

ΓΕΛ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β΄



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α.

α. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο των μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

Μονάδες 5

β. Εάν ορίζονται οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ αντιστοίχως να δείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Μονάδες 10

Β. Να χαρακτηρίσετε με Σ(Σωστό) ή Λ(Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Κάθε σημείο της παραβολής ισαπέχει από την διευθετούσα και την κορυφή της

β. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + Bx + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ γ. Εάν $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}|$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ δ. Εάν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Rightarrow x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ ε. Η εκκεντρότητα της έλλειψης: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$ είναι $e = \frac{3}{5}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^οΔίνονται τα σημεία $A(1, -1)$, $B(4, 2)$, $\Gamma(0, 6)$. Να βρεθούν:Α. η εξίσωση της διαμέσου AM του $\triangle AB\Gamma$

Μονάδες 8

Β. η εξίσωση της μεσοκάθετης της $A\Gamma$

Μονάδες 9

Γ. το εμβαδόν του $\triangle AB\Gamma$

Μονάδες 8

Θέμα 3^οΔίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$ και το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και διάμεσο $\vec{AM} = 3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.Α. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

Β. Να εκφραστεί το $\vec{A\Gamma}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Μονάδες 6

Γ. Να υπολογιστεί το $|\vec{AM}|$

Μονάδες 7

Δ. Να δειχθεί ότι $(\widehat{AM}, \vec{\alpha}) = \frac{\pi}{6}$

Μονάδες 7

Θέμα 4^οΔίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + 4\lambda^2 = 0$ (1)Α. Να δείξετε ότι παριστάνει κύκλο $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$ του οποίου να βρείτε κέντρο και ακτίνα

Μονάδες 5

Β. Να δείξετε ότι κάθε κύκλος που παριστάνει η (1) εφάπτεται του $y'y$

Μονάδες 5

Γ. Να δείξετε ότι τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή από την οποία εξαιρείται η κορυφή της

Μονάδες 7

Δ. Να δείξετε ότι από το σημείο $O(0, 0)$ άγονται προς κάθε κύκλο που προκύπτει από την (1) δύο εφαπτόμενες

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$

Να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{\gamma}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ (επιμεριστική ιδιότητα) Μονάδες 15

B. Δίνονται ο πραγματικός αριθμός λ με $\lambda \neq 0$ και \vec{a} ένα μη μηδενικό διάνυσμα.

Δώστε τον ορισμό του γινομένου του λ με το \vec{a} δηλαδή $\lambda \cdot \vec{a}$ Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{AB} έχουμε:

$$\vec{AB} = \vec{OA} - \vec{OB}.$$

β. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ και αντίστροφα.

γ. Αν $A \neq B$, τότε η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.

δ. Ο κύκλος $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 5$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

ε. Τα διανύσματα $\vec{a} = (-1, 1)$ και $\vec{b} = (3, -3)$ είναι παράλληλα. Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία A(4,2) και B(2,4). Να βρεθούν:

A. Οι συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος AB Μονάδες 5

B. Η εξίσωση της κάθετης στην ευθεία AB που διέρχεται από το Μ Μονάδες 8

Γ. Σημείο Κ του άξονα $x'x$ που ισαπέχει από τα Α και Β Μονάδες 6

Δ. Το εμβαδόν του τριγώνου KAB Μονάδες 6

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (1, 1)$, $\vec{b} = (0, 2)$ και $\vec{\gamma} = (-1, 1)$

A. Να δείξετε ότι η γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} είναι 45° Μονάδες 8

B. Να βρείτε την προβολή του διανύσματος \vec{b} πάνω στο διάνυσμα \vec{a} Μονάδες 9

Γ. Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ ως γραμμικό συνδυασμό των \vec{a} και \vec{b} Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$ και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ (1)

A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 10

B. Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής του ερωτήματος (α) και εφάπτονται του κύκλου του ερωτήματος (α) Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Δίνεται ο κύκλος $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ και ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του στο A είναι: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ Μονάδες 9
- B.**
- α.** Δίνεται μια ευθεία δ και ένα σημείο E εκτός αυτής. Δώστε τον ορισμό της παραβολής με εστία το E και διευθετούσα δ
- β.** Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων Μονάδες 6
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ):
- α.** όλες οι ευθείες που περνούν από το σημείο $A(2, 3)$ έχουν εξίσωση της μορφής:
 $y - 3 = \lambda(x - 2), \lambda \in \mathbb{R}$
- β.** αν $\alpha / \beta + \gamma$ τότε κατ' ανάγκη α / β και α / γ
- γ.** η εφαπτομένη της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 1$ στο σημείο της $A\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ σχηματίζει με τον άξονα xx' γωνία 135°
- δ.** αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- ε.** η παραβολή $y^2 = px$ έχει εστία $E\left(\frac{p}{4}, 0\right)$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (4, -3)$ και $\vec{b} = (1, -2)$

- α.** να αποδειχτεί ότι \vec{a}, \vec{b} μη συγγραμμικά Μονάδες 5
- β.** να βρεθεί η προβολή \vec{a} Μονάδες 10
- γ.** αν $\vec{\gamma} = (17, -19)$ να βρεθούν τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\gamma} = \kappa\vec{a} + \lambda\vec{b}$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα \vec{a}, \vec{b} που σχηματίζουν γωνία $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{\pi}{3}$

και η εξίσωση $x^2 + y^2 - 2|\vec{a}| \cdot x - |\vec{b}| \cdot y + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

A. Να αποδειχτεί ότι:

- α.** $\vec{b} \neq 2\vec{a}$ Μονάδες 5
- β.** η εξίσωση παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο K και η ακτίνα ρ Μονάδες 5
- B.** Αν $K(1,1)$ το κέντρο του κύκλου να αποδειχτεί ότι:
- α.** $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, \rho = 1$ Μονάδες 5
- β.** ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $\varepsilon: 3x + 4y - 12 = 0$ Μονάδες 5
- γ.** η προβολή του \vec{b} στο \vec{a} είναι το \vec{a} Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - y^2 - 4\mu x + 2\mu y + 3\mu^2 = 0, \mu \in \mathbb{R}$

- A.** να αποδειχτεί ότι παριστάνει δύο ευθείες κάθετες Μονάδες 8
- B.** αν A το σημείο τομής των ευθειών να δείξετε ότι το A κινείται στην ευθεία $\varepsilon: x - 2y = 0$ Μονάδες 7
- Γ.** να βρεθεί το σημείο της ευθείας (ε) που απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.
Μονάδες 5
- B.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $(c): x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): x_1x + y_1y = \rho^2$.
Μονάδες 10
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως.
Μονάδες 2
- β.** Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 + 1 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$ παριστάνει κύκλο.
Μονάδες 2
- γ.** Η εξίσωση $(\alpha^2 + 1)x + (\alpha - 1)y + 5 = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνει πάντοτε ευθεία.
Μονάδες 2
- δ.** Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $yy_1 = p(x + x_1)$.
Μονάδες 2
- ε.** Αν $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$ σταθεροί με $A \cdot B \neq 0$ και $\vec{\delta}_1 = (A, B), \vec{\delta}_2 = (x, y)$ τότε η γενική εξίσωση της ευθείας μπορεί να πάρει την μορφή $\vec{\delta}_1 \cdot \vec{\delta}_2 + \Gamma = 0$.
Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

- Δίνεται η παραβολή $(c): y^2 = 8x$. Να βρείτε:
- α.** Την εστία E και τη διευθετούσα (δ) της παραβολής. Στη συνέχεια να διαπιστώσετε ότι η εστία της παραβολής ταυτίζεται με το κέντρο του κύκλου: $(c_1): x^2 + y^2 - 4x - 3 = 0$.
Μονάδες 15
- β.** Την εξίσωση της εφαπτομένης (η) της παραβολής στο σημείο της $M(2, 4)$.
Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

- A.** Δίνονται τα σημεία $A(1, 2), B(3, 0), \Gamma(-1, 0)$. Να βρείτε:
- α.** Την τέταρτη κορυφή Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
Μονάδες 7
- β.** Το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία $(\varepsilon): x - y - 2 = 0$.
Μονάδες 8
- B.** Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): x - \lambda y + 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): (\lambda^2 - 2\lambda)x - y + 2 = 0$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες οι ευθείες είναι κάθετες.
Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 = \lambda(2x + 2y - \lambda) + 5$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
- α.** Για κάθε τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (c_λ) του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
Μονάδες 9
- β.** Τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων (c_λ) βρίσκονται σε ευθεία γραμμή της οποίας να βρείτε την εξίσωση.
Μονάδες 6
- α.** Για $\lambda = 0$ να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του αντίστοιχου κύκλου (c_0) , που είναι παράλληλη προς την ευθεία $(\delta): y = 2x + 3$.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων

Μονάδες 5

B. Έστω δύο διανύσματα $\vec{a}(x_1, y_1)$ και $\vec{b}(x_2, y_2)$ τα οποία δεν είναι παράλληλα προς τον $y'y$ άξονα και λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσής τους αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Ισχύει ότι: $\vec{w} \cdot \vec{v} = \vec{w} \cdot \text{προβ}_{\vec{w}} \vec{v}$

β. Αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ και $\vec{a} \neq \vec{0}$, τότε είναι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$

γ. Αν οι ευθείες ϵ_1, ϵ_2 έχουν θετικούς συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) και

$$\text{είναι μεταξύ τους παράλληλες τότε } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 0$$

δ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$, $|A| + |B| \neq 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα

$$\vec{\delta}(B, -A)$$

ε. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και μήκος μεγάλου άξονα

$$2a > 2\gamma \text{ είναι } \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \beta^2 = a^2 - \gamma^2$$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$

α. Να υπολογιστεί το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

β. Να βρείτε τα μέτρα των $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{w} = \vec{\alpha} - \vec{\beta}$

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων (\vec{u}, \vec{w})

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ (1)

α. Να δείξετε ότι η (1) παριστάνει κύκλο του οποίου να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

Μονάδες 12

β. Να δείξετε ότι το σημείο $M(1, -3)$ είναι εσωτερικό του κύκλου και να βρεθεί η εξίσωση της χορδής του η οποία να έχει μέσο το σημείο $M(1, -3)$

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Κύκλος εφάπτεται της ευθείας $\epsilon: 4x + 3y + 2 = 0$ στο σημείο $M(-2, 2)$. Το κέντρο του βρίσκεται στην εφαπτομένη της έλλειψης $\epsilon: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο σημείο $N(3, 0)$. Να βρεθούν:

α. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το M και είναι κάθετη στην ϵ

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο N .

γ. Το κέντρο του κύκλου.

δ. Η ακτίνα του κύκλου

ε. Η εξίσωση του κύκλου

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ με $x_1 \cdot x_2 \neq 0$, αν λ_1, λ_2 οι συντελεστές διεύθυνσής τους αντίστοιχα, να αποδείξετε την ισοδυναμία:
 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ Μονάδες 8
- B. Δίνεται η ευθεία (δ) και το σημείο E του επιπέδου εκτός αυτής. Τι ονομάζουμε παραβολή με διευθετούσα την ευθεία (δ) και εστία το σημείο E; Μονάδες 5
- Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις ώστε να είναι αληθείς:
- α. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στον $y'y$ έχει εξίσωση
- β. Αν \vec{a}, \vec{b} δύο μη μηδενικά διανύσματα, τότε $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \dots\dots\dots$
- γ. Δίνεται η έλλειψη C με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, 0 < \beta < \alpha$ και το σημείο της $A(x_1, y_1)$, η εξίσωση εφαπτομένης της C στο A είναι.....
- δ. Δίνεται η ευθεία (ϵ) με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, το διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$ είναι.....στην (ϵ) Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(2,3) B(-1,2) \Gamma(1,-2)$. Να βρείτε:

- α. τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $3\vec{AB} - 2\vec{B\Gamma}$ Μονάδες 10
- β. την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο Γ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα \vec{AB} Μονάδες 8
- γ. την προβολή του \vec{AB} στο $\vec{A\Gamma}$ Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) με εξισώσεις $x + y - 8 = 0, x + y + 5 = 0$ αντίστοιχα και τα

σημεία $A(0, 1) B(\mu, \nu) \Gamma\left(\frac{\mu+2}{2}, \frac{\nu-1}{2}\right)$

- α. Να αποδείξετε ότι $\epsilon_1 // \epsilon_2$ και να βρείτε την απόσταση των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 Μονάδες 11
- β. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης Μονάδες 7
- γ. Αν $B(\mu, \nu)$ είναι σημείο της (ϵ_2) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του $AB\Gamma$ είναι σταθερό Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται η γραμμή C με εξίσωση: $x^2 + y^2 - 4\lambda x + 2(\lambda + 1)y =$

- α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ παριστάνει κύκλο Μονάδες 7
- β. Για $\lambda = 1$, να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου που διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$ Μονάδες 10
- γ. Να βρεθεί το κέντρο του κύκλου με τη μικρότερη ακτίνα Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να γράψετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.
- B. Αν τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον άξονα $y'y$ και έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα, να αποδείξετε την ισοδυναμία: $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$.
- Γ. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές, ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες :
- α. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$
- β. Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ είναι κάθετο στην ευθεία $\varepsilon : 3x - 4y + 1 = 0$.
- γ. Η ευθεία $\varepsilon : y = 3x - 2$ διέρχεται από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB, όπου $A(-2, 5)$ και $B(2, -7)$.
- δ. Η εστία της παραβολής $y^2 = 4x$ και το κέντρο του κύκλου $(x-1)^2 + y^2 = 4$ συμπίπτουν.
- ε. Ο κύκλος $C : (x+2)^2 + (y-5)^2 = 25$ εφάπτεται στον άξονα $x'x$.

Θέμα 2^ο

Μονάδες 5 + 10 + 10

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, \vec{u} . Αν $\vec{u} = 3\vec{a} + 2\vec{\beta}$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$, τότε

να αποδείξετε ότι:

- α. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 3$ Μονάδες 8
- β. $|\vec{u}| = 6\sqrt{3}$ Μονάδες 8
- γ. $(\widehat{\vec{a}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{6}$ Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα σημεία $A(3\mu - 2, 1 - 2\mu)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(3, 3)$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- A. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε τα σημεία A, B, Γ να είναι κορυφές τριγώνου Μονάδες 5
- B. Αν $\mu = 1$ τότε να βρείτε:
- α. Την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 7
- β. Τις συντεταγμένες του σημείου Δ. Μονάδες 7
- γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 8\lambda^2 x - 8\lambda y + 16\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 5$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

να αποδείξετε ότι:

- α. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7
- β. Οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση (1) είναι ίσοι μεταξύ τους. Μονάδες 4
- γ. Τα κέντρα όλων των παραπάνω κύκλων ανήκουν σε παραβολή, της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα. Μονάδες 8
- δ. Δύο μόνο από τους παραπάνω κύκλους διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος \overline{AB} με άκρα τα σημεία

$$A(x_1, y_1) \text{ και } B(x_2, y_2) \text{ δίνονται από τις σχέσεις } x = x_2 - x_1 \text{ και } y = y_2 - y_1.$$

Μονάδες 10

B. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$.

Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ ($A \neq 0$ ή $B \neq 0$) είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$.

β. Αν $\det(\vec{a}, \vec{\beta})$ είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$, τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\vec{a} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{a}, \vec{\beta}) = 0.$$

γ. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα \vec{a} και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

δ. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$.

ε. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα

$$2a \text{ είναι } \frac{x^2}{\beta^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1, \text{ όπου } \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}.$$

Μονάδες $5 \times 2 = 10$ Θέμα 2^ο

Ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, η πλευρά AB ανήκει στην ευθεία $2x + 3y + 6 = 0$ και η πλευρά $A\Delta$ στην ευθεία $3x - y - 13 = 0$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma, B\Delta$ του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(2, -3)$.

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(1, -2)$.

Μονάδες 7

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει η πλευρά $B\Gamma$.

Μονάδες 6

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Gamma$ όπου O η αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

Θέμα 3^ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

α. Την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

Μονάδες 5

β. Τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Μονάδες 10

γ. Την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $y = x - 1$.

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

A. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$, όπου μ, λ πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των μ, λ η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων O .

Μονάδες 6

B. Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς μ, λ ισχύει η σχέση $3\mu + 2\lambda = 0$.

α. Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$

για τις διάφορες τιμές των μ, λ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε τα μ, λ έτσι, ώστε, αν A, B είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία $x + y + 2 = 0$, να ισχύει $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που

$$\text{σχηματίζουν γωνία } \theta \text{ να αποδείξετε ότι: } \cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

B. Να απαντήσετε αν είναι σωστές (Σ) ή λάθος (Λ) οι προτάσεις:

- α. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως.
 β. $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, 2)$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 6$.
 γ. $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| \geq |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$, $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ οποιαδήποτε διανύσματα
 δ. $\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ (όπου \vec{a}, \vec{v} διανύσματα και $\vec{a} \neq \vec{0}$)

Θέμα 2^ο

Δίδονται τα σημεία A(1, 3) και B(4, 2)

- α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB
 β. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AOB (O η αρχή των αξόνων)
 γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB

Θέμα 3^ο

Δίδονται τα σημεία A, B, Γ, Δ με συντεταγμένες A(-2, 1) B(1, 3) Γ(3, 0) Δ(0, -2)

Να αποδείξετε ότι:

- α. $\vec{AB} = \vec{\Delta\Gamma}$
 β. $\vec{A\Gamma} \perp \vec{B\Delta}$
 γ. ABΓΔ τετράγωνο

Θέμα 4^ο

Δίδεται η παραβολή (c): $y^2 = 4x$ και η ευθεία (ε): $2x - 3y + 4 = 0$. Να βρείτε:

- α. τις συντεταγμένες της εστίας E της παραβολής και την εξίσωση της διευθετούσας αυτής
 β. τα κοινά σημεία της παραβολής και της ευθείας ότι είναι τα A(1, 2) και B(4, 4)
 γ. την εξίσωση του κύκλου με κέντρο την αρχή O(0, 0) των αξόνων που περνάει από το A
 δ. την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο B.

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α.

α. Δώστε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων. Μονάδες 4

β. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ γράψτε τον τύπο που μας δίνει το εσωτερικό τους γινόμενο. Μονάδες 2

γ. Αποδείξτε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο του ενός επί την προβολή του άλλου διανύσματος πάνω σε αυτό. Μονάδες 6

Β.

α. Τι ονομάζουμε γωνία που σχηματίζει ένα μη μηδενικό διάνυσμα με τον άξονα $x'x$; Τι τιμές παίρνει; Μονάδες 4

β. Γράψτε τον τύπο που μας δίνει το μέτρο ενός διανύσματος, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του Μονάδες 2

γ. Αν λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των διανυσμάτων \vec{a}, \vec{b} αντίστοιχα, αποδείξτε την ισοδυναμία $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$ Μονάδες 7

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $E'(-\sqrt{3}, 0)$, $E(\sqrt{3}, 0)$ και C ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M του επιπέδου για τα οποία ισχύει $(ME') + (ME) = 4$.

Α. Να δείξετε ότι η εξίσωση της γραμμής C είναι $x^2 + 4y^2 = 4$ Μονάδες 5

Β. Να βρείτε την εφαπτομένη (ϵ) της γραμμής C στο σημείο της $\Gamma\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ Μονάδες 7

Γ. Να δείξετε ότι το άθροισμα των αποστάσεων των E και E' από την ευθεία (ϵ) είναι $2\sqrt{3}$. Μονάδες 8

Δ. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $E\Gamma E'$ Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (y-1, 1)$ και $\vec{b} = (y+1, 1-4x)$.

Α. Αν τα διανύσματα είναι κάθετα, να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(x, y)$ είναι η παραβολή $C_1: y^2 = 4x$, της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα. Μονάδες 6

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της παραβολής στο σημείο της $A(1, 2)$. Μονάδες 4

Γ. Αν $|\vec{5a} - \vec{b}| = 3\sqrt{2}$, δείξτε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $N(x, y)$ είναι ο κύκλος

$$C_2: (x+1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}, \text{ του οποίου να βρείτε το κέντρο, την ακτίνα και την}$$

εφαπτομένη ευθεία που άγεται από το σημείο $A(-1, 0)$ Μονάδες 10

Δ. Να δείξετε ότι η ευθεία (ϵ) είναι κοινή εφαπτομένη των C_1 και C_2 . Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Οι συντεταγμένες δύο κινητών A και B , για κάθε χρονική στιγμή $t \geq 0$, είναι $(t+1, 3t+2)$ και $(2t-1, 4t+1)$ αντίστοιχα.

α. Ποια είναι η αρχική θέση κάθε κινητού; Μονάδες 3

β. Να βρείτε τη θέση του A , όταν η τετμημένη του B είναι 2009. Μονάδες 4

γ. Ποια είναι η απόσταση των κινητών τη χρονική στιγμή $t = 3$. Μονάδες 4

δ. Να βρείτε τις εξισώσεις των τροχιών των δύο κινητών και να γίνει η γραφική τους παράσταση στο καρτεσιανό επίπεδο. Μονάδες 8

ε. Να εξετάσετε αν οι τροχιές των δύο κινητών τέμνονται. Αποδείξτε ότι τα δύο κινητά δε θα συναντηθούν ποτέ. Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αποδείξτε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = \rho^2$ Μονάδες 15
- B.** Χαρακτηρίστε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστό (Σ) ή λάθος (Λ):
- α.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι $\frac{x_1 x}{\alpha^2} - \frac{y_1 y}{\beta^2} = 1$
- β.** Η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 2px$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι: $yy_1 = p(x + x_1)$
- γ.** Οι ευθείες με εξισώσεις $y = \frac{1}{|\lambda|}x + 5$ και $y = -\lambda x$ είναι κάθετες για κάθε $\lambda \neq 0$
- δ.** Η απόσταση $d(M_0, \epsilon)$ του σημείου $M_0(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\epsilon: Ax + By + \Gamma = 0$ επαληθεύει την ισότητα $|Ax_0 + By_0 + \Gamma| = d(M_0, \epsilon) \cdot \sqrt{A^2 + B^2}$
- ε.** Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0,1)$, $B(-1,0)$ και $\Gamma(3,-8)$ είναι 9 Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ ισχύει $|\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = |\vec{\alpha} - \vec{\gamma}|$

- α.** Δείξτε την ισότητα $2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}) - 2(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) = |\vec{\gamma}|^2 - |\vec{\beta}|^2$ Μονάδες 10
- β.** Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = \vec{\beta} - \vec{\gamma}$ είναι κάθετα Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Να βρείτε:

- α.** την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής Μονάδες 5
- β.** τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$ Μονάδες 10
- γ.** την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $\epsilon: y = x - 1$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = -2x + 3$ και $\epsilon_2: x - 2y + 1 = 0$

- α.** Μπορεί οι διαγώνιες τετραγώνου να βρίσκονται πάνω στις ϵ_1, ϵ_2 με κέντρο το σημείο τομής των ϵ_1, ϵ_2 ; Μονάδες 8
- β.** Αν οι διαγώνιες του τετραγώνου έχουν μήκος $\delta = 2\sqrt{5}$ ποιες οι συντεταγμένες των κορυφών του τετραγώνου; Μονάδες 13
- γ.** Να βρεθεί η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο τετράγωνο Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, να δείξετε ότι:

$$\text{αν } \alpha / \beta \text{ και } \beta / \alpha \text{ τότε } \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -\beta \quad \text{Μονάδες } 10$$

B. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε με Σ(σωστό) ή Λ(λάθος) τις προτάσεις που ακολουθούν:

α. Αν $\alpha / \beta \cdot \gamma$ τότε α / β ή α / γ

β. Αν $\vec{\alpha}^2 = \vec{\beta}^2$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ ή $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$

γ. Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με A(2, -3), B(1, 1) και Γ(-3, -2), να βρεθούν:

A. Η εξίσωση της ευθείας ΒΓ Μονάδες 8

B. Η εξίσωση του ύψους ΑΔ Μονάδες 8

Γ. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ Μονάδες 9

Θέμα 3^ο

Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\widehat{\vec{\alpha}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$. Αν $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$ να βρεθούν:

A. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ Μονάδες 5

B. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ Μονάδες 10

Γ. Το $\sin(\widehat{\vec{\gamma}, \vec{\alpha}})$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Έστω η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 2\lambda y + 4\lambda - 2 = 0$

A. Να βρεθεί $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η C να παριστάνει κύκλο και στη συνέχεια να βρείτε το κέντρο

και την ακτίνα αυτού. Μονάδες 9

B. Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι διέρχονται από το ίδιο σημείο Α Μονάδες 8

Γ. Να δείξετε ότι όλοι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στην ευθεία $y = -x + 2$ στο Α.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να δοθούν οι ορισμοί:

- α. Συντεταγμένες σημείου
- β. Ορίζουσα δύο διανυσμάτων
- γ. Συντελεστής διεύθυνσης διανύσματος
- δ. Εκκεντρότητα της έλλειψης

Μονάδες 12

B. Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που

$$\text{σχηματίζουν γωνία } \theta, \text{ να αποδείξετε ότι: } \text{συν}\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 13

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$ και $(\widehat{\alpha, \beta}) = \frac{\pi}{4}$

- α. Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ Μονάδες 10
- β. Να δείξετε ότι $|2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = \sqrt{8}$ Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

A. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $x\text{συν}\varphi + y\text{ημ}\varphi - 4\eta\mu\varphi + 2\text{συν}\varphi - 4 = 0$ εφάπτεται του κύκλου (1) $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 4 = 0$ Μονάδες 15

A. Σε ποια σημεία ο προηγούμενος κύκλος (1) τέμνει τους άξονες xx' και yy' Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι ευθείες $\lambda x + (\lambda - 1)y = 2\lambda$ και $(\lambda + 1)x + \lambda y = 2\lambda + 1$.

- α. Να αποδείξετε ότι τέμνονται για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 5
- β. Να βρεθούν το σημείο τομής M για τις διάφορες τιμές του λ Μονάδες 10
- γ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τομής M Μονάδες 5
- δ. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση της αρχής των αξόνων $O(0, 0)$ από τα σημεία M Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB . Να δείξετε ότι:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \text{ και } y = \frac{y_1 + y_2}{2} \quad \text{Μονάδες } 10$$

B. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, γράψτε τις συντεταγμένες του διανύσματος \overrightarrow{AB}

Μονάδες 5

G. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν $\vec{a} // \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$ και αντιστρόφως

β. Αν $\vec{a} = (x, y)$, τότε $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

γ. Αν $\vec{a} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως

δ. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

ε. Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta}(B, -A)$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

α. Αν $3|(a + 1)$ και $3|(13 - \beta)$, να αποδείξετε ότι $3|(a + \beta)$ Μονάδες 10

β. Αν για τον ακέραιο a ισχύει ότι ο αριθμός $\frac{a-3}{4}$ είναι ακέραιος, να αποδείξετε ότι

και ο αριθμός $\frac{a^2-1}{8}$ είναι ακέραιος. Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του Μονάδες 15

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο $A(-3, 1)$

Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα σημεία $A(2, -4)$ και $B(4, -6)$

α. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB στο σημείο M

Μονάδες 10

γ. Έστω τυχαίο σημείο $\Gamma(2, -6)$ πάνω στην ευθεία (ε) . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστές ή Λανθασμένες:

Μονάδες 10

α. Αν \vec{a} και \vec{b} δύο μη μηδενικά διανύσματα τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$, όπου φ η γωνία των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} .

β. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ και αντιστρόφως.

γ. Η ευθεία ε με εξίσωση $y = -3x + 5$ σχηματίζει οξεία γωνία με τον άξονα $x'x$.

δ. Η ευθεία ε με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{n} = (A, B)$

ε. Η μαθηματική ή τέλεια επαγωγή είναι αποδεικτική μέθοδος που χρησιμοποιείται για να αποδειχτεί ότι μια μαθηματική πρόταση που εξαρτάται από ένα θετικό πραγματικό μεταβλητό αριθμό n ισχύει για κάθε τιμή του n .

Γ. Να αντιστοιχίσετε-συσχετίσετε τα στοιχεία των δύο πινάκων A και B: Μονάδες 10

A Εξίσωση	1) $9x^2 - y^2 = 36$	2) $9x^2 - y^2 = 0$	3) $25x^2 + 16y^2 = 400$	4) $x^2 - 2x + y^2 = 3$	5) $x^2 - 4y = 0$
B Κωνική τομή	α) Έλλειψη	β) Υπερβολή	γ) Ζεύγος Ευθειών	δ) Παραβολή	ε) Κύκλος

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα του επιπέδου \vec{a} , \vec{b} , $\vec{\delta}$ για τα οποία ισχύουν: $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$,

$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 120^\circ$ και $\vec{\delta} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Να υπολογίσετε:

α. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} . Μονάδες 5

β. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\delta}$. Μονάδες 7

γ. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\delta}$. Μονάδες 8

δ. Τη γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{\delta}})$ των διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\delta}$. Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ. Οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι (2, 3). Οι εξισώσεις του ύψους ΑΔ και της διαμέσου ΑΜ είναι αντίστοιχα: $3x - 5y + 6 = 0$ και $x - 11y + 2 = 0$. Να βρείτε

α. Οτι οι συντεταγμένες της κορυφής Α είναι $x_A = -2$, $y_A = 0$.

β. Τον συντελεστή διεύθυνσης της πλευράς ΒΓ.

γ. Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

δ. Οτι οι συντεταγμένες του Μ είναι $x_M = \frac{7}{2}$, $y_M = \frac{1}{2}$.

ε. Το εμβαδόν των τριγώνων ΑΓΜ και ΑΒΓ.

Θέμα 4^ο

A. Να βρείτε την εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = 10$ στο σημείο του Α(1, 3).

B. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 10 + \lambda(x + 3y - 10) = 0$ (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$

α. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση (1) να παριστάνει κύκλο.

β. Για $\lambda = -2$ να βρείτε τι παριστάνει η εξίσωση (1).

γ. Να βρείτε το γεωμ. τόπο των κέντρων των κύκλων που έχουν εξίσωση την (1) για τις διάφορες τιμές του λ .

δ. Να αποδείξετε ότι όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την (1):

δ₁. Διέρχονται από το σταθερό σημείο Α(1, 3).

δ₂. Εφάπτονται της ευθείας $\varepsilon: x + 3y = 10$ στο Α(1, 3). Μονάδες 3+4+3+5+5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ του επιπέδου.

- α. Να γράψετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ως συνάρτηση των συντεταγμένων τους. Μονάδες 5
- β. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα yy' και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. Μονάδες 15
- γ. Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ να αποδείξετε ότι: $\text{συν}\theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(5, 1)$. Να βρείτε :

- α. Την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 8
- β. Την εξίσωση του ύψους AD του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 9
- γ. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση: $(2x + y - 5) + \lambda(x + 2y - 4) = 0, \lambda \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

- α. Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία γραμμή για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10
- β. Όλες οι ευθείες που ορίζονται από την παραπάνω εξίσωση διέρχονται από σταθερό σημείο, το οποίο και να βρείτε. Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται η παραβολή $x^2 = 4y$.

- α. Να βρεθεί η παράμετρος, η εστία και η διευθετούσα της παραβολής. Μονάδες 8
- β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της παραβολής που διέρχονται από το σημείο $A(0, -1)$. Μονάδες 17

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α.

α. Έστω \vec{a} , \vec{v} δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{a} \neq \vec{0}$

Να αποδείξετε ότι $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ Μονάδες 10

β. Έστω E' και E δύο σημεία ενός επιπέδου. Τι ονομάζουμε έλλειψη με εστίες τα σημεία E' και E Μονάδες 7

Β. Να συμπληρωθούν τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις:

α. Οι ελλείψεις που έχουν λέγονται όμοιες

β. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ είναι

γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = \dots\dots\dots$

δ. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots\dots\dots$ Μονάδες 8

Θέμα 2^οΈστω το τρίγωνο $AB\Gamma$ ώστε $\vec{AB} = (4, 2)$ και $\vec{A\Gamma} = (2, 6)$

Α. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές Μονάδες 10

Β. Να βρεθούν:

α. Το μήκος της διαμέσου AD του τριγώνου $AB\Gamma$ β. Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας του ύψους του τριγώνου που άγεται από την κορυφή A Μονάδες 15

Θέμα 3^οΈστω ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 2\lambda x = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ο οποίος διέρχεται από το σημείο $A(2, 4)$

α. Να αποδείξετε ότι η ακτίνα ρ του κύκλου C_1 είναι ίση με 5 Μονάδες 8

β. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου C_1 στο σημείο A Μονάδες 8

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου C_1 στο σημείο A εφάπτεται και στον κύκλο $C_2: x^2 + y^2 - x - 12y + 30 = 0$ Μονάδες 9

Θέμα 4^οΔίνεται η παραβολή $y^2 = 2px$, $p > 0$. Μια ευθεία ε εφάπτεται της παραβολής στο σημείο της

$A(\frac{p}{2}, p)$ και του κύκλου $x^2 + y^2 = 2$.

α. Να αποδείξετε ότι $p = 4$ Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι οι κοινές εφαπτόμενες της παραβολής και του κύκλου είναι $\varepsilon: y = x + 2$ και $\varepsilon': y = -x - 2$ Μονάδες 9

γ. Αν η ε τέμνει τον $y'y$ στο B και τον $x'x$ στο Γ , να αποδείξετε ότι $\vec{EA} + \vec{E\Gamma} = 2\vec{EB}$ όπου E η εστία της παραβολής Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδειχτεί ότι κάθε κύκλος έχει εξίσωση της μορφής:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 \text{ με } A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 \text{ (1) και αντιστρόφως κάθε εξίσωση της}$$

μορφής (1) παριστάνει κύκλο. Μονάδες 10

B. Τι ονομάζουμε προβολή του διανύσματος \vec{v} στο διάνυσμα \vec{a} με $\vec{a} \neq 0$ Μονάδες 5

Γ. Να γράψετε στην κόλλα σας τον αριθμό της ερώτησης και δίπλα το γράμμα Σ αν η ερώτηση είναι σωστή ή το γράμμα Λ αν η ερώτηση είναι λανθασμένη:

α. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι δύο σημεία του επιπέδου, τότε οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος \overrightarrow{AB} είναι $x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2$

β. Δύο διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $\vec{a}, \vec{\beta}$ μη παράλληλα στον yy' είναι κάθετα αν και μόνο αν $\lambda_a \cdot \lambda_\beta = -1$ όπου λ_a, λ_β οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}, \vec{\beta}$ αντίστοιχα.

γ. Η παραβολή $C: y^2 = 2px$, έχει εστία το σημείο $E(p, 0)$.

δ. Το κέντρο του κύκλου με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ με $(A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0)$ είναι

$$\text{το σημείο } K\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right)$$

ε. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (A, B)$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Έστω τα μοναδιαία διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $(\vec{a}, \vec{\beta}) = \frac{2\pi}{3}$. Να υπολογίσετε:

A. Τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{a} + 4\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{a} - \vec{\beta}$ Μονάδες 13

B. Τη γωνία των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Έστω η εξίσωση $x^2 - y^2 + 6\lambda x + 2\lambda y + 8\lambda^2 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$.

α. Δείξτε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που είναι κάθετες μεταξύ τους. Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σαν συνάρτηση του λ Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία κινείται το σημείο M Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 2px$.

Αν το σημείο $A(1, \lambda)$ με $\lambda > 0$, είναι κοινό σημείο των C_1 και C_2 τότε:

A. Να βρείτε τα λ, p Μονάδες 8

B. Να βρείτε το δεύτερο κοινό σημείο των C_1 και C_2 . Μονάδες 7

Γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής C_2 στο A εφάπτεται στον κύκλο C_1 Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$.

Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Αν $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$, τότε $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$

β. Ο κύκλος με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα ρ έχει εξίσωση $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$.

γ. Το διάνυσμα $(B, -A)$ είναι παράλληλο στην ευθεία

$Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$.

δ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma, 0)$, $E(\gamma, 0)$ και σταθερό άθροισμα

$2a$ είναι $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ όπου $b = \sqrt{\gamma^2 - a^2}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, 1)$ και $\vec{\beta} = (2, 2\sqrt{3})$.

A. Να υπολογίσετε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 7

B. Να βρεθεί η γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Μονάδες 18

Θέμα 3^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ και $\Gamma(3, 4)$.

A. Εάν M το μέσο του AB , να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου ΓM .

Μονάδες 12

B. Αν Δ είναι το σημείο τομής της ευθείας ΓM με τον άξονα $y'y$, να αποδείξετε ότι για τα εμβαδά των τριγώνων $\Delta B\Gamma$ και $AB\Gamma$ ισχύει $(\Delta B\Gamma) = 3 \cdot (AB\Gamma)$

Μονάδες 13

Θέμα 4^ο

Δίνεται ο κύκλος με εξίσωση $(C_1) : x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$ και το σημείο του $A(1, 2)$.

A. Να βρεθεί η εξίσωση (C_2) της παραβολής με κορυφή $O(0,0)$, άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και η οποία διέρχεται από το σημείο A .

B. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης (ϵ_1) της παραβολής στο σημείο της $B(1, -2)$.

Γ. Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης (ϵ_2) του κύκλου στο σημείο A .

Δ. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ϵ_1 , ϵ_2 τέμνονται κάθετα πάνω στον άξονα $x'x$

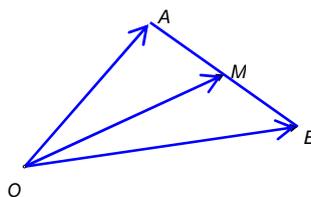
E. Να βρεθεί η οξεία γωνία (AB, ϵ_2) των ευθειών AB και ϵ_2

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Αν M το μέσον του AB, γράψτε με τι ισούται το διάνυσμα \vec{OM} με την βοήθεια των \vec{OA} και \vec{OB} και αποδείξτε το. (Διανυσματική ακτίνα μέσου τμήματος).



Μονάδες 15

B.

- α. Ποια είναι η εξίσωση ευθείας με συντελεστή διεύθυνσης λ που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$;
 β. Ποια είναι η εξίσωση ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$;
 γ. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας που διχοτομεί την γωνία xOy , συστήματος αξόνων (1° τεταρτημόριο).
 δ. Ποια είναι η εξίσωση κύκλου κέντρου $O(0, 0)$ και ακτίνας ρ ;
 ε. Ποια είναι η εξίσωση παραβολής με εστία το σημείο $E(\frac{\rho}{2}, 0)$ και διευθετούσα δ την ευθε-

$$\text{ία } x = -\frac{\rho}{2}.$$

Μονάδες 5×2 Θέμα 2^ο

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύουν $|\vec{\alpha}| = 4$ και $|\vec{\beta}| = 5$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$.

Έστω, ακόμα τα διανύσματα $\vec{\kappa} = 4\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{\lambda} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$. Μονάδες 5
 β. Τα μέτρα $|\vec{\kappa}|$ και $|\vec{\lambda}|$ των διανυσμάτων $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$ Μονάδες 10
 γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\kappa} \cdot \vec{\lambda}$ Μονάδες 5
 δ. Το συνημίτιο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\kappa}$ και $\vec{\lambda}$ Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

- α. Δείξτε ότι η εξίσωση $x^2 - 4x + y^2 - 2y + 1 = 0$ παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα. Μονάδες 10

- β. Η ευθεία $y = \frac{1}{2}x$ πόσα κοινά σημεία έχει, αν έχει, με τον παραπάνω κύκλο.

- γ. Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Μονάδες $5 + 10$ Θέμα 4^ο

Μια κατασκευή βρίσκεται στο σημείο $\Gamma(5, 2)$. Δυο κατασκευηστές A και B διανύουν αντίστοιχα πορείες ώστε η θέση τους την χρονική στιγμή t (με $t \geq 0$) είναι $A(t - 1, t)$ και $B(t + 1, t + 8)$.

- α. Για την χρονική στιγμή $t = 1$ να βρεθούν οι θέσεις A και B που βρίσκονται οι κατασκευηστές και το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. Μονάδες 10

- β. Να αποδείξετε ότι οι κατασκευηστές A και B διανύουν ευθείες πορείες που δίνονται από τις σχέσεις $\varepsilon_A: y = x + 1$ και $\varepsilon_B: y = x - 9$.

- γ. Να βρεθεί η απόσταση των ευθειών ε_A και ε_B .

Μονάδες $8 + 7$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A. Αν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ σημεία του επιπέδου να δείξετε ότι οι συντεταγμένες (x, y) του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB είναι $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ Μονάδες 15
- B. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:
- α. Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$
- β. Η ευθεία με εξίσωση $3x + 4y + 5 = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\eta} = (3, -4)$
- γ. Η γραφική παράσταση της παραβολής $y^2 = 2px$ βρίσκεται στο ημιέπιπεδο που ορίζει ο άξονας $y'y$ και η εστία της E .
- δ. Αν η εκκεντρότητα e της έλλειψης τείνει στο μηδέν τότε η έλλειψη τείνει να εκφυλισθεί σε ευθύγραμμο τμήμα
- ε. $\vec{a} \cdot \vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ Μονάδες 5×2

Θέμα 2°

Δίνονται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $\Gamma(8, 1)$

- α. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM Μονάδες 10
- β. Να υπολογίσετε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $A\Gamma$ Μονάδες 6
- γ. Την εξίσωση του ύψους $B\Delta$ Μονάδες 9

Θέμα 3°

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (2, -4)$ και $\vec{b} = (-8, 5)$

- A. Να αναλύσετε το \vec{b} σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη προς το \vec{a} . Μονάδες 10
- B. Δίνονται τα σημεία $A(3,3)$, $B(-2,0)$ και $\Gamma(3\lambda-1, \lambda+3)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α. Για $\lambda = -1$ βρείτε το Εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία A, B, Γ . Μονάδες 8
- β. Αποδείξτε ότι το Γ βρίσκεται πάνω σε μία ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 7

Θέμα 4°

Δίνεται η εξίσωση $x^2 + y^2 - 4\lambda x - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ (ε)

- α. Να δείξετε ότι η (ε) παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του
- β. Να δείξετε ότι ο κύκλος διέρχεται από δύο σταθερά σημεία.
- γ. Να βρεθεί το λ ώστε η ευθεία $y = x - 2$ να εφάπτεται στον παραπάνω κύκλο.
- δ. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που έχει ως εστίες τα σημεία $(0, -2)$ και $(0, 2)$ και μεγάλο άξονα μήκους 10 Μονάδες $6 + 6 + 7 + 6$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αν $A(x_1, y_1)$ είναι σημείο του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$, να δείξετε ότι η εφαπτόμενη ε του κύκλου στο σημείο A έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.
- B.** Να απαντήσετε αν είναι **σωστές** ή **λάθος** οι παρακάτω προτάσεις:
- α.** Αν $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| = 0$.
- β.** Ισχύει $\vec{a}\vec{v} = \vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{v}} \vec{a}$ με $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- γ.** Όλες οι ευθείες του επιπέδου που περνούν από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχουν εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ όπου λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.
- δ.** Αν M_1M_2 διάμετρος της έλλειψης $\beta^2x^2 - \alpha^2y^2 = \alpha^2\beta^2$ με $\alpha > \beta > 0$ τότε θα ισχύει $2\beta \leq (M_1M_2) \leq 2\alpha$.
- ε.** Το παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$ είναι το
- $$\vec{\delta} = (A, -B).$$

Μονάδες 15 + 10

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-7, 10)$.

- α.** Να βρείτε τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος \overrightarrow{AB} .
- β.** Αν M το μέσον του AB , να βρείτε το μέτρο $|\overrightarrow{OM}|$.
- α.** Αν $\Gamma(x, 2)$ να βρείτε την τιμή του x ώστε $\widehat{\Gamma AB} = 90^\circ$. Μονάδες 7 + 9 + 9

Θέμα 3^ο

Δίνονται η έλλειψη $x^2 + 2y^2 = 2$ και η παραβολή $y^2 = 4\sqrt{6}x$.

- α.** Να βρεθούν το σταθερό άθροισμα $2a$, η εστιακή απόσταση και η εκκεντρότητα της έλλειψης.
- β.** Αν η ευθεία $y = x$ τέμνει την έλλειψη σε σημείο A του 1^{ου} τεταρτημορίου, να δείξετε ότι η εφαπτόμενη της έλλειψης στο A διέρχεται από την εστία της παραβολής.

Μονάδες 12 + 13

Θέμα 4^ο

Ευθεία ε διερχόμενη από το σημείο $A(2, 1)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B σχηματίζοντας μ' αυτόν γωνία 135° . Να βρείτε:

- α.** Τις συντεταγμένες του σημείου B .
- β.** Την απόσταση του O από την ευθεία ε .
- γ.** Το σημείο M της ευθείας ε που απέχει από το O την ελάχιστη απόσταση.
- δ.** Το εμβαδόν του τριγώνου OMB .

Μονάδες 7 + 5 + 8 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

α. Οι συντεταγμένες της εστίας της παραβολής με εξίσωση $x^2 = 2py$ είναι $E\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

β. Κάθε εξίσωση της μορφής: $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία για κάθε $A, B, \Gamma \in \mathbb{R}$

γ. Η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου: $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ είναι η $x_1x + y_1y = \rho$

δ. Ισχύει η $\vec{a} \downarrow \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

ε. Η ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$ και το διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$ είναι παράλληλα

Μονάδες 10

B. Να δοθεί ο ορισμός του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων Μονάδες 5

Γ. Έστω τα σημεία $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ του καρτεσιανού επιπέδου. Να αποδείξετε ότι οι

συντεταγμένες του μέσου M του τμήματος AB είναι: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ και $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,2), B(3,-1), \Gamma(-3,-4)$

α. Να βρεθεί το $\Lambda_{A\Gamma}$ Μονάδες 7

β. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους BD Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας της μεσοκαθέτου στην πλευρά $B\Gamma$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Αν $\vec{a} = 2\vec{\beta} - 6\vec{\gamma}$ με $|\vec{a}| = 6, |\vec{\beta}| = 3$ και $|\vec{\gamma}| = 1$

α. Να αποδείξετε ότι $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma} = \frac{3}{2}$ Μονάδες 7

β. Να βρεθεί η γωνία $(\vec{\beta}, \vec{\gamma})$ Μονάδες 8

γ. Να βρεθεί η προβολή του $\vec{\gamma}$ πάνω στο $\vec{\beta}$ Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι κύκλοι $c_1: x^2 + y^2 = 1$ και $c_2: x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι οι κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά Μονάδες 6

β. Να βρεθεί η εξίσωση της παραβολής η οποία έχει άξονα συμμετρίας τον $x'x$ και εστία το κέντρο του κύκλου c_2 καθώς και η διευθετούσα της Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $A(1,2)$ διέρχεται από το σημείο επαφής των δύο κύκλων Μονάδες 6

δ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές την εστία της παραβολής, το σημείο επαφής των δύο κύκλων και το σημείο A Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy και θ η γωνία τους. Να γράψετε τους τύπους που δίνουν το εσωτερικό γινόμενο των \vec{a} , $\vec{\beta}$ και το συνθ συναρτήσεως των συντεταγμένων τους. Μονάδες 8

Β. Αν τα \vec{a} , $\vec{\beta}$ δεν είναι παράλληλα στον $y'y$, να δείξετε ότι $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

Μονάδες 9

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις:

α. Ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας AB με $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 \neq x_2$

είναι $\lambda = \frac{\dots}{\dots}$

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $c: x^2 + y^2 = \varphi^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση.....

γ. Η εφαπτομένη της παραβολής $c: y^2 = 2px$ στο σημείο της $M(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

δ. Η έλλειψη $c: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου $b = \sqrt{a^2 - \gamma^2}$, έχει τις εστίες στον άξονα.....

Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(-1, 0)$, $B(3, 2)$ και $\Gamma(-3, 4)$. Να βρείτε:

Α. Την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς AB Μονάδες 15

Β. Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $|\vec{a}| = \sqrt{2}$, $|\vec{\beta}| = 2\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}) = \frac{\pi}{3}$ και το διάνυσμα

$\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{\beta}$. Να βρείτε:

Α. τα εσωτερικά γινόμενα: $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ και $\vec{a} \cdot \text{προβ}_{\vec{a}} \vec{v}$ Μονάδες 10

Β. τη γωνία $(\widehat{\vec{a}, \vec{v}})$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + y^2 - 2\lambda x + 2\lambda y + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$ (1), όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

Α. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ παριστάνει κύκλο C_λ Μονάδες 8

Β. Να δείξετε ότι τα κέντρα των κύκλων C_λ κινούνται σε σταθερή ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση Μονάδες 7

Γ. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η ευθεία $\epsilon: x - y - 2 = 0$ εφάπτεται στον κύκλο C_λ

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που

σχηματίζουν γωνία θ , να αποδείξετε ότι: $\cos\theta = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ Μονάδες 9

B. Να γράψετε στην κόλλα σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = (2, 1)$ και $\vec{b} = (-1, -3)$

α. Η γωνία των \vec{a} και \vec{b} είναι:

$\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, κανένα από τα παραπάνω

β. Η γωνία των \vec{a} και $\vec{a} + \vec{b}$ είναι:

$\frac{\pi}{4}$, 0 , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, κανένα από τα παραπάνω Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ έχει εξίσωση $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$

β. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{d} = (B, A)$

γ. Οι διαιρέτες ενός ακέрайου εμφανίζονται πάντοτε κατά ζεύγη αντίθετων ακέрайων

δ. Αν τα διανύσματα \vec{a} και \vec{b} έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντίστοιχα τότε

ισχύει: $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$

ε. Αν $\vec{a} \perp \vec{b}$ τότε $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)x + \mu \cdot y + (\mu - 2) = 0$ (1), όπου $\mu \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι για κάθε τιμή της παραμέτρου μ η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία γραμμή

B. Να βρείτε την τιμή του μ για την οποία η ευθεία με εξίσωση την (1) είναι κάθετη στην ευθεία $y = 5$. Ποιο είναι τότε το κοινό τους σημείο; Μονάδες 8

Γ. Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες η αρχή των αξόνων απέχει από την ευθεία με εξίσωση την (1) απόσταση ίση με 1 Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται ο ακέрайος αριθμός $a = 18 \cdot \kappa + 15$, όπου $\kappa \in \mathbb{Z}$

A. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός a μπορεί να πάρει τη μορφή $a = 6\lambda + 3$, $\lambda \in \mathbb{Z}$.

Μονάδες 7

B. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $(a - 3) \cdot (a + 3)$ είναι πολλαπλάσιο του 72 Μονάδες 9

Γ. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $a - 23$ δια του 6 Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

A. Να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ του κύκλου που έχει εξίσωση:

$x^2 + y^2 - 2\lambda^2 x - 4\lambda y + \lambda^4 + 3\lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ Μονάδες 6

B. Να αποδείξετε ότι η γραμμή (ε) πάνω στην οποία βρίσκεται το κέντρο K όταν το λ μεταβάλλεται είναι παραβολή, της οποίας να βρείτε την εστία και τη διευθετούσα Μονάδες 8

Γ. Αν η εφαπτομένη της παραβολής (ε) στο σημείο της $A(3, 2\sqrt{3})$ τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο B τότε:

α. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου με διάμετρο το AB Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος με διάμετρο το AB εφάπτεται στον άξονα $x'x$ στην εστία της παραβολής Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, δύο διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$
Μονάδες 6
- B. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με $x_1 \cdot x_2 \neq 0$
Να δείχτεί ότι: $\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_{\vec{a}} \cdot \lambda_{\vec{\beta}} = -1$, όπου $\lambda_{\vec{a}}, \lambda_{\vec{\beta}}$ οι συντελεστές διεύθυνσης των
 $\vec{a}, \vec{\beta}$ αντιστοίχως
Μονάδες 11
- Γ. Στον κάθε έναν από τους παρακάτω ισχυρισμούς να αντιστοιχίσετε το γράμμα Σ αν είναι σωστός ή το γράμμα Λ αν είναι λάθος και να μεταφέρετε την απάντησή σας στην κόλλα σας:
- α. Για κάθε διάνυσμα \vec{a} ισχύει: $|\vec{a}| \cdot \vec{a} \nearrow \nearrow \vec{a}$
- β. Για κάθε διάνυσμα \vec{a} με $\vec{a} \neq \vec{0}$ ισχύει: $|\vec{a}| = 1 \Leftrightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|$
- γ. Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$, ισχύει: $\vec{a} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$ Μονάδες 6
- Δ. Να επιλέξετε το σωστό ισχυρισμό και να μεταφέρετε στην κόλλα σας τον αντίστοιχο αριθμό του. Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$ με $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$ ισχύει:
- α. $\vec{a} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$ β. $\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$ γ. $\vec{a} \perp \vec{\beta}$
- δ. Τα δεδομένα δεν επαρκούν για να επιλέξουμε έναν από τους προηγούμενους ισχυρισμούς
Μονάδες 2

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $A(-\sqrt{3}, 0)$ και $B(0, 1)$ στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy .

- A. Να βρείτε την εξίσωση του φορέα της διαμέσου OM του τριγώνου AOB Μονάδες 10
- B. Να βρείτε την εξίσωση του φορέα του ύψους OD του τριγώνου AOB Μονάδες 10
- Γ. Να βρείτε την εξίσωση του φορέα της διχοτόμου OE του τριγώνου AOB . Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Έστω α ακέραιος και β θετικός ακέραιος > 1

- A. Να δείξετε ότι αν $\beta / (3\alpha - 4)$ και $\beta / (4\alpha - 6)$, τότε $\beta = 2$ Μονάδες 13
- B. Να βρείτε όλες τις τιμές του ακέραιου α , για τις οποίες ισχύουν συγχρόνως οι συνθήκες $2 / (3\alpha - 4)$ και $2 / (4\alpha - 6)$ Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

- A. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $(x-1)^2 + y^2 = 2\lambda(x+y-1)$, παριστάνει κύκλο του οποίου να βρείτε το κέντρο K και την ακτίνα ρ . Μονάδες 8
- B. Για όλες τις τιμές του λ , που η εξίσωση:
C: $[x - (\lambda + 1)]^2 + (y - \lambda)^2 = 2\lambda^2$ παριστάνει κύκλο:
- α. Να δείξετε ότι οι αντίστοιχοι κύκλοι διέρχονται από σταθερό σημείο A Μονάδες 6
- β. Να δείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: x + y - 1 = 0$ εφάπτεται σε όλους αυτούς τους κύκλους στο σημείο τους A . Μονάδες 6
- γ. Να δείξετε ότι τα κέντρα όλων αυτών των κύκλων ανήκουν σε σταθερή ευθεία της οποίας να βρείτε την εξίσωση. Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία του καρτεσιανού επιπέδου και $M(x, y)$ το μέσον

του AB , να αποδείξετε ότι: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ και $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ Μονάδες 10

B. Αν δ μια ευθεία του επιπέδου και E σημείο εκτός αυτής, τι ονομάζουμε παραβολή με εστία το σημείο E και διευθετούσα ευθεία δ ; Μονάδες 5

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Οι συντεταγμένες του διανύσματος με άκρα $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$x = x_2 - x_1 \text{ και } y = y_2 - y_1$$

β. Δύο μη μηδενικά διανύσματα \vec{a} και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα αν και μόνο αν $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = |\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$

γ. Για κάθε διάνυσμα \vec{a} ισχύει $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

δ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (-B, A)$

ε. Η εφαπτομένη της παραβολής $x^2 = 2py$ σε σημείο της $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση:

$$x \cdot x_1 = p(y + y_1) \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα σημεία $B(4, 2)$ και $\Gamma(6, 2)$ ενός ορθοκανονικού συστήματος αξόνων και A το σημείο τομής της ευθείας $y = x$ με τη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται ο κύκλος $C_1: x^2 + y^2 - 4x + 1 = 0$ και η παραβολή $C_2: y^2 = 2px$. Αν το σημείο $A(1, \lambda)$ όπου $\lambda > 0$, είναι κοινό σημείο των C_1 και C_2 τότε:

A. Να δείξετε ότι $\lambda = \sqrt{2}$ και $p = 1$ Μονάδες 5

B. Να δείξετε ότι η παραβολή και ο κύκλος έχουν κοινή εφαπτομένη στο A . Μονάδες 10

Γ. Αν η κάθετος της εφαπτομένης στο A τέμνει τον άξονα $x'x$ στο K να δείξετε ότι το τρίγωνο $ΟΑΚ$ είναι ισοσκελές. Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ και η εξίσωση:

$$x^2 + y^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot x + |\vec{\beta}| \cdot y + \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0 \quad (1). \text{ Να δειχθεί ότι:}$$

A. $\vec{\beta} \neq 2\vec{a}$ Μονάδες 5

B. Η (1) είναι εξίσωση κύκλου με ακτίνα $\rho = \frac{1}{2} |2\vec{a} - \vec{\beta}|$ Μονάδες 10

Γ. Η ευθεία $\varepsilon: x + y = 0$ έχει πάντα δύο κοινά σημεία με τον κύκλο (1) Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

α. Τι ονομάζεται εσωτερικό γινόμενο, $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$, δύο μη μηδενικών διανυσμάτων \vec{a} και $\vec{\beta}$.

Να αποδείξετε ότι $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

Μονάδες 13

β. Αν τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ είναι μοναδιαία, να αντιστοιχίσετε τις σχέσεις της στήλης Α με τις ισοδύναμες τους στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -1$	1. $\vec{a} // \vec{\beta}$
β. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$	2. $\vec{a} \perp \vec{\beta}$
γ. $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1$	3. $\vec{a} \nearrow \nearrow \vec{\beta}$
δ. $ \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 1$	4. $\vec{a} \searrow \searrow \vec{\beta}$
	5. $\vec{a} \nearrow \swarrow \vec{\beta}$

Θέμα 2^ο

Μονάδες 12

Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσεως της ευθείας (ε) και τη γωνία ω που σχηματίζει αυτή με τον άξονα x'x όταν η (ε):

α. διέρχεται από τα σημεία A(1, $\sqrt{3}$), B(2, 0).

Μονάδες 9

β. είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (-2, 2)$.

Μονάδες 8

γ. είναι κάθετη στο διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (0, 3)$.

Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Να αποδείξετε ότι:

α. Ο κύκλος C: $x^2 + y^2 = 3$ και η ευθεία ε: $y = 2x - 5$ δεν έχουν κοινά σημεία.

Μονάδες 8

β. Η εξίσωση $x^2 + y^2 - 3 + \lambda(2x - y - 5) = 0$ παριστάνει κύκλο για κάθε $\lambda \in \mathbb{N}$ και να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του

Μονάδες 8

γ. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων αυτών;

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \lambda x - y = 2$ και $\varepsilon_2: x + \lambda y = 2$

α. Να δείξετε ότι κάθε εξίσωση παριστάνει ευθεία που διέρχεται από ένα σταθερό σημείο, τα οποία και να βρείτε.

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες τέμνονται κάθετα και το σημείο τομής τους

ανήκει στον κύκλο $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης του κύκλου που διέρχεται από το σημείο O(0, 0)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$ και $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ είναι δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου που

σχηματίζουν γωνία θ να αποδείξετε ότι: $\text{συν}\theta = \frac{\chi_1 \chi_2 + \psi_1 \psi_2}{\sqrt{\chi_1^2 + \psi_1^2} \sqrt{\chi_2^2 + \psi_2^2}}$

B. Αν $\vec{\alpha} = (\chi_1, \psi_1)$, $\vec{\beta} = (\chi_2, \psi_2)$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου και ρ πραγματικός αριθμός, τότε :

1. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \dots$
2. $\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \dots$
3. $\rho \vec{\alpha} = \dots$
4. $\vec{\alpha} = \vec{\beta} \Leftrightarrow \dots$
5. $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \dots$
6. $\vec{\alpha} \parallel \vec{\beta} \Leftrightarrow \dots$

Μονάδες 13 + 12

Θέμα 2^ο

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(0, 3), B(2, -2) και Γ(4, 2).

Να βρεθούν :

- α. Το μέσο M της πλευράς BΓ.
- β. Η εξίσωση της διαμέσου AM.
- γ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας AΓ.
- δ. Η εξίσωση του ύψους BE.

Μονάδες 6 + 6 + 6 + 7

Θέμα 3^ο

α. Δίνεται η εξίσωση του κύκλου $\chi^2 + \psi^2 - 2\chi + 4\psi - 20 = 0$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου K και η ακτίνα R.

β. Δίνεται η εξίσωση της παραβολής $\chi^2 = 8\psi$. Να βρεθούν η εστία και η διευθετούσα.

γ. Δίνεται η εξίσωση της έλλειψης $\frac{\chi^2}{9} + \frac{\psi^2}{4} = 1$. Να βρεθούν οι εστίες, οι κορυφές.

δ. Δίνεται η εξίσωση της υπερβολής $\frac{\chi^2}{64} - \frac{\psi^2}{36} = 1$. Να βρεθούν οι εστίες, οι κορυφές

και οι εξισώσεις των ασυμπτώτων.

Μονάδες 6 + 6 + 6 + 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται ο κύκλος $\chi^2 + \psi^2 = 25$ και το σημείο A(-7, 1)

- α. Να αποδειχθεί ότι το σημείο A είναι εξωτερικό του κύκλου.
- β. Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το A και εφάπτονται του κύκλου.
- γ. Να βρεθούν τα σημεία επαφής B και Γ των παραπάνω εφαπτομένων με τον κύκλο.
- δ. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής BΓ.
- ε. Να υπολογίσετε την απόσταση του A από τη χορδή BΓ.

Μονάδες 5 + 5 + 5 + 5 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ Μονάδες 9
- B.** Σε κάθε παραβολή της στήλης A να αντιστοιχίσετε εστία και διευθετούσα της, στήλης B

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
<p>1. $y^2 = 2px$</p> <p>2. $x^2 = 2py$</p>	<p>α. $E(-\frac{p}{2}, 0), x = \frac{p}{2}$</p> <p>β. $E(0, -\frac{p}{2}), y = \frac{p}{2}$</p> <p>γ. $E(\frac{p}{2}, 0), x = -\frac{p}{2}$</p> <p>δ. $E(0, \frac{p}{2}), y = -\frac{p}{2}$</p>

Γ. Μονάδες 6

- α.** Να γράψετε το συντελεστή διεύθυνσεως του διανύσματος \vec{AB} , όταν $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ και $x_1 \neq x_2$
- β.** Να γράψετε ένα διάνυσμα παράλληλο και ένα κάθετο προς την ευθεία $Ax + By + \Gamma = 0$, $A \neq 0$ ή $B \neq 0$
- γ.** Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, να γράψετε την αναλυτική έκφραση του $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
- δ.** Να συμπληρώσετε τα κενά: Οι ακέραιοι αριθμοί χωρίζονται στους άρτιους με μορφή και τους με μορφή.....
- ε.** Να συμπληρώσετε τα κενά: Αν α και β ακέραιοι με $\beta \neq 0$, τότε υπάρχουν..... ακέραιοι κ και υ τέτοιοι ώστε..... Μονάδες 10

Θέμα 2°

Δίνονται τα σημεία $A(3, -4)$ και $B(8, -6)$

- α.** Να υπολογιστούν τα διανύσματα: \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{AB}
- β.** Να βρεθούν το μέσο M του \vec{AB} , το $|\vec{AB}|$ και ο συντελεστής διεύθυνσεως του \vec{AB}
- γ.** Να υπολογιστούν τα συν $\widehat{(OA, OB)}$ και $(OAB \text{ Εμβαδόν})$ Μονάδες 6 + 9 + 10

Θέμα 3°

- α.** Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο κύκλοι με εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$, που διέρχονται από τα σημεία $O(0,0)$, $K(8,0)$ και έχουν ακτίνα $2\sqrt{5}$. Να υπολογίσετε τους A, B, Γ και να γράψετε τους κύκλους, με τη μορφή $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \rho^2$ Μονάδες 12
- β.** Αν $K(0, 6)$ και $\Lambda(3, 0)$, να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων M του επιπέδου με την ιδιότητα $\frac{|MK|}{|ML|} = 2$ ανήκει σε έναν από τους παραπάνω κύκλους. Μονάδες 13

Θέμα 4°

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x + 2\lambda y + x - y + \lambda - 1 = 0$ (1)

- α.** Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η (1) παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από σταθερό σημείο Μονάδες 12
- β.** Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) σχηματίζει ορθογώνιο τρίγωνο με τους άξονες $x'x$ και $y'y$ που έχει εμβαδόν $\frac{1}{10}$ τ. μ. Μονάδες 13

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$;
- B. Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.

Θέμα 2^ο

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ για τα οποία ισχύει:

$$|\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}| = \sqrt{21}, \quad |2\vec{\alpha} - \vec{\beta}| = 2 \quad \text{και} \quad \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 1$$

- A. Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$
- B. Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$

Θέμα 3^ο

Δίνεται η παραβολή C: $y^2 = 4x$ και το σημείο της M(1, 2). Αν K η προβολή του M στη διευθετούσα τότε:

- A. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών EK και της μεσοκαθέτου της
- B. Να δείξετε ότι η μεσοκάθετος της EK είναι εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο M

Θέμα 4^ο

Να αποδείξετε ότι:

- A. Η εξίσωση: $x^2 - 4xy + y^2 = 0$ παριστάνει δύο ευθείες.
- B. Κάθε μια σχηματίζει με τη $x - y = 0$ γωνία 30° .

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. Μονάδες 13
- B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας (Σ) αν η πρόταση είναι σωστή και (Λ) αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α.** Το εμβαδόν τριγώνου $AB\Gamma$ (A, B, Γ σημεία του καρτεσιανού επιπέδου) δίνεται από τον τύπο $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(AB, A\Gamma)|$.
- β.** Η εξίσωση της παραβολής C με εστία $E(\frac{p}{2}, 0)$ και διευθετούσα $\delta: x = -\frac{p}{2}$ είναι $y^2 = 2px^2$
- γ.** Έστω a, β δύο ακέραιοι με $\beta \neq 0$. Θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον a (β/a), όταν η διαίρεση του a με τον β είναι τέλεια, δηλ. Όταν υπάρχει ακέραιος λ , τέτοιος ώστε $a = \lambda\beta$.
- δ.** Έστω a, β, γ ακέραιοι. Τότε ισχύει η ιδιότητα: Αν a/β τότε $a/\lambda\beta$ για κάθε ακέραιο λ .
- ε.** Έστω διάνυσμα AB και ένα σημείο αναφοράς O , τότε η διανυσματική ακτίνα του μέσου

$$M \text{ του τμήματος } AB \text{ δίνεται από τον τύπο } OM = \frac{OA + OB}{2}$$

- στ.** Το τετράγωνο της απόστασης των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίσο με $(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

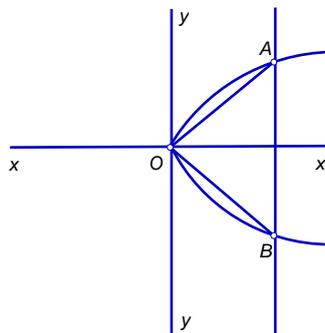
Δίνονται τα σημεία $A(3, 6)$, $B(8, 6)$, $\Gamma(9, 1)$, $\Delta(2, 1)$

- α.** Να αποδείξετε ότι τα A, B, Γ, Δ είναι κορυφές ισοσκελούς τραπεζίου. Μονάδες 10
- β.** Να βρείτε το μήκος της διαμέσου MN αυτού. Μονάδες 10
- γ.** Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου (O, ON) όπου O το μέσο της MN . Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Έστω η παραβολή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα και σημεία της A, B έτσι ώστε η γωνία $AOB = 90^\circ$

- α.** Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών OA και OB
- β.** Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
- γ.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB .
- δ.** Να αποδείξετε ότι η AB τέμνει τον άξονα $x'x$ σε σταθερό σημείο.



Μονάδες $8 + 10 + 3 + 4$

Θέμα 4^ο

Για κάθε $v \in \mathbb{N}^*$ να αποδείξετε ότι:

- α.** $4^v + 6v - 1 = \text{πολ}9$ Μονάδες 15
- β.** $2^{2v} + 15v - 1 = \text{πολ}9$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A₁. Δείξτε ότι η εξίσωση κύκλου που έχει κέντρο το σημείο O(0, 0) και ακτίνα ρ είναι:

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

Μονάδες 12

A₂. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$

και $\vec{\beta}$

Μονάδες 5

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη «Σωστό» ή «Λάθος» δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση

α. Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -1$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

β. Στην παραβολή $y^2 = 2px$ η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = -\frac{p}{2}$

γ. Αν A, B, Γ είναι κορυφές τριγώνου ABΓ το εμβαδό του είναι: $(AB\Gamma) = \frac{1}{2} |\det(\overline{AB}, \overline{A\Gamma})|$

δ. Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ στο σημείο της A (x_1, y_1) έχει εξίσωση

$$\frac{xy}{\alpha^2} + \frac{x_1 y_1}{\beta^2} = 1$$

Μονάδες 4 × 2

Θέμα 2^ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνεται ότι: $|\vec{\alpha}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$

A. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ Μονάδες 10

B. Αν ακόμη είναι $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ Να αποδείξετε ότι $|\vec{u}| = 2|\vec{v}|$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Έστω η παραβολή C: $y^2 = 2px$ και σημείο K($\mu, 1$), $\mu \in \mathbb{R}$ το οποίο ανήκει στην παραβολή C

A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της K είναι η ευθεία ε με εξίσωση (ε): $y = px + \mu$

B. Να βρείτε τα σημεία τομής A και B της (ε) με τους άξονες x'x και y'y αντίστοιχα

Γ. Αν το εμβαδό του τριγώνου AOB είναι 1m^2 να βρείτε την εξίσωση της παραβολής C

Μονάδες 8 + 5 + 12

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση C: $x^2 + y^2 - 6kx - 8ky = 0$, $k \in \mathbb{R}^*$

A. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο (για οποιαδήποτε τιμή του $k \in \mathbb{R}^*$) του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα

B. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων

Γ. Δείξτε ότι οι κύκλοι C διέρχονται από το σημείο O(0, 0) για κάθε $k \in \mathbb{R}^*$

Δ. Έστω C₁ ο κύκλος για $k = 1$ και ευθεία (ε) με εξίσωση (ε): $y = \lambda x + 2$. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$

ώστε η ευθεία (ε) να τέμνει τον κύκλο C₁ σε δύο σημεία A και B έτσι ώστε $\widehat{AOB} = 90^\circ$

Μονάδες 6 + 6 + 7 + 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α.

α. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση: $xx_1 + yy_1 = \rho^2$. Μονάδες 10

β. Έστω σημεία E και E' του επιπέδου. Τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες E και E' ; Μονάδες 5

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως **σωστές (Σ)** ή ως **λάθος (Λ)**

α. Για οποιαδήποτε διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$ για τα οποία ισχύει $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = \vec{a} \cdot \vec{\gamma}$ έπεται ότι $\vec{\beta} = \vec{\gamma}$.

β. Αν $M_1(x_1, y_1)$ και $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία μιας ευθείας (ϵ) με $x_1 \neq x_2$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της (ϵ) είναι $\lambda = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$.

γ. Ο αριθμός $\epsilon = 3$ μπορεί να είναι εκκεντρότητα έλλειψης

δ. Η παραβολή $x^2 = 2py$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $x x'$.

ε. Έστω \vec{a} , $\vec{\beta}$ δύο μη μηδενικά διανύσματα του επιπέδου. Αν $\vec{a} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{\beta}|$. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει :

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad \text{Μονάδες 25}$$

Θέμα 3^ο

Δίνεται η εξίσωση : $x^2 - y^2 + 8x + 16 = 0$

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση αυτή παριστάνει δύο ευθείες Μονάδες 7

β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (η) : $x - y + 4 = 0$ και (θ) : $x + y + 4 = 0$ είναι κάθετες. Μονάδες 7

γ. Να βρείτε σημείο $K(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$ και $\beta > 0$ τέτοιο ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta}_1 = (4, \alpha)$ να είναι παράλληλο στην ευθεία (η) και το διάνυσμα $\vec{\delta}_2 = (-8, 2\beta)$ να είναι παράλληλο στην ευθεία (θ). Μονάδες 6

δ. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από το σημείο K και το κέντρο του βρίσκεται στην αρχή των αξόνων $O(0, 0)$ Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα διανύσματα \vec{a} , $\vec{\beta}$ με $\widehat{(\vec{a}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ και $x^2 + y^2 - 2|\vec{a}|x - |\vec{\beta}|y + \vec{a} \cdot \vec{\beta} = 0$ (1)

Να δείξετε ότι :

α. $2\vec{a} \neq \vec{\beta}$

β. Η εξίσωση (1) παριστάνει κύκλο με ακτίνα $\rho = \frac{|2\vec{a} - \vec{\beta}|}{2}$

γ. Αν το κέντρο του κύκλου είναι $K(1, 1)$ τότε $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{\beta}| = 2$ και $\rho = 1$

α. Ο κύκλος εφάπτεται στην ευθεία $3x + 4y - 12 = 0$

ε. Η προβολή του $\vec{\beta}$ στο \vec{a} είναι \vec{a} Μονάδες 5×5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α.

α. Δώστε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο μη μηδενικών διανυσμάτων

Μονάδες 3

β. Ναδειχθεί ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου (C): $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο

$$M(x, y) \in C \text{ είναι } xx_1 + yy_1 = \rho^2$$

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος (Λ)

α. Αν η ευθεία με εξίσωση $(\mu^2 - 1)x + (\mu^2 - \mu)y + \mu = 0$ είναι παράλληλη του άξονα $x'x$ τότε $\mu = 1$ ή $\mu = -1$.β. Αν $\vec{\delta} = (A, B)$ και $v = (x, y)$ δύο διανύσματα με $\vec{\delta} \neq \vec{0}$ τότε η εξίσωση $\vec{\delta} \cdot \vec{v} + \Gamma = 0$ με $\Gamma \in R$ είναι εξίσωση ευθείας.γ. $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma} = \vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma})$ όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ διανύσματα του επιπέδου.δ. Όλες οι ευθείες που διέρχονται από το σημείο $A(x_0, y_0)$ έχουν εξίσωση

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$

ε. Η εξίσωση $3x^2 + 2y^2 + 4x + 5y - 1 = 0$

Μονάδες 15

Θέμα 2^οΈστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δύο αντίθετα διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$,α. Να βρείτε το μέτρο του $\vec{\kappa} = \vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τη γωνία $(\vec{\kappa}, \vec{\beta})$

Μονάδες 8

Θέμα 3^οΔίνονται τα σημεία $A(\lambda+2, 2\lambda+1)$, $B(\lambda-3, 3\lambda-2)$, $\Gamma(0, 3\lambda-5)$, $\lambda \in R$.Α. Δείξτε ότι για κάθε $\lambda \in R$ τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακάΒ. Βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων M(x, y), ώστε $\overline{AM} = 2\overline{OM}$ όταν $O(0, 0)$

Γ.

Μονάδες 6 + 7

α. Αν το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο στο B τότε δείξτε ότι $\lambda = 3$ β. Για $\lambda = 3$ βρείτε την εξίσωση του κύκλου που διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου του ερωτήματος Γ (β) στο σημείο B.

Μονάδες 12

Θέμα 4^οΔίνονται τα σημεία $M(9-4\kappa, 3\kappa-\frac{3}{4})$ και $N(4\eta\mu\varphi, 4\sigma\upsilon\upsilon\varphi)$, $0 < \varphi < 2\pi$ α. Δείξτε ότι το M βρίσκεται σε ευθεία (ε): $3x + 4y = 24$ και το N βρίσκεται σε κύκλο (C) με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 4$. Μονάδες 5β. Αν A, B τα σημεία που τέμνει η (ε) τους άξονες $x'x$, $y'y$ αντίστοιχα και Γ μέσο AB, να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων (ϵ_1) , (ϵ_2) του κύκλου (C) από το σημείο Γ και το συνημίτονο της αμβλείας γωνίας που σχηματίζουν Μονάδες 12γ. Αν $\overline{OG} = 2\overline{GD}$ όπου $O(0, 0)$ δείξτε ότι το σημείο Δ έχει συντεταγμένες $\Delta\left(6, \frac{9}{2}\right)$ και να

βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ΔAB.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- Α. Να αποδείξετε ότι: « Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους », δηλαδή $\vec{a} \cdot \vec{\beta} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$
- Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη σωστό ή λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α. Αν $A \neq 0$ ή $B \neq 0$, η εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει ευθεία
- β. Στην παραβολή $y^2 = 2px$, η εξίσωση της διευθετούσας είναι $x = \frac{p}{2}$
- γ. Η εκκεντρότητα ϵ της έλλειψης είναι μεγαλύτερη της μονάδας
- δ. Το διάνυσμα $\vec{a} = (2, 1)$ είναι κάθετο στην ευθεία (ϵ): $x - 2y + 5 = 0$

- Γ. Να αντιστοιχίσετε κάθε εξίσωση κωνικής τομής της στήλης Α με την αντίστοιχη εξίσωση εφαπτομένης της στο σημείο επαφής (x_1, y_1) στη στήλη Β

Μονάδες $9 + 8 + 8$

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
α. $x^2 + y^2 = p^2$	1. $\frac{x \cdot x_1 + y \cdot y_1}{\alpha^2 + \beta^2} = 1$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	2. $y \cdot y_1 = p(x + x_1)$
γ. $y^2 = 2px$	3. $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = p^2$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	4. $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = p^2$
	5. $\frac{x \cdot x_1}{\alpha^2} - \frac{y \cdot y_1}{\beta^2} = 1$
	6. $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 1$

Θέμα 2^ο

Για τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{\beta}$ δίνεται ότι $|\vec{a}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $\left(\widehat{\vec{a}, \vec{\beta}}\right) = \frac{\pi}{3}$. Έστω τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε:

- Α. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ Β. Τα μέτρα $|\vec{u}|, |\vec{v}|$ των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}
- Γ. Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$ Δ. Το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v}
- Ε. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\gamma} = (\lambda, \lambda - 1)$ και $\vec{\delta} = (4, \lambda)$ με $\lambda \neq 0$. Για ποια τιμή του λ τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ είναι κάθετα;
- α: $\lambda = 1$ β: $\lambda = 3$ γ: $\lambda = 2$ δ: $\lambda = -2$ ε: $\lambda = -3$

Σημειώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$

- Α. Να βρείτε τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x - 1$
- Γ. Δίνεται ο κύκλος $(x - 3)^2 + y^2 = 8$. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του.
- Δ. Να αποδείξετε ότι ο κύκλος $(x - 3)^2 + y^2 = 8$ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 4x$

Μονάδες $7 + 7 + 4 + 7$

Θέμα 4^ο

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α(-1,2), Β(1, 5) και Γ(4, 1). Να βρεθούν:

- Α. Η εξίσωση του ύψους που ξεκινά από την κορυφή Β Μονάδες 4
- Β. Η εξίσωση της διαμέσου που ξεκινά από την κορυφή Γ Μονάδες 4
- Γ. Η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ Μονάδες 4
- Δ. Η εξίσωση της πλευράς ΒΓ Μονάδες 4
- Ε. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ Μονάδες 4
- ΣΤ. Το μήκος της πλευράς ΑΓ του τριγώνου Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου $c: x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$ Μονάδες 10
- B. Να δώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} . Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ(Σωστό) ή Λ(Λάθος)
- α. $\vec{a} // \vec{b}$ αν και μόνο αν $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$
- β. $\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{b}$ αν και μόνο αν $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$
- γ. Η ευθεία με εξίσωση $Ax + By + \Gamma = 0$ είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\delta} = (B, -A)$
- δ. Στην ευθεία $y = y_0$ δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης
- ε. Η παραβολή $y^2 = 2px$ έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα $y'y$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Σε καρτεσιανό επίπεδο Oxy δίνονται τα σημεία A, B, Γ τέτοια ώστε $\vec{OA} = (1, 2)$, $B(4, 3)$ και $\vec{O\Gamma} = -\vec{i} + 8\vec{j}$

- A. Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A, Γ Μονάδες 6
- B. Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{B\Gamma}$ Μονάδες 9
- Γ. Να αποδείξετε ότι $\vec{AB} \perp \vec{A\Gamma}$ Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται ο κύκλος $c: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

- A. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα του Μονάδες 10
- B. Να βρεθεί η εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται στην ευθεία $y = x$ και είναι ομόκεντρος του κύκλου c . Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda + 1)x + (\lambda - 1)y - 3\lambda + 1 = 0$ (1), με $\lambda \in \mathbb{R}$

- A. Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) παριστάνει ευθεία για κάθε τιμή της παραμέτρου λ Μονάδες 5
- B. Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση (1) είναι ευθεία παράλληλη στη διευθετούσα της παραβολής $y^2 = 4x$ και να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας Μονάδες 7
- Γ.
- α. Να δείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση (1) που διέρχεται από το σημείο $M(2, 2)$ είναι η $\varepsilon: y = 2$ Μονάδες 5
- β. Στη συνέχεια να βρείτε δύο ευθείες που διέρχονται από την αρχή O των αξόνων και τέμνουν την ευθεία ε στα σημεία A, B αντίστοιχα έτσι ώστε το σημείο M να είναι το μέσο του AB και το τρίγωνο OAB να έχει εμβαδόν 10. Μονάδες 8

