4$ . Αν η προέκταση της διαμέσου AM τέμνει τον περιγεγραμμένο περί το ABΓ κύκλο στο Z να δείξετε ότι:

- α.** η γωνία A είναι  $120^\circ$ .
- β.** η προβολή της AB πάνω στην AΓ είναι  $AD = 1$ .
- γ.**  $AM = \sqrt{3}$ .
- δ.**  $MZ = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ .



Μονάδες 6 + 6 + 6 + 7

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

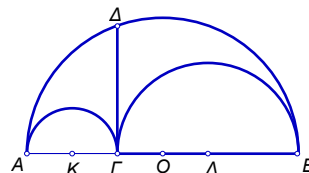
Σε κύκλο κέντρου O και ακτίνας R θεωρούμε παράλληλες χορδές  $AB = \lambda_6$ ,  $\Gamma\Delta = \lambda_3$  εκατέρωθεν του κέντρου O. Να υπολογιστούν :

- α.** Το ύψος του τραπεζίου ABΓΔ.
- β.** Το εμβαδόν του τραπεζίου ABΓΔ.
- γ.** Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος (O, ΓΔ)

Μονάδες 8 + 8 + 9

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου  $AB = 6R$  και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων  $A\Gamma = 2R$  και  $\Gamma B = 4R$ , όπου Γ σημείο της διαμέτρου AB. Η κάθετος της AB στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να δείξετε ότι:



- α.**  $\Gamma\Delta = 2\lambda_4$ ,  $A\Delta = 2\lambda_3$
- β.** το άθροισμα του μήκους των 2 ημικυκλίων  $\widehat{A\Gamma}$ ,  $\widehat{\Gamma B}$  ισούται με το μήκος του ημικυκλίου  $\widehat{AB}$  γ) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι ίσο με  $\frac{\pi \cdot \Gamma\Delta^2}{4}$  (όπου  $\lambda_3, \lambda_4$  οι πλευρές κανονικών πολυγώνων ισοπλεύρου τριγώνου και τετραγώνου εγγεγραμμένων σε κύκλο ακτίνας R).

Μονάδες 10 + 7 + 8

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Αν δύο χορδές AB, ΓΔ προεκτεινόμενες τέμνονται σε ένα σημείο P, εκτός του κύκλου, τότε ισχύει  $PA \cdot PB = PG \cdot PD$ . Μονάδες 15

**B.** Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ στο οποίο είναι  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\gamma = 4$  και  $\beta = 9$ . Η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου ΔΕΖ που είναι ισοδύναμο με το ABΓ ισούται με :

$$\mathbf{A: 6, \quad B: 13, \quad \Gamma: 4\sqrt{3}, \quad \Delta: 9\sqrt{3}, \quad E: 5}$$

*Επιλέξτε τη σωστή τιμή*

Μονάδες 5

**Γ.** Αν ο λόγος των εμβαδών δύο κυκλικών δίσκων (O, R) και (O', R') είναι  $\frac{9}{8}$ , ο λόγος

των περιμέτρων των κύκλων αυτών είναι:

$$\mathbf{A: \frac{3\sqrt{2}}{4}, \quad B: \frac{9}{64}, \quad \Gamma: \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Delta: \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad E: \sqrt{\frac{3}{2}}}$$

*Επιλέξτε τη σωστή τιμή*

Μονάδες 5

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται το τρίγωνο ABΓ που έχει πλευρά  $AB = 8$ , πλευρά  $AG = 12$ , διάμεσο  $AM = 8$ .

Φέρνουμε το ύψος ΑΔ από την κορυφή στη πλευρά ΒΓ. Να υπολογισθούν:

**A.** Η πλευρά ΒΓ. Μονάδες 13

**B.** Το ευθύγραμμο τμήμα ΔΜ (Μ το μέσον της ΒΓ). Μονάδες 12

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Λ το μέσον της πλευράς ΒΓ και Κ το μέσον της πλευράς ΓΔ. Να αποδείξετε ότι ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις :

**A.**  $(AK\Gamma\Lambda) = (A\Delta K) + (AB\Lambda)$  και Μονάδες 15

**B.**  $(AK\Gamma\Lambda) = \frac{1}{2}(AB\Gamma\Delta)$  Μονάδες 10

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε κύκλο με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R τοποθετούμε τα σημεία A, B, Γ και Δ διαδοχικά, έτσι ώστε να είναι η χορδή  $AB = \lambda_6$ ,  $B\Gamma = \lambda_3$  και  $\Delta\Gamma = \lambda_4$ . Με τη χρήση της ακτίνας R να υπολογισθούν:

**A.** Το μήκος της χορδής ΑΔ. Μονάδες 10

**B.** Το άθροισμα των τεσσάρων κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις τέσσερις χορδές AB, ΒΓ, ΓΔ, ΑΔ και τον κύκλο (O, R). Μονάδες 15

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι:

Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν το τρίγωνο ABΓ με πλευρές  $a, \beta, \gamma$  είναι αμβλυγώνιο, ισχύει  $a^2 > \beta^2 + \gamma^2$

β. Αν σε τρίγωνο ABΓ με πλευρές  $a, \beta, \gamma$  ισχύει  $a^2 < \beta^2 + \gamma^2$ , τότε το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

Μονάδες 4

γ. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας:

ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ	$\lambda_n$ ΠΛΕΥΡΑ	$a_n$ ΑΠΟΣΤΗΜΑ
ισόπλευρο τρίγωνο		
τετράγωνο		
κανονικό εξάγωνο		

Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $a = 5, \gamma = 3, B = 120^\circ$

α. Να υπολογιστεί η πλευρά  $\beta$

Μονάδες 9

β. Να υπολογιστεί η διάμεσός του  $\mu_a$

Μονάδες 8

γ. Να υπολογιστεί η προβολή της διαμέσου  $\mu_a$  στην πλευρά  $a$

Μονάδες 8

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Στο σχήμα είναι  $\Delta\Gamma = OA = R, OM = 7$  και  $\Delta_{(O,R)}^M = 40$

α. Να αποδείξετε ότι  $R = 3$

Μονάδες 9

β. Να υπολογιστεί το  $M\Gamma = x$

Μονάδες 8

γ. Να υπολογίσετε τα εμβαδά (OMΓ) και (AMΓ)

Μονάδες 8

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος (O,R) και εξωτερικό του σημείο M από το οποίο φέρουμε τα εφαπτόμενα

τμήματα MA και MB. Αν  $\frac{(MAB)}{(OAB)} = 3$

α. Να αποδείξετε ότι  $OM = 2R$

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι  $AB = \lambda_3$

Μονάδες 8

γ. Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του R το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου ABM που ορίζεται από τα εφαπτόμενα τμήματα MA, MB και του κυρτού τόξου AB

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Να δείξετε ότι το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του. Δηλαδή  $E = \frac{B + \beta}{2} \cdot u$  όπου B, β οι βάσεις του τραπεζίου και u το ύψος του. Μονάδες 13

- B. Να μεταφέρετε στο γραπτό σας τον παρακάτω πίνακα και να τον συμπληρώσετε συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου των αντίστοιχων κανονικών πολυγώνων:

	Κανονικό Εξάγωνο	Τετράγωνο	Ισόπλευρο Τρίγωνο
Πλευρά $\lambda_n$			
Απόσταση $a_n$			

Μονάδες 12

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ABΓ οι πλευρές του είναι AB = 6, ΒΓ = 12, ΑΓ = 8.

- A. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο Μονάδες 5  
 B. Να υπολογίσετε τη διάμεσο ΑΜ Μονάδες 10  
 Γ. Να υπολογίσετε την προβολή της διαμέσου ΑΜ στην πλευρά ΒΓ. Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

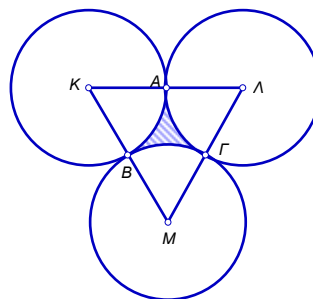
Τετράγωνο ABΓΔ πλευράς a είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Αν E είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο σημείο Z να δείξετε ότι:

- A.  $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$  Μονάδες 13  
 B.  $BE = 5EZ$  Μονάδες 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Τρεις ίσοι κύκλοι (K, R), (Λ, R), (M, R) εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β, Γ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R:

- A. Το εμβαδόν του τριγώνου ΚΛΜ  
 B. Το μήκος του τόξου ΑΒ  
 Γ. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ΚΑΒ  
 Δ. Την περίμετρο του καμπυλόγραμμου χωρίου ΑΒΓ  
 Ε. Το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου χωρίου ΑΒΓ.



Μονάδες 25

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι: Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος

$$\text{των βάσεων του επί το ύψος του. Δηλαδή: } E = \frac{(B + \beta)}{2} \cdot \upsilon$$

Όπου  $B$ ,  $\beta$  οι βάσεις του τραπεζίου και  $\upsilon$  το ύψος του.

Μονάδες 13

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

**α.** Το εμβαδόν τριγώνου με πλευρές  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  δίνεται από τον τύπο:  $E = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu B$

**β.** Το απόστημα κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο  $(O, R)$  είναι:  $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$

**γ.** Το μήκος  $l$  ενός τόξου  $\mu^\circ$  σε κύκλο  $(O, R)$  δίνεται από τον τύπο:  $l = \frac{\pi R \mu}{180}$ .

**δ.** Το εμβαδόν  $E$  κυκλικού δίσκου ακτίνας  $R$  δίνεται από τον τύπο  $E = 2\pi R$

Μονάδες 12

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Τα μήκη των πλευρών τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 13$  και  $\gamma = 9$

**A.** Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο

Μονάδες 7

**B.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο  $AM$  του τριγώνου

Μονάδες 9

**Γ.** Να υπολογίσετε το μήκος της προβολής της διαμέσου  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$  Μονάδες 9

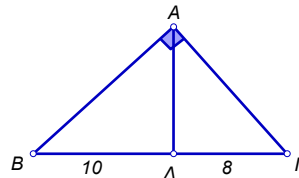
Θέμα 3<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο

τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος  $A\Delta$

που αντιστοιχεί στην πλευρά  $B\Gamma$ . Αν είναι

$B\Delta = 10$  και  $\Gamma\Delta = 8$  να υπολογίσετε:



**A.** Το τμήμα  $A\Delta$

Μονάδες 5

**B.** Το τμήμα  $AB$

Μονάδες 5

**Γ.** Το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Delta B$

Μονάδες 5

**Δ.** Το εμβαδόν του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο  $A\Gamma\Delta$

Μονάδες 10

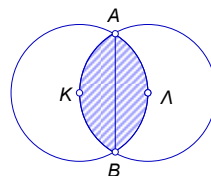
Θέμα 4<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα έχουμε δύο ίσους κύκλους

$(K, R)$  και  $(\Lambda, R)$  με ακτίνα  $R$ , που ο ένας

περνάει από το κέντρο του άλλου και οι

οποίοι τέμνονται στα σημεία  $A, B$ .



**A.** Να αποδείξετε ότι  $AB = \lambda_3$  όπου  $\lambda_3$  είναι η πλευρά κανονικού τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας  $R$

Μονάδες 7

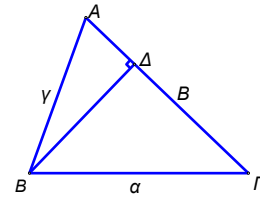
**B.** Να υπολογίσετε, συναρτήσει της ακτίνας  $R$ , το εμβαδόν και την περίμετρο του κοινού μέρους των δύο κυκλικών δίσκων.

Μονάδες 18

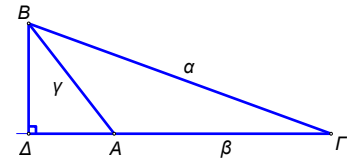
**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

α. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} < 90^\circ$  και  $B\Delta \perp A\Gamma$ , να συμπληρώσετε την ισότητα:  $a^2 = \dots$   
(γενίκευση πυθαγορείου για πλευρά τριγώνου απέναντι από οξεία γωνία)



β. Αν στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\hat{A} > 90^\circ$  και  $B\Delta \perp A\Gamma$ , να συμπληρώσετε την ισότητα:  $a^2 = \dots$   
(γενίκευση πυθαγορείου για πλευρά τριγώνου απέναντι από αμβλεία γωνία)



- γ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διάμεσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. (1<sup>ο</sup> θεώρημα διαμέσων)
- δ. Αν  $\mu_a$  η διάμεσος τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην πλευρά  $a$ , συμπληρώστε την ισότητα:  $\mu_a^2 = \dots$  με την βοήθεια των πλευρών του τριγώνου. Μονάδες 5 + 5 + 10 + 5

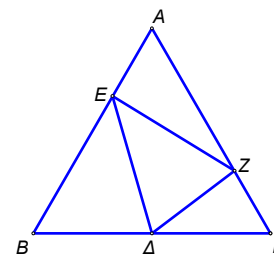
**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB = 9$ ,  $B\Gamma = 15$  και το ύψος του ΑΔ.

- α. Υπολογίστε την πλευρά ΑΓ.
- β. Υπολογίστε το εμβαδόν του τριγώνου.
- γ. Υπολογίστε το ύψος ΑΔ.
- δ. Υπολογίστε την προβολή της ΑΒ στην υποτείνουσα.
- ε. Υπολογίστε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου. Μονάδες 5×5

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Δίνεται το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές του ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ θεωρούμε τα σημεία Ε, Δ, Ζ αντίστοιχα, ώστε να είναι  $AE = \frac{1}{3} AB$ ,  $B\Delta = \Gamma\Delta$  και  $AZ = \frac{2}{3} A\Gamma$ .



Αν είναι  $(AB\Gamma) = 4\sqrt{3}$ , υπολογίστε:

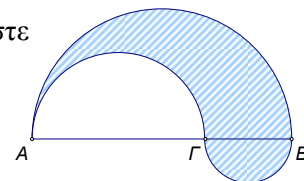
- α. την πλευρά του  $a$ .
- β. τον λόγο των εμβαδών:  $\frac{(AEZ)}{(AB\Gamma)}$ .
- γ. το εμβαδόν του τριγώνου ΒΕΔ, αφού βρείτε τον λόγο  $\frac{(BE\Delta)}{(AB\Gamma)}$ .
- δ. το εμβαδόν του τριγώνου ΕΔΖ.

Μονάδες 5 + 5 + 5 + 10

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου  $AB = 8$  και  $\Gamma$  σημείο της ΑΒ ώστε  $B\Gamma = 2$ . Υπολογίστε:

- α. το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΑΓ.
- β. το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο την ΓΒ.
- γ. την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.



Μονάδες 5 + 5 + 15

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.
- B. Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις:
1. Η διαφορά των τετραγώνων δυο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί .....
  2. Αν δυο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με .....
  3. Αν  $\Delta_{(O,R)}^P > 0$ , τότε το P είναι .....σημείο του κύκλου (O,R)
  4. Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του ισούται με το γινόμενο .....
  5. Ο λόγος των εμβαδών δυο όμοιων πολυγώνων ισούται με .....

Μονάδες 15 +10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ  $AB = AG = 6$  και  $\hat{A} = 120^\circ$

- A. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
- B. Αν E σημείο της AG ώστε  $AE = \frac{1}{3} AG$  και AΔ το ύψος του, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ

Μονάδες 12 +13

## Θέμα 3

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\alpha = 6$ ,  $\beta = 5$  και  $\gamma = 4$

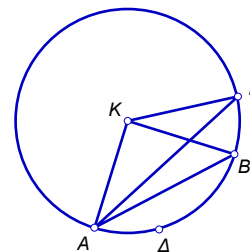
- α. Να δείξετε ότι  $\hat{A} < 90^\circ$
- β. Αν AΔ είναι η προβολή της πλευράς AB πάνω στην πλευρά A Γ να βρεθεί το τμήμα AΔ
- γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ
- δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου BΓΔ
- ε. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του περιγεγραμμένου στο τρίγωνο ABΓ κύκλου

Μονάδες 5×5

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος (K, R) και τα διαδοχικά τόξα  $\widehat{AB} = 90^\circ$  και  $\widehat{BG} = 30^\circ$ . Να υπολογίσετε με τη βοήθεια του R

- α. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα (K, AB)
- β. Το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος AΔB
- γ. Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ
- α. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ABΓ



Μονάδες 6+6+6+7



**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

**A.** Από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O, R) φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μια ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B. Να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$PE^2 = PA \cdot PB$$

Μονάδες 15

**B.** Αν ABΓ είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$ , AΔ το ύψος του και AM η διάμεσός του, τότε να συμπληρώσετε τα κενά:

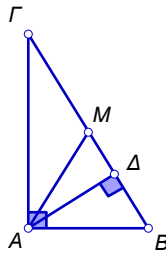
**α.**  $A\Delta^2 = \dots\dots\dots$

**β.**  $\frac{AB^2}{A\Gamma^2} = \frac{\dots}{\dots}$

**γ.**  $AB^2 - A\Gamma^2 = 2 \dots\dots\dots (AB > A\Gamma)$

**δ.**  $B\Gamma^2 - AB^2 = \dots\dots\dots$

**ε.**  $A\Gamma^2 = \dots\dots\dots$



Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\beta = 5$ ,  $\gamma = 3$  και  $\mu_a = \frac{\sqrt{19}}{2}$

**α.** Να υπολογίσετε την πλευρά α

Μονάδες 9

**β.** Να υπολογίσετε τη γωνία A

Μονάδες 8

**γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 8

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Στο διπλανό σχήμα το M είναι μέσο της AB,  $\Gamma\Delta = \frac{1}{3} B\Gamma$  και  $(AB\Gamma) = 36$ . Να υπολογιστούν

τα εμβαδά:

**α.** (MBΓ)

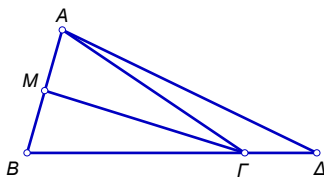
Μονάδες 8

**β.** (AΓΔ)

Μονάδες 12

**γ.** (AMΓΔ)

Μονάδες 5



**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Έστω τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Αν η πλευρά του BΓ είναι διάμετρος του κύκλου,  $AB = R$  και η διάμεσος BM του τριγώνου τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο σημείο Z, τότε:

**α.** Να αποδείξετε ότι  $A\Gamma = R\sqrt{3}$

Μονάδες 4

**β.** Να αποδείξετε ότι  $BM = \frac{R \cdot \sqrt{7}}{2}$

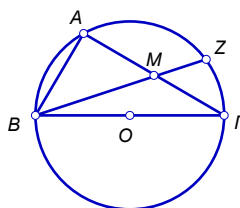
Μονάδες 7

**γ.** Να αποδείξετε ότι  $7MZ = 3MB$

Μονάδες 8

**δ.** Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{(AMB)}{(ZM\Gamma)}$

Μονάδες 6



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι: αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές. Μονάδες 15
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος:
- α.** Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \sin A$
- β.** Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει η ισοδυναμία:  $a^2 < b^2 + c^2 \Leftrightarrow \hat{A} < 90^\circ$
- γ.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με διάμεσο  $AM$  ισχύει:  
 $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$
- δ.** Το εμβαδόν ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι  $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{2R}$ , όπου  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου.
- ε.** Η γωνία ενός κανονικού  $n$ -γώνου είναι:  $\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$  Μονάδες 10

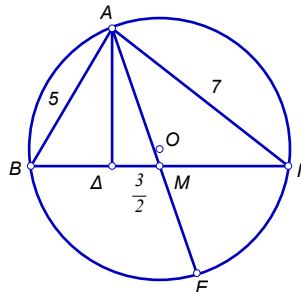
Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και τα  $E, Z$  είναι μέσα των πλευρών  $B\Gamma, \Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Να

δείξετε ότι:  $AE^2 + AZ^2 = \frac{5}{4} A\Gamma^2$  Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Στο σχήμα που δίνεται το τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει  $A\Gamma = 7$  και  $AB = 5$ . Αν  $A\Delta$  είναι ύψος, η διάμεσος  $AM$  τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο  $E$  και  $\Delta M = \frac{3}{2}$  τότε:



- A.** Να αποδείξετε ότι:  $B\Gamma = 8$  Μονάδες 8
- B.** Να υπολογίσετε το  $AM$  Μονάδες 8
- Γ.** Να υπολογίσετε το  $ME$  Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O, R)$ . Η πλευρά  $AB$  είναι ίση με την πλευρά  $\lambda_4$  του εγγεγραμμένου στον κύκλο  $(O, R)$  τετραγώνου και η πλευρά  $A\Gamma$  είναι ίση με την πλευρά  $\lambda_6$  του εγγεγραμμένου στον κύκλο  $(O, R)$  κανονικού εξαγώνου. Φέρνουμε το ύψος  $AH$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

- A.** Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 9
- B.** Να αποδείξετε ότι:  $AH = \frac{R \cdot \sqrt{2}}{2}$  Μονάδες 6
- Γ.** Να αποδείξετε ότι:  $B\Gamma = \frac{R(\sqrt{2} + \sqrt{6})}{2}$  Μονάδες 10

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Delta$  η προβολή της κορυφής  $A$  στην υποτείνουσα  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

**α.**  $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$  και  $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$  Μονάδες 7

**β.**  $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$  Μονάδες 7

**B.** Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9cm και 12cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:

**α.** 10cm    **β.** 12cm    **γ.** 13cm    **δ.** 14cm

Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. Μονάδες 5

**Γ.** Πότε ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Ποια σχέση συνδέει την πλευρά του, το απόστημά του και την ακτίνα του;

Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχουμε  $\beta = 7$ ,  $\gamma = 6$  και  $\mu_a = \frac{7}{2}$

**A.** Να υπολογίσετε την πλευρά  $a$  Μονάδες 10

**B.** Να βρείτε το είδος της γωνίας  $A$  Μονάδες 5

**Γ.** Να υπολογίσετε την προβολή της πλευράς  $a$  πάνω στην πλευρά  $\gamma$ . Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Η υποτείνουσα  $B\Gamma$  ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου είναι 4. Προεκτείνουμε τη  $B\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma\Delta$  ίσο με το  $B\Gamma$ .

**A.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 8

**B.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Delta$  Μονάδες 7

**Γ.** Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων  $AB\Delta$  και  $A\Gamma\Delta$  είναι ίσοι Μονάδες 10

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε κύκλο  $(O, R)$  παίρνουμε τόξο  $A = 60^\circ$  και φέρνουμε τη διάμετρο  $A\Gamma$  και τη χορδή  $B\Gamma$ .

**A.** Του σχηματιζόμενου μικτόγραμμου τριγώνου  $\Gamma AB$  να υπολογίσετε, ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$ ,

**α.** την περίμετρό του Μονάδες 9

**β.** το εμβαδόν του Μονάδες 9

**B.** Φέρνουμε την ακτίνα του κύκλου την κάθετη στην  $A\Gamma$  που τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Να υπολογίσετε, ως συνάρτηση του  $R$ , τα τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma\Delta$ . Μονάδες 7

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Δίνεται κύκλος (O, R)

α. Να εγγράψετε στον κύκλο (O, R) τετράγωνο ABΓΔ (κατασκευή – απόδειξη)

Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι:  $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ , όπου  $\lambda_4$  η πλευρά του τετραγώνου ABΓΔ.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι:  $a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ , όπου  $a_4$  το απόστημα του τετραγώνου ABΓΔ. Μονάδες 6

B. Στον κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να αντιστοιχίσετε το γράμμα Σ αν είναι σωστός ή το γράμμα Λ αν είναι λάθος και να μεταφέρετε την απάντησή σας στην κόλλα σας:

α. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ με πλευρές  $a, \beta, \gamma$  ισχύει:  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma$

β. Για κάθε ζεύγος ομοίων τριγώνων ισχύει ότι: ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο ομοιότητάς τους.

γ. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ με  $a^2 < \beta^2 + \gamma^2$ , όπου  $a, \beta, \gamma$  πλευρές του τριγώνου ABΓ, ισχύει ότι το τρίγωνο ABΓ είναι οξυγώνιο.

Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με  $\beta = 2a$  και  $\gamma = a\sqrt{7}$ , όπου  $a, \beta, \gamma$  πλευρές του τριγώνου ABΓ.

A. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι αμβλυγώνιο

Μονάδες 9

B. Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$

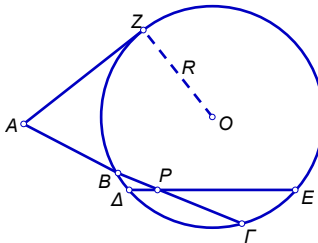
Μονάδες 8

Γ. Να δείξετε ότι  $\mu_\gamma = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ , όπου  $a, \beta, \gamma$  οι πλευρές και  $\mu_\gamma$  η διάμεσος του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 8

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα κύκλο (O, R). Δύο χορδές του κύκλου BΓ, ΔΕ τέμνονται στο P, έτσι ώστε να είναι (BP) = 3, (PΓ) = 2 και (PΔ) = 1. Έχουμε προεκτείνει τη χορδή ΓΒ προς το μέρος του B κατά τμήμα BA με (BA) = 4 και από το σημείο A έχουμε φέρει προς τον κύκλο εφαπτόμενο τμήμα AZ.



A. Να δείξετε ότι (EP) = 6

Μονάδες 5

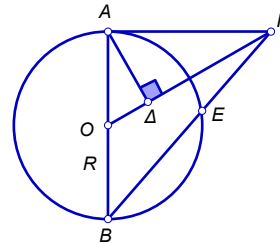
B. Να υπολογίσετε το μήκος του τμήματος AZ

Μονάδες 10

Γ. Να υπολογίσετε το λόγο  $\frac{(PBE)}{(P\Gamma\Delta)}$  των εμβαδών των τριγώνων PBE και PΓΔ. Μονάδες 10

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα έχουμε κύκλο (O, R) διαμέτρου AB. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ είναι εφαπτόμενο στον κύκλο (O, R). Το σημείο Δ είναι η προβολή του Α πάνω στην ΟΓ και Ε είναι το δεύτερο σημείο τομής της ΓΒ με τον κύκλο (O, R).



A. Να αποδείξετε ότι τα σημεία O, Δ, E, B είναι ομοκυκλικά.

Μονάδες 12

B. Αν η γωνία AOG είναι  $60^\circ$ , να υπολογίσετε συναρτήσει του R, το εμβαδόν του τριγώνου BOΓ

Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι:

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Μονάδες 15

B. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές και ποιες είναι λάθος ;

α. Αν σε τρίγωνο ABΓ έχουμε  $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ , τότε  $\hat{B} > 90^\circ$ .

β. Σε κάθε τρίγωνο ABΓ αν  $\mu_\alpha$  είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά  $\alpha$ , τότε:

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + \alpha^2.$$

γ. Ο τύπος που μας δίνει το εμβαδόν τραπέζιου με βάσεις  $\beta$ , B και ύψος  $\upsilon$  είναι :

$$E = \frac{B \cdot \beta}{2} \cdot \upsilon$$

δ. Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων τριγώνων με λόγο ομοιότητας  $\lambda$  είναι ίσος με  $\lambda^2$ .

ε. Η κεντρική γωνία  $\omega_n$  ενός κανονικού πολυγώνου με  $n$  πλευρές υπολογίζεται με τον τύπο:

$$\omega_n = \frac{360^\circ}{n}.$$

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), αν το AΔ είναι ύψος προς την υποτείνουσα, AΓ = 15 και ΔΓ = 9, τότε να υπολογίσετε:

α. Τα τμήματα AΔ, BΔ και AB.

Μονάδες 18

β. Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ABΓ.

Μονάδες 7

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ABΓ έχουμε  $\alpha = 10$ ,  $\beta = 14$  και  $\gamma = 6$ .

Να υπολογίσετε :

α. Τη γωνία B.

Μονάδες 9

γ. Την προβολή της διαμέσου  $\mu_\gamma$  του τριγώνου στην πλευρά  $\gamma$ .

Μονάδες 7

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Έστω κύκλος  $(O, R)$ , με  $R = 4$  και AB μια διάμετρος του. Φέρουμε την εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο B και σε αυτήν παίρνουμε σημείο P τέτοιο ώστε  $BP = 6$ . Αν η PA τέμνει

α.  $OP = 2\sqrt{13}$

Μονάδες 9

β.  $AP = 10$

Μονάδες 9

γ.  $PE = 3,6$

Μονάδες 7

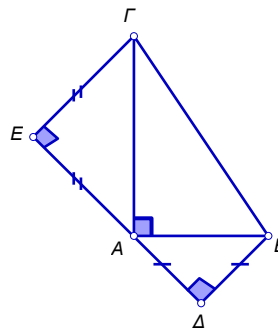
**ΘΕΜΑΤΑ**

**Θέμα 1<sup>ο</sup>**

- A. Να αποδείξετε ότι αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές Μονάδες 10
- B. Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας R. Αν P σημείο του επιπέδου του, τι ονομάζεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O, R); Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
  - α. Αν για τις πλευρές ενός τριγώνου ισχύει η σχέση  $a^2 > \beta^2 + \gamma^2$  τότε αυτό είναι αμβλυγώνιο
  - β. Το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές α και β, δίνεται από τη σχέση  $E = \alpha \cdot \beta$
  - γ. Το απόστημα  $a_6$  ενός κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας R είναι:
 
$$a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{3}$$
  - δ. Αν α, β, γ οι πλευρές ενός τριγώνου και  $\hat{A}$  η γωνία που είναι απέναντι από την πλευρά α, τότε ισχύει η σχέση:  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma \cdot \text{συν } \hat{A}$
  - ε. Το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα  $\mu^\circ$  και ακτίνας R δίνεται από τη σχέση:  $(\widehat{OAB}) = \frac{\pi R^2 \mu}{360}$  Μονάδες 10

**Θέμα 2<sup>ο</sup>**

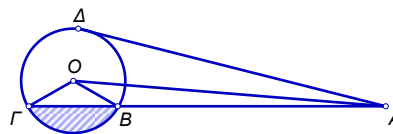
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\beta + \gamma = 20$  και εξωτερικά αυτού τα ορθογώνια και ισοσκελή τρίγωνα ABΔ και AΓΕ.



- A. Να αποδείξετε ότι τα σημεία E, A, Δ ανήκουν στην ίδια ευθεία. Μονάδες 3
- B. Να αποδείξετε ότι:  $A\Delta = \Delta B = \frac{\gamma\sqrt{2}}{2}$  Μονάδες 12
- Γ. Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΓΒΔΕ. Μονάδες 10

**Θέμα 3<sup>ο</sup>**

Στο παρακάτω σχήμα ισχύει ότι  $AB = 3B\Gamma$  και  $A\Delta = 6R$ , όπου R η ακτίνα του κύκλου και AΔ εφαπτόμενο τμήμα.



- A. Να δείξετε ότι:  $B\Gamma = R\sqrt{3}$  Μονάδες 7
- B. Να δείξετε ότι:  $(OAB) = 3 \cdot (OB\Gamma)$  Μονάδες 9
- Γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος Μονάδες 9

**Θέμα 4<sup>ο</sup>**

Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει  $\alpha = 2\gamma$  και  $\mu_\alpha = \gamma\sqrt{3}$ .

- A. Να δείξετε ότι  $\beta = \gamma\sqrt{7}$  Μονάδες 10
- B. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του. Μονάδες 10
- Γ. Αν ΒΔ ύψος του τριγώνου από την κορυφή Β, να δείξετε ότι  $A\Delta = \frac{2\gamma\sqrt{7}}{7}$  Μονάδες 5

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

Α. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι είναι  $AD^2 = \Delta B \cdot \Delta \Gamma$  Μονάδες 15

Β. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις

α. Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $a^2 > \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A} > 90^\circ$ .

β. Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $a^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A$

γ. Αν  $\alpha, \beta, \gamma$  είναι οι πλευρές τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $R$  η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου το εμβαδόν του είναι  $E = \frac{4R}{\alpha\beta\gamma}$ .

δ. Η πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας  $R$  είναι  $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ .

ε. Το μήκος τόξου  $\mu^\circ$  σε κύκλο ακτίνας  $R$  είναι:  $l = \frac{\pi R^2 \mu^\circ}{360^\circ}$  Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\beta = 6$ ,  $\gamma = 8$  και  $\mu_a = 5$ . Να βρεθούν:

α. Το μήκος της πλευράς  $\alpha$  Μονάδες 10

β. Το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας Μονάδες 5

γ. Το μήκος της προβολής της διαμέσου  $\mu_a$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το σημείο  $M$  μέσο της  $AB$ . Αν  $M\Delta \perp B\Gamma$  να αποδείξετε ότι:  $\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = A\Gamma^2$ . Μονάδες 25

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Θεωρούμε κύκλο  $(O, R)$  με  $R = 2$  και σημείο  $P$  έξω απ' αυτόν με  $\Delta_{(O, R)}^P = 12$ . Φέρνουμε από το  $P$  το εφαπτόμενο τμήμα  $PA$  και την  $PO$  που τέμνει τον κύκλο στο  $B$ . Να βρεθούν:

α. Το μήκος του  $PO$  Μονάδες 10

β. Το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $ABP$ . Μονάδες 15

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι, αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μία γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Μονάδες 10

**B.** Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:

**α.**  $\beta^2 = 3\alpha^2 + \gamma^2$

**β.**  $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

**γ.**  $\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma^2$

Μονάδες 9

**Γ.** Να εκφράσετε συναρτήσει της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου την πλευρά και το απόστημα των παρακάτω εγγεγραμμένων σχημάτων:

**α.** του τετραγώνου

**β.** του ισόπλευρου τριγώνου

**γ.** του κανονικού εξαγώνου

Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε  $\beta = 7$ ,  $\gamma = 6$  και  $\mu_\alpha = \frac{7}{2}$ . Να υπολογιστούν:

**α.** η πλευρά  $\alpha$  του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 15

**β.** το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 10

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο, R), φέρνουμε τις τέμνουσες ΑΒΓ, ΑΔΕ και την εφαπτομένη ΑΖ έτσι ώστε:  $AB = 2$ ,  $B\Gamma = 30$  και  $A\Delta = 4$ . Να βρεθούν:

**α.** το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ

Μονάδες 8

**β.** το ευθύγραμμο τμήμα ΑΖ

Μονάδες 8

**γ.** Αν  $OA = 17$  να αποδείξετε ότι η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου.

Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε διαδοχικές χορδές  $AB = R$ ,  $B\Gamma = R\sqrt{2}$  και  $\Gamma\Delta = R\sqrt{3}$ .

**α.** Να υπολογιστεί το μήκος του κυρτογώνιου τόξου ΑΔ

Μονάδες 7

**β.** Αν Κ εσωτερικό σημείο του κυρτογώνιου τόξου ΑΔ, να βρεθεί το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΚΔΑ

Μονάδες 9

**γ.** Να αποδείξετε ότι ο λόγος του εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ προς το εμβαδόν του

κύκλου (Ο, R) ισούται με:  $\frac{2 + \sqrt{3}}{2\pi}$

Μονάδες 9



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Σε κύκλο ακτίνας  $R$  να εγγράψετε τετράγωνο και να υπολογίσετε την πλευρά του και το απόστημά του συναρτήσει της ακτίνας  $R$ . Μονάδες 15

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ(σωστό) ή Λ(λάθος). Αν  $E$  το εμβαδόν τριγώνου  $AB\Gamma$  τότε:

**α.**  $E = 2\tau\rho$

**β.**  $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{R}$

**γ.**  $E = \sqrt{(r-\alpha)(r-\beta)(r-\gamma)}$

**δ.**  $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \beta \eta \mu \Gamma$

**ε.**  $E = \frac{1}{2} \alpha \cdot \nu_{\alpha}$  Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε το ύψος  $AD$ . Αν  $AB = 3$  και  $A\Gamma = 4$  να υπολογιστούν τα μήκη των τμημάτων  $B\Gamma$ ,  $BD$ ,  $D\Gamma$  και  $AD$ . Μονάδες 25

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 8$ . Να βρείτε:

**A.** το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  Μονάδες 5

**B.** το ύψος του  $\nu_{\alpha}$  Μονάδες 10

**Γ.** την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 5

**Δ.** την ακτίνα  $R$  του περιγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 5

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  με  $R = 2\text{cm}$  και χορδή του  $AB = 2\text{cm}$ . Να υπολογίσετε:

**A.** το μήκος του κύκλου

**B.** το μήκος του μικρότερου τόξου  $AB$

**Γ.** το εμβαδόν του κύκλου

**Δ.** το εμβαδόν του κυκλικού τομέα  $OAB$

**E.** το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στη γωνία  $AOB$  Μονάδες 25

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου, που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς. Μονάδες 13
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας (Σ) αν η πρόταση είναι σωστή και (Λ) αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Η πλευρά τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι  $\lambda_4 = 2R$ .
- β.** Το απόστημα εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (O,R) είναι  $a_6 = R \cdot 3$ .
- γ.**  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$  αν και μόνο αν  $A > 90^\circ$ .
- δ.**  $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha}{2}$  ( $\mu_\alpha$  η διάμεσος τριγώνου ABΓ, που αντιστοιχεί στην πλευρά  $\alpha$ ).
- ε.** Σε τρίγωνο ABΓ με μήκη πλευρών  $\alpha, \beta, \gamma$  ισχύει:  $E = \tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)$ , όπου  $\tau$  είναι η ημιπερίμετρος του τριγώνου.
- στ.** Η γωνία  $\varphi_n$  κανονικού  $n$ -γώνου είναι  $\varphi_n = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\omega_n}$  ( $\omega_n$  η κεντρική γωνία κανονικού εγγεγραμμένου σε κύκλο  $n$ -γώνου). Μονάδες  $6 \times 2$

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε κύκλο (O,R) είναι εγγεγραμμένο ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ με πλευρά  $AB = 9$ . Να υπολογίσετε :

- α.** Την ακτίνα R του κύκλου. Μονάδες 10
- β.** Το εμβαδόν που βρίσκεται μεταξύ κύκλου και ισοπλεύρου τριγώνου. Μονάδες 15

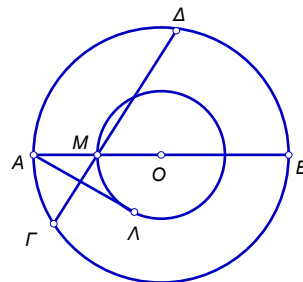
Θέμα 3<sup>ο</sup>

Το άθροισμα των διαγωνίων ενός ρόμβου ABΓΔ είναι 16 και η περίμετρός του είναι 20. Να βρεθούν

- α.** το εμβαδόν του. Μονάδες 13
- β.** το ύψος του ρόμβου από την κορυφή A. Μονάδες 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O, διάμετρο του μεγαλύτερου  $AB = 16$ , M το μέσο της AO και ΓΔ η χορδή που διέρχεται από το M με  $MG = 5$ .



- α.** Να υπολογίσετε το  $MD$ .

Μονάδες 12

- β.** Να υπολογίσετε το  $AL$  ( $AL$  το εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου (O, OM)).

Μονάδες 13

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A<sub>1</sub>.** Σε κάθε τρίγωνο ABΓ με διάμεσο AM να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών του ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς,

$$\text{δηλαδή: } AB^2 + AG^2 = 2AM^2 + \frac{BG^2}{2} \quad \text{Μονάδες 10}$$

**A<sub>2</sub>.** Σε τρίγωνο ABΓ με  $AB < AG$  να συμπληρώσετε τη σχέση  $AG^2 - AB^2 = \dots\dots$  ώστε να εκφράζει το δεύτερο θεώρημα των διαμέσων. Μονάδες 3

**B.** Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση για καθένα από τα ερωτήματα B<sub>1</sub> και B<sub>2</sub>

**B<sub>1</sub>.** Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται  $\beta = 8$ ,  $\gamma = 6$  και  $\mu_a = 5$ . Η πλευρά  $a$  είναι ίση με:

**A:** 7      **B:** 4      **Γ:** 10      **Δ:** 9      **E:** 11      Μονάδες 6

**B<sub>2</sub>.** Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται:  $a = 6$ ,  $\beta = 5$ ,  $\gamma = 4$ , AΔ το ύψος και AM η διάμεσος.

Η προβολή ΔM της διαμέσου AM πάνω στην πλευρά  $a$  είναι ίση με:

**A:** 4      **B:** 8      **Γ:**  $\frac{3}{4}$       **Δ:** 5      **E:** 3      Μονάδες 6

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Σε ένα τρίγωνο ABΓ είναι  $a = 6$ ,  $\beta = 5$ ,  $\gamma = 4$

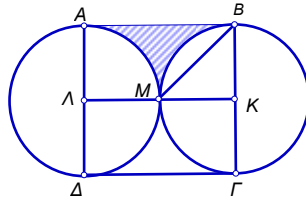
**α.** Να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του Μονάδες 12

**β.** Να βρεθεί η προβολή της πλευράς  $\gamma$  πάνω στην πλευρά  $\beta$  Μονάδες 13

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς 4cm.

Με διαμέτρους AΔ και BΓ γράφουμε τους κύκλους που εφάπτονται στο σημείο M όπως φαίνεται στο σχήμα:



**α.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου MKB, όπου K το μέσο της BΓ

**β.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου ABKΛ

**γ.** Να υπολογίσετε το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου AMB Μονάδες 7 + 6 + 12

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Σε κύκλο (O,R) παίρνουμε διαδοχικά τα τόξα  $\widehat{AB} = 60^\circ$   $\widehat{B\Gamma} = 90^\circ$   $\widehat{\Gamma\Delta} = 120^\circ$

**α.** Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο

**β.** Να υπολογιστούν ως συνάρτηση του R οι πλευρές του τραπέζιου ABΓΔ

**γ.** Δείξτε ότι το ύψος του τραπέζιου είναι ίσο με  $\frac{R(\sqrt{3}+1)}{2}$

**δ.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του

Μονάδες 3 + 7 + 6 + 9

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

**A.** Να αποδείξετε ότι: « Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτεινούς επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτεινούσα ».

Μονάδες 15

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές (Σ) ή ως λάθος (Λ)

**α.** Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισοδυναμία: «  $a^2 < b^2 + \gamma^2$  αν και μόνο αν  $\hat{A} > 90^\circ$  ».

**β.** Δύο σχήματα είναι ισοδύναμα αν έχουν την ίδια περίμετρο.

**γ.** Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του αθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

**δ.** Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O, R) αν και μόνο αν  $\Delta_{(O,R)}^P < 0$ .

**ε.** Αν δύο τρίγωνα έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

Μονάδες 10

Θέμα 2<sup>ο</sup>

Από σημείο Σ εξωτερικό του κύκλου (O, R) φέρνουμε εφαπτόμενο τμήμα ΣΓ = 6 και τέμνουσα του ΣΑΒ με ΣΑ = 4.

**A.** Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ.

Μονάδες 10

**B.** Αν η γωνία Σ είναι ίση με  $30^\circ$  να βρείτε:

**α.** το εμβαδόν του τριγώνου ΑΣΓ.

Μονάδες 8

**β.** το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Μονάδες 7

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Δίνονται δυο ομόκεντροι κύκλοι (O, R) και (O, 2R). Από τυχαίο σημείο Α του εξωτερικού κύκλου Α φέρνουμε τις εφαπτόμενες ΑΒ και ΑΓ στον εσωτερικό κύκλο.

**α.** Να δείξετε ότι  $AB = R\sqrt{3}$

Μονάδες 7

**β.** Να δείξετε ότι η γωνία ΒΑΓ είναι  $60^\circ$

Μονάδες 7

**γ.** Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε το τόξο ΒΓ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του μικτογράμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσο με το μισό του εμβαδού του εσωτερικού κύκλου.

Μονάδες 11

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ προεκτεινόμενη τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου στο Δ. Αν ισχύει  $AB \cdot AG = 3BD \cdot \Delta\Gamma$  δείξτε ότι:

**α.**  $(AB\Gamma) = 3(B\Delta\Gamma)$

Μονάδες 7

**β.**  $AM = 3M\Delta$

Μονάδες 8

**γ.**  $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

A. Δίνεται κύκλος (O, R)

α. Στον κύκλο (O, R) να εγγράψετε κανονικό εξάγωνο Μονάδες 3

β. Να αποδείξετε ότι  $\lambda_6 = R$ , όπου  $\lambda_6$  η πλευρά του κανονικού εξαγώνου Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι  $\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ , όπου  $\alpha_6$  το απόστημα του εξαγώνου Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

α. Το εμβαδόν τριγώνου ABΓ ισούται με  $E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \gamma}{4\rho}$  όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου. Μονάδες 8

β. Σε τρίγωνο ABΓ όπου  $\hat{A} < 90^\circ$  τότε  $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$

γ. Η δύναμη εξωτερικού σημείου ως προς κύκλο είναι αρνητικός αριθμός.

δ. Αν το μέτρο ενός τόξου σε ακτίνα είναι α, ενώ σε μοίρες είναι μ° τότε  $180 \cdot \alpha = \pi \cdot \mu^\circ$

Γ. Να γράψετε το νόμο των συνημιτόνων σε τρίγωνο ABΓ και ως προς τις τρεις πλευρές του Μονάδες 3

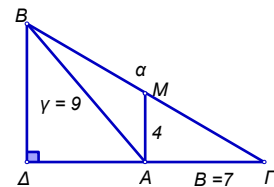
Θέμα 2°

Σε τρίγωνο ABΓ έχουμε  $\beta = 7$ ,  $\gamma = 9$  και η διάμεσος  $AM = 4$

α. Να δείξετε ότι  $\alpha = 14$

β. Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του

γ. Να υπολογίσετε την προβολή της γ πάνω στη Β



Μονάδες 8 + 8 + 9

Θέμα 3°

Δίνεται κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά σημεία

του A, B, Γ ώστε  $AB = R$ ,  $BΓ = R\sqrt{3}$

A. Να δείξετε ότι:  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $\hat{B} = 90^\circ$ ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$

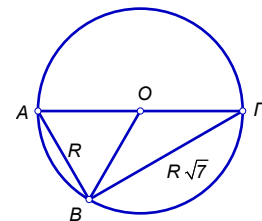
Μονάδες 5

B. Να βρεθούν:

α. τα μήκη των τόξων  $\widehat{AB}$ ,  $\widehat{BΓ}$  συναρτήσει της ακτίνας R

β. το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ συναρτήσει της ακτίνας

γ. το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας του σχήματος, συναρτήσει της ακτίνας R Μονάδες 6 + 6 + 8



Θέμα 4°

Δίνεται κύκλος (O, R) και τόξο  $\widehat{AB} = 90^\circ$ .

Αν Κ μέσο της ΟΑ και Λ το σημείο τομής της προέκτασης της ΒΚ με τον κύκλο:

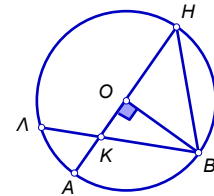
Να δείξετε ότι:

α.  $AB = R\sqrt{2}$  Μονάδες 7

β.  $\frac{(AK\Lambda)}{(BKM)} = \frac{1}{5}$  Μονάδες 5

γ.  $BK = \frac{R\sqrt{5}}{2}$  Μονάδες 7

δ.  $K\Lambda = \frac{3R\sqrt{5}}{10}$  Μονάδες 6



## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

A. Να αποδείξετε ότι:

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μιας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή

Μονάδες 13

B. Αν ΑΔ είναι ύψος ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), να εξετάσετε αν είναι Σωστή ή

Λανθασμένη καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις:

α.  $AD^2 = DB \cdot DG$

β.  $GD^2 = BG \cdot AD$

γ.  $AG^2 = BG \cdot GD$

δ.  $BG^2 = AB^2 - AG^2$

Μονάδες 12

Θέμα 2<sup>ο</sup>

A. Να αντιστοιχίσετε το κάθε γεωμετρικό σχήμα της 1<sup>ης</sup> στήλης με τον τύπο του εμβαδού του στη 2<sup>η</sup> στήλη:

1 <sup>η</sup> ΣΤΗΛΗ	2 <sup>η</sup> ΣΤΗΛΗ
1. τετράγωνο πλευράς $a$	α. $\pi\rho^2$
2. ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς $a$	β. $\frac{\pi\rho^2}{2}$
3. κύκλος ακτίνας $\rho$	γ. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
	δ. $2a^2$
	ε. $a^2$

Μονάδες 9

B. Οι κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) έχουν μήκος 3cm και 4cm.

Να βρείτε:

α. την υποτείνουσα

Μονάδες 6

β. την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

Μονάδες 5

γ. την ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

Μονάδες 5

Θέμα 3<sup>ο</sup>

Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι  $\gamma = 6$ ,  $\beta = 10$  και  $a = 14$ . Να βρείτε:

α. το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες

Μονάδες 5

β. τη διάμεσο  $\mu_a$

Μονάδες 7

γ. την προβολή της πλευράς ΑΓ πάνω στην ΑΒ

Μονάδες 7

δ. τη γωνία ΒΑΓ

Μονάδες 6

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΒ και ΒΓ, όπου Β σημείο της διαμέτρου ΑΓ. Η κάθετος της ΑΓ στο Β τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ.

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΒΔ

Μονάδες 15

β. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων είναι ίσο με την περίμετρο κύκλου διαμέτρου ΑΓ

Μονάδες 10

## ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1<sup>ο</sup>

- A.** Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτεινούςας. Μονάδες 15
- B.** Να απαντήσετε στις παρακάτω σχέσεις με «Σωστό» ή «Λάθος». Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $A\Delta \perp B\Gamma$  ισχύουν:

**α.**  $AB^2 = A\Delta \cdot B\Gamma$

**β.**  $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

**γ.**  $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$

Σε κάθε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν:

**α.**  $a^2 = b^2 + \gamma^2 - 2b\gamma \cdot \text{συν}A$

**β.** αν  $\hat{A} > 90^\circ$  τότε  $a^2 < b^2 + \gamma^2$  Μονάδες 10

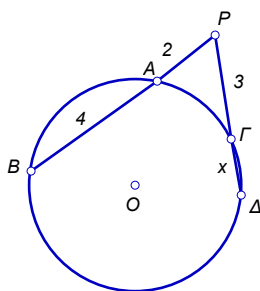
Θέμα 2<sup>ο</sup>

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $AB = 6$  και  $A\Gamma = 8$ . Να βρείτε:

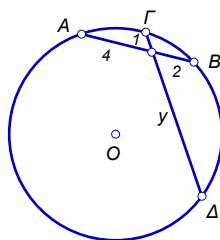
- α.** Το εμβαδόν Μονάδες 10
- β.** Το ύψος  $h_a$  Μονάδες 10
- γ.** Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου Μονάδες 5

Θέμα 3<sup>ο</sup>

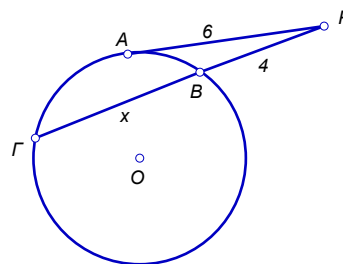
Να προσδιοριστούν οι τιμές των  $x$  και  $y$  στα παρακάτω σχήματα:



Μονάδες 8



Μονάδες 8



Μονάδες 9

Θέμα 4<sup>ο</sup>

Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με εμβαδόν  $20\text{m}^2$ . Αν  $M$  σημείο στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο ώστε  $AB = 2BM$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $MB\Gamma$ .

Μονάδες 25