

ΓΕΛ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ



ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$ Μονάδες 10
- B. Να γράψετε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:
 $\ln x$, $\sin x$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$, e^x Μονάδες 5
- Γ. Ερωτήσεις του τύπου « Σωστό-Λάθος »
- α. Αν A είναι ενδεχόμενο ενός πειράματος τύχης, τότε $1 \leq P(A)$
- β. Δειγματικός χώρος λέγεται το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος τύχης.
- γ. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη και συνεχής σ' ένα διάστημα Δ . Τα εσωτερικά σημεία του Δ , στα οποία η f παραγωγίζεται και η παράγωγος ισούται με μηδέν, είναι θέσεις τοπικών ακροτάτων της.
- δ. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης f , στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ αυτής, είναι η παράγωγος της f στο x_0 .
- ε. Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το A , λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$
- Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

- A. Να βρείτε την παράγωγό της Μονάδες 5
- B. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία της. Μονάδες 10
- Γ. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- A. Την $f'(x)$ Μονάδες 10
- B. Την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της $A(0,1)$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω . Αν $P(A) = 0,5$, $P(B) = 0,7$ και

$P(A \cup B) = 0,8$ τότε:

- A. Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα Μονάδες 6
- B. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ώστε να πραγματοποιούνται και τα δύο ενδεχόμενα ταυτόχρονα. Μονάδες 6
- Γ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ώστε να πραγματοποιείται μόνο το ενδεχόμενο A Μονάδες 6
- Δ. Να υπολογίσετε την πιθανότητα ώστε να πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 10}$$

B. Να γράψετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n

Μονάδες 5

Γ. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις – τύπους ώστε να είναι αληθείς:

α. Αν f, g δύο συναρτήσεις παραγωγίσιμες τότε ισχύει $[f(x) \cdot g(x)]' = \dots\dots\dots$

β. $(\eta \mu x)' = \dots\dots\dots$

γ. Με $x > 0$ είναι $(\ln x)' = \dots\dots\dots$

δ. Η πιθανότητα του βέβαιου ενδεχομένου Ω είναι $P(\Omega) = \dots\dots\dots$

ε. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές όταν.....

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 3$. Να βρεθούν:

α. Η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(2, 3)$

Μονάδες 12

β. Τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f

Μονάδες 13

Θέμα 3^ο

Μια αυτοκινητοβιομηχανία κατασκευάζει τέσσερα διαφορετικά μοντέλα αυτοκινήτων A, B, Γ, Δ με κόστος κατασκευής 5, 4, 3 και 2 χιλιάδες ευρώ αντίστοιχα. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας

Μοντέλα	Κόστος κατασκευής x_i	Συχνότητα v_i	f_i	N_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$
A	5					20
B	4			15		
Γ	3		0,3			
Δ	2					
Σύνολο		50				

α. Αν $\bar{x} = 3$ να αποδείξετε ότι $v_1 = 5, v_2 = 10, v_3 = 15, v_4 = 20$

Μονάδες 10

β. Να συμπληρώσετε τις δύο τελευταίες στήλες του πίνακα και να βρείτε την τυπική απόκλιση

Μονάδες 10

γ. Να βρείτε το συντελεστή μεταβλητότητας

Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν:

$$P(A - B) = \frac{1}{4}, P(A \cap B) = \frac{1}{20} \text{ και } P(B') = \frac{3}{4}$$

α. Να αποδείξετε ότι $P(A) = 0,3$

Μονάδες 10

β. Να αποδείξετε ότι $P(B) = 0,25$

Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου « να πραγματοποιηθεί ένα τουλάχιστον από τα ενδεχόμενα A, B »

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $cf(x)$ έχει παράγωγο $[cf(x)]' = cf'(x)$ Μονάδες 15
- B. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής; Μονάδες 5
- Γ. Στον παρακάτω πίνακα να αντιστοιχίσετε τις συναρτήσεις της 1^{ης} στήλης με τις παραγώγους τους της 2^{ης} στήλης, θεωρώντας ότι ισχύουν όλοι οι απαιτούμενοι περιορισμοί. Μονάδες 5

Στήλη A	Στήλη B
$(\sqrt{x})'$	$\frac{1}{x}$
$(\eta\mu x)'$	$-\eta\mu x$
$(\sigma\upsilon\nu x)'$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	e^x
$(e^x)'$	$\sigma\upsilon\nu x$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$

- A. Αφού υπολογίσετε την $f'(x)$ να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατά της Μονάδες 10
- B. Αφού υπολογίσετε την $f''(x)$ να δείξετε ότι $f''(0) + f''(1) + 6 = 0$ Μονάδες 5
- Γ. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(1, f(1))$. Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι τιμές της μεταβλητής X : 2, 3, 6, 3, 2, 3, 9. Να υπολογίσετε:

- A. τη μέση τιμή \bar{x} (με τύπο) και τη διάμεσο δ (με αιτιολόγηση) Μονάδες 8
- B. το εύρος R , τη διασπορά s^2 και την τυπική απόκλιση s Μονάδες 9
- Γ. το συντελεστή μεταβολής CV (με τύπο) και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές

$$\text{Δίνεται ότι: } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2 \text{ ή } s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i \quad \text{Μονάδες 8}$$

Θέμα 4^ο

Από τους 30 μαθητές μιας τάξης διακοπές θα κάνουν: οι 16 σε βουνό, οι 18 σε θάλασσα και οι 6 σε βουνό και θάλασσα. Να βρεθεί η πιθανότητα ένας μαθητής:

- A. να κάνει διακοπές σ' ένα τουλάχιστον απ' τα δύο μέρη (βουνό ή θάλασσα), Μονάδες 5
- B. να μην κάνει διακοπές σε κανένα απ' τα δύο μέρη (ούτε βουνό ούτε θάλασσα) Μονάδες 10
- Γ. να κάνει διακοπές μόνο στη θάλασσα Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^2$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 10

B. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων, όταν:

α. Ο n είναι άρτιος αριθμός.

Μονάδες 3

β. Ο n είναι περιττός αριθμός.

Μονάδες 2

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:

α. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\eta\mu x)'' = -\eta\mu x$.

β. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A , λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_0 \in A$

όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_0

γ. Οι τιμές μιας ποιοτικής μεταβλητής είναι αριθμοί.

δ. Η διακύμανση των τιμών μιας μεταβλητής X είναι μέτρο διασποράς.

ε. Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 95% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$, \bar{x} όπου η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση.

Θέμα 2^ο

Μονάδες 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^2}$.

β. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , στα οποία η εφαπτομένης της είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 9x - 1$. Μονάδες 8 + 9 + 8

Θέμα 3^ο

Οι ημερήσιες αποδοχές 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας σε € (ευρώ) δίνονται στον πίνακα:

Αποδοχές σε €	Κεντρική τιμή x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i v_i$
[35 , 45)		7				
[45 , 55)		8				
[55 , 65)		10				
[65 , 75)		12				
[75 , 85)		9				
[85 , 95)		4				
Σύνολο		50				

α. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας και να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα.

β. Να βρείτε τον αριθμό των υπαλλήλων της εταιρείας, που έχουν ημερήσιες αποδοχές από 50 € έως 60 €.

γ. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων της εταιρείας, που έχουν ημερήσιες αποδοχές το πολύ 70 €.

δ. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή των ημερήσιων αποδοχών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 10 + 4 + 5 + 6

Θέμα 4^ο

Μια μεταβλητή X παίρνει τις τιμές: $4a - 2$, 23, 19, 22, $3a$, 20, 16, 21, $3a + 1$, 20

A. Αν η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 20$, να βρείτε τον αριθμό a .

Μονάδες 5

B. Αν $a = 6$, τότε να υπολογίσετε:

α. Το εύρος των τιμών.

Μονάδες 3

β. Τη διάμεσο των τιμών.

Μονάδες 4

γ. Τη διακύμανση και την τυπική απόκλιση των τιμών.

Μονάδες 7

δ. Να αποδείξετε ότι το δείγμα των τιμών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. $(\sin x)' = \eta\mu x$, $x \in \mathbb{R}$.

β. Αν A, A' αντίθετα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε $P(A') = 1 + P(A)$

γ. Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$

δ. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε ισχύει: $(f(x) \cdot g(x))' = f(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g(x)$

ε. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$ Μονάδες $5 \times 2 = 10$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{\sqrt{x} - 1}$

A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. Μονάδες 9

B. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της f Μονάδες 9

Γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της f στο σημείο της M(0, f(0))

Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 80% μαθαίνει Αγγλικά, το 30% μαθαίνει Γαλλικά και το 20% μαθαίνει και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A. Ο μαθητής να μαθαίνει Αγγλικά ή Γαλλικά. Μονάδες 7

B. Ο μαθητής να μαθαίνει μία μόνο από τις δύο γλώσσες. Μονάδες 10

Γ. Ο μαθητής να μην μαθαίνει ούτε Αγγλικά ούτε Γαλλικά. Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Να αποδειχτεί ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$. Μονάδες 12
- B. Να γράψετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση. Μέτρο θέσης ενός συνόλου δεδομένων είναι:
- το εύρος
 - η διακύμανση
 - η τυπική απόκλιση
 - η διάμεσος Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τη λέξη Σωστό ή Λάθος
- Η διάμεσος δ ενός δείγματος n παρατηρήσεων t_1, t_2, \dots, t_n είναι πάντοτε μία από τις παρατηρήσεις
 - Η συχνότητα της τιμής x_1 μιας μεταβλητής X είναι αρνητικός αριθμός
- γ. Ισχύει $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, όπου f(x), g(x) παραγωγίσιμες συναρτήσεις.
- δ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$. Μονάδες 8

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$. Οι πιθανότητες P(A) και P(B) δύο ενδεχομένων A και B ενός δειγματικού χώρου Ω είναι ίσες με τις τιμές του x που μηδενίζουν την f(x).

- Αν $A \subseteq B$ να βρείτε τα P(A) και P(B) Μονάδες 9
- Για τις παραπάνω τιμές των P(A) και P(B) καθώς και για $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$ να βρείτε τις πιθανότητες:
- $P(A \cap B)$ και $P(A - B)$ Μονάδες 16

Θέμα 3^ο

Στο διπλανό πίνακα δίνονται οι θερμοκρασίες των 20 πρώτων ημερών του Μαΐου σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}C$).

- Αν γνωρίζουμε ότι η μέση τιμή της θερμοκρασίας των παραπάνω ημερών είναι $24,4^{\circ}C$, τότε να βρείτε πόσες ημέρες είχαν θερμοκρασία $24^{\circ}C$ και πόσες $25^{\circ}C$.
- Να υπολογίσετε τη διάμεσο των θερμοκρασιών (δικαιολόγηση)

Μονάδες 18 +7

Τιμές x_i θερμοκρασίας	Πλήθος ημερών n_i
22	2
23	4
24	?
25	?
26	2
27	3

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x}{\ln x} + 2$

- Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Μονάδες 5
- Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία Μονάδες 15
- Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο A (e, f(e)) Μονάδες 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδειχτεί ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου

$$\Omega \text{ ισχύει: } P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 13

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τις λέξεις Σωστό ή Λάθος

α. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

β. $P(A - B) = P(A) - P(B)$

γ. $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu \eta x$

δ. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Η βαθμολογία δέκα μαθητών στο Α τετράμηνο είναι 8, 10, 13, 15, 13, 14, 17, 17, 14, 9.

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, το εύρος και τη διάμεσο Μονάδες 9

β. Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση και το συντελεστή μεταβολής

Μονάδες 8

γ. Αν στο Β τετράμηνο αυξηθούν οι βαθμολογίες κατά 2 μονάδες να βρεθεί ο καινούργιος συντελεστής μεταβολής Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Από τους 200 ασθενείς που πέρασαν από ένα ιατρικό εργαστήριο, οι 120 έκαναν εξετάσεις αίματος, οι 50 έκαναν ακτινογραφίες και οι 20 έκαναν εξετάσεις αίματος και ακτινογραφίες.

Να βρεθεί η πιθανότητα:

α. ο ασθενής να έκανε εξετάσεις αίματος ή ακτινογραφίες Μονάδες 8

β. ο ασθενής να μην έκανε εξετάσεις αίματος ούτε ακτινογραφίες

Μονάδες 8

γ. ο ασθενής να έκανε μόνο εξετάσεις αίματος

Μονάδες 8

Θέμα 4^ο

Δίδεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2009$

α. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 15

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Ας υποθέσουμε ότι $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ είναι οι τιμές μιας μεταβλητής X , που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους n , όπου $k \leq n$.

α. Τι λέγεται συχνότητα v_i και τι σχετική συχνότητα f_i για την παρατήρηση x_i ;

β. Να αποδείξετε ότι ισχύει $0 \leq f_i \leq 1$ για $i = 1, 2, \dots, k$ και ότι $f_1 + f_2 + \dots + f_k = 1$

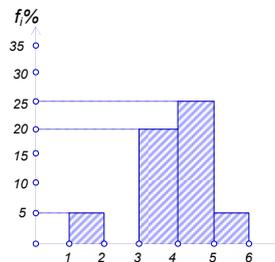
B. Να σημειώσετε στο γραπτό σας το γράμμα

που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Στο διπλανό σχήμα το ύψος του ορθογωνίου

που λείπει είναι: **α : 15 β : 20 γ : 25 δ : 35 ε : 45**

Μονάδες 5 + 13 + 7



Θέμα 2^ο

A. Να αντιστοιχίσετε στο γραπτό σας κάθε γραμμοσκιασμένο χωρίο της στήλης A στο αντίστοιχο του ενδεχόμενο από τη στήλη B.

ΣΤΗΛΗ A		ΣΤΗΛΗ B
α.	β.	1. $A \cup B$
γ.	δ.	2. $A \cup B$;
		3. $(A \cup B); \cup (A \cap B)$
		4. $(A - B) \cup B$
		5. $(A - B) \cup (B - A)$
		6. $A \cap B$
		7. $A' \cup B'$

Μονάδες 10

B. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Έστω A, B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω και $P(A) = \frac{5}{8}, P(B) = \frac{4}{8}$ και $P(A \cup B) = \frac{7}{8}$.

Να βρεθούν τα :

α. $R(A \cap B)$ **β.** $R(A - B)$ **γ.** $R(B - A)$ **δ.** $R[(A - B) \cup (B - A)]$ **ε.** $P[(A \cup B)']$

Θέμα 4^ο

Μονάδες 25

Σε μια εταιρεία εργάζονται 50 άτομα με συνολικό χρόνο υπηρεσίας που δίνεται από τον παρακάτω πίνακα:

Χρόνια υπηρεσίας [-)	v_i	$f_i \%$	$F_i \%$
[0 - 5)			10
[5 - 10)			24
[10 - 15)			40
[15 - 20)			50
[20 - 25)			80
[25 - 30)			
ΣΥΝΟΛΟ			-

A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

B. Να βρείτε το πλήθος των υπαλλήλων που έχουν συνολικό χρόνο υπηρεσίας 10 χρόνια

Γ. Να βρείτε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν χρόνο υπηρεσίας από 15 έως 20 χρόνια

Μονάδες 10 + 8 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν A, B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 15}$$

B. Να απαντήσετε με Σ ή Λ στα παρακάτω:

α. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

β. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

γ. $P(A - B) = P(A) - P(B)$

δ. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$

ε. $f_i = \frac{v}{v_i}$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f Μονάδες 7

β. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$ Μονάδες 10

γ. Να βρείτε την $f'(x)$ Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Στον πίνακα δίνονται οι τιμές μιας μεταβλητής x και οι αντίστοιχες συχνότητες:

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i
5	3
6	5
7	12
8	9
9	κ
10	3

α. Αν $\bar{x} = 7,5$ να υπολογίσετε το κ Μονάδες 15

β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Στο σύνολο των μαθητών ενός σχολείου ισχύει ότι: το 80 % κάνει Αγγλικά, το 30 % κάνει Γαλλικά και το 20 % κάνει και τις 2 ξένες γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. Ο μαθητής να κάνει μία τουλάχιστον ξένη γλώσσα Μονάδες

β. Ο μαθητής να μην κάνει καμιά γλώσσα Μονάδες 12

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν A και B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 10}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι αληθείς ή με (Λ) αν είναι ψευδείς:

α. $(\sin x)' = \eta \mu x$

β. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x)}{h} = f'(x)$

γ. Αν A, B ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

δ. Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής

ε. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$

$$\text{ισχύει: } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{Μονάδες 15}$$

Θέμα 2^ο

Στις πανελλήνιες εξετάσεις ένας μαθητής πήρε τους παρακάτω βαθμούς:

40, 90, 60, 70, 80, 20. Να υπολογίσετε:

α. Τη μέση τιμή \bar{x} Μονάδες 10

β. Τη διάμεσο δ Μονάδες 10

γ. Τη διακύμανση S^2 Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Θεωρούμε ενδεχόμενα A, B ενός πειράματος τύχης για τα οποία ισχύουν:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}, P(A') = \frac{2}{3} \text{ και } P(A \cap B) = \frac{1}{4}. \text{ Να βρείτε:}$$

α. $P(A)$ Μονάδες 10

β. $P(B)$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνεται η $f(x) = x^2 - 6x + 1$

α. Να μελετηθεί η συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

Μονάδες 10

β. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f'(x)}{x^2 - 9}$ Μονάδες 5

γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x - 1$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- Α. Αν A' είναι το συμπληρωματικό ενός ενδεχομένου A , δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι: $P(A') = 1 - P(A)$ Μονάδες 10
- Β. Τι ονομάζεται διάμεσος (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά όταν το n είναι περιττός αριθμός; Μονάδες 5
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με τη λέξη Σωστό ή Λάθος:
- α. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$
- β. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- γ. εύρος $R = \text{Μεγαλύτερη παρατήρηση} + \text{Μικρότερη παρατήρηση}$
- δ. η μέση τιμή \bar{x} δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές
- ε. αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων της μεταβλητής “βαθμός πτυχίου” 25 τελειόφοιτων του Μαθηματικού τμήματος

Βαθμός πτυχίου x_i	v_i	$f_i \%$	N_i	$F_i \%$	$x_i v_i$
5					
6	5		10		
7				64	
8		20			
9	2				
10					
Σύνολα	25				

- α. Να συμπληρώσετε τον πίνακα. Μονάδες 10
- β. Να βρείτε την μέση τιμή \bar{x} . Μονάδες 7
- γ. Να βρείτε την διάμεσο. Μονάδες 8

Θέμα 3^ο

Από τους 40 μαθητές της Γ' Λυκείου οι 20 μαθαίνουν αγγλικά, οι 12 γαλλικά και οι 8 και τις δύο γλώσσες. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή

- α. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να μαθαίνει αγγλικά ή γαλλικά.
- β. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να μαθαίνει αγγλικά αλλά όχι γαλλικά.
- γ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις γλώσσες.
- δ. Να βρείτε την πιθανότητα ο μαθητής να μη μαθαίνει καμιά από τις δύο γλώσσες. Μονάδες 7+6+6+6

Θέμα 4^ο

Έστω $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ n παρατηρήσεις με μέση τιμή \bar{x} , τυπική απόκλιση s και η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \bar{x} \cdot x$, με $x \in \mathcal{R}$

- Α. Αν η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο με τετμημένη 1 είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ να δείξετε ότι $\bar{x} = 3$. Μονάδες 6
- Β. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του α) ερωτήματος και $s = 2$ τότε:
- α. Να εξετάσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- β. Να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.
- γ. Να βρείτε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο a που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές Μονάδες 7+5+7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε με τη βοήθεια του ορισμού μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $(x)' = 1$ Μονάδες 11
- B.** Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος n παρατηρήσεων. Μονάδες 5
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας κατανομής είναι ίσο με 1.
- β.** Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση μόνο ποιοτικών δεδομένων.
- γ.** Σε μία κανονική ή περίπου κανονική κατανομή, το εύρος (R) ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις (s). Μονάδες 3 + 3 + 3

Θέμα 2^ο

- A.** Να αντιστοιχίσετε σε κάθε συνάρτηση της στήλης Α την παράγωγό της, στη στήλη Β.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
A. $2x^3 - x^2 + 3x$	1. $x(2\ln x + 1)$
B. $x^2 \cdot \sin x$	2. $\frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$
Γ. $\frac{x}{\ln x}$	3. $x(2\sin x - \chi\eta\mu x)$
Δ. $x^2 \cdot \ln x$	4. $2x\sin x + x^2\eta\mu x$
E. $e^{\eta\mu x}$	5. $\eta\mu x \cdot e^{\sin x}$
	6. $\sin x \cdot e^{\eta\mu x}$
	7. $6x^2 - 2x + 3$

ΣΤΗΛΗ Α	A	B	Γ	Δ	E
ΣΤΗΛΗ Β					

Μονάδες 5 × 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

- A.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 10
- B.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$ Μονάδες 5
- Γ.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη 0. Μονάδες 10

Θέμα 4^ο

Η βαθμολογία στα 10 μαθήματα ενός μαθητή είναι: 10, 8, 9, 10, 13, 15, 12, 13, 14, 16

Να υπολογίσετε:

- α.** Τη μέση τιμή.
- β.** Τη διάμεσο.
- γ.** Το εύρος (R).
- δ.** Τη διακύμανση.
- ε.** Το συντελεστή μεταβολής (CV). Μονάδες 5 × 5

(Δίνεται ότι $\sqrt{6,4} = 2,53$)

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Αν Ω είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και A ένα ενδεχόμενο, να δειχθεί ότι ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$ Μονάδες 13

B. Να συμπληρωθούν τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς ισότητες:

α. $[f(x) \cdot g(x)]' =$

β. $(\sin x)' =$

γ. $P(A - B) =$

δ. $P(A \cup B) =$

Μονάδες 12

Θέμα 2^ο

Οι τιμές μιας παρατήρησης είναι: 2, 4, 1, 5, 7, 2, 6, α με μέση τιμή $\bar{x} = 4$ να βρεθεί:

α. Η τιμή του α

Μονάδες 5

β. Η διάμεσός τους και το εύρος τους αν α = 5

Μονάδες 10

γ. Η τυπική απόκλιση και ο συντελεστής μεταβολής για α = 5

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

α. Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x)$

β. Να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f'(x) = 0$

γ. Να βρεθούν τα διαστήματα μονοτονίας της $f(x)$

δ. Να βρεθούν οι θέσεις ακροτάτων της $f(x)$ και οι τιμές τους

ε. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$ Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι: $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$

και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$. Να βρεθούν:

α. $P(B')$

Μονάδες 8

β. $P(A \cup B)$

Μονάδες 9

γ. $P(A - B)$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A , B ενός δειγματικού χώρου ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 10}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί στην κάθε πρόταση:

α. $\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \sqrt{x}, x > 0$

β. $\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{g^2(x)}, g(x) \neq 0$

γ. Ο συντελεστής μεταβολής (CV) είναι μέτρο θέσης

δ. Αν A , B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε $P(A) > P(B)$ αν ισχύει ότι $A \subseteq B$

ε. $(\varepsilon\varphi x)' = 1 + \varepsilon\varphi^2 x \quad x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z} \quad \text{Μονάδες 15}$

Θέμα 2^ο

Η βαθμολογία ενός μαθητή σε 5 μαθήματα είναι: 12 , 15 , 18 , 16 , 17

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή , διάμεσο , διακύμανση

β. Αν στο επόμενο τετράμηνο στο κάθε μάθημα έχουμε αύξηση κατά 2 μονάδες , να βρεθεί η μέση τιμή και η διακύμανση του νέου τετραμήνου.

Θέμα 3^ο

Αν A , B δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι:

α. $P(B) + P(A - B) = P(A \cup B) \quad \text{Μονάδες 7}$

β. $P(A - B) + P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 8}$

γ. Αν $A \subseteq B$ και ισχύει:

$$2P^2(A) + P(B) \geq 2P(A) \cdot P(B) + P(A) \quad \text{Τότε } P(A) \leq \frac{1}{2} \quad \text{Μονάδες 10}$$

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x - x, x > 0$

A. Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 15

B. Να συγκριθούν οι αριθμοί $f(2), f(3)$ Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$

B.

α. Ποιες μεταβλητές λέγονται « ποσοτικές »

β. Πότε μια ποσοτική μεταβλητή ονομάζεται « διακριτή » και πότε « συνεχής »

Γ. Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν αληθείς προτάσεις

α. Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής θα είναι ομοιογενές, εάν.....

β. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\sin x)' = \dots\dots$

γ. Αν $g(x) \neq 0$ τότε $\left[\frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \dots\dots\dots$

δ. Μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν

ε. Σε μία περίπτωση κανονική κατανομή το εύρος R του δείγματος είναι περίπου ίσο με.....

Μονάδες 10 + 2 + 3 + 10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 + 3x + 1$

α. Βρείτε την $f'(x)$

Μονάδες 5

β. Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο

A(2,f(2)).

Μονάδες 10

γ. Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x-1}$

Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Ο παρακάτω ελλιπής πίνακας δείχνει την κατανομή των απουσιών των μαθητών ενός σχολείου, για το μήνα Μάρτιο, σε έξι μαθήματα της Α' Λυκείου

ΜΑΘΗΜΑΤΑ x_i	v_i	$f_i \%$
ΑΡΧΑΙΑ	6	
ΝΕΑ ΕΛΛΗΝΙΚΑ		5
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	8	20
ΦΥΣΙΚΗ	10	
ΧΗΜΕΙΑ		
ΑΓΓΛΙΚΑ	8	
ΣΥΝΟΛΟ		

α. Να βρείτε πόσες απουσίες σημειώθηκαν στην Α' Λυκείου για το μήνα Μάρτιο

β. Να συμπληρώσετε τον πίνακα

γ. Να σχεδιάσετε το ραβδόγραμμα των σχετικών συχνοτήτων ($f_i \%$) Μονάδες 8 + 9 + 8

Θέμα 4^ο

Δίνονται οι τιμές: $x + 1, 2x + 1, 3x + 2, x - 2, 3x - 7, x \in \mathbb{R}$

A. Να αποδειχτεί ότι:

α. η μέση τιμή αυτών είναι $\bar{x} = 2x - 1$

Μονάδες 3

β. η διακύμανση αυτών είναι: $s^2 = \frac{2}{5} (2x^2 - 4x + 27)$

Μονάδες 5

B. Να βρείτε την τιμή του x, για την οποία η διακύμανση παίρνει την ελάχιστη τιμή της

Μονάδες 8

Γ. Αν $x = 1$

α. Να υπολογίσετε τη διάμεσο των τιμών αυτών

Μονάδες 3

β. Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές (Δίνεται $\sqrt{10} \simeq 3,16$)

Μονάδες 6

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x$ είναι $f'(x) = 1$.
- B.** Να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου A κάποιου δειγματικού χώρου Ω .
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα, το οποίο αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.
- α.** Ισχύει: $(\sin x)' = \eta \mu x$, για κάθε $x \in \mathcal{R}$. Μονάδες 12
- β.** Η διάμεσος δ είναι μέτρο διασποράς. Μονάδες 7
- γ.** Αν το ενδεχόμενο A' , συμπληρωματικό του ενδεχομένου A , πραγματοποιείται, τότε δεν πραγματοποιείται το A . Μονάδες 6

Θέμα 2^ο

Οι τιμές μιας παρατήρησης είναι 2, 7, 3, 5, 6, 1, λ , 10, με μέση τιμή $\bar{x} = 5$.

- α.** Να βρείτε την τιμή του λ . Μονάδες 11
- β.** αν $\lambda = 6$, να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος. Μονάδες 14

Θέμα 3^ο

Η κατανομή των υψών των αγοριών της Γ' Λυκείου σε ένα σχολείο είναι κανονική. Το 68% των μαθητών έχουν ύψος (σε εκατοστά) που ανήκει στο διάστημα (175, 181), ενώ οι πιο πολλοί μαθητές έχουν ύψος 178 cm.

- α.** Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση του ύψους των μαθητών Μονάδες 13
- β.** Να εξετάσετε αν είναι πιο πολλοί οι μαθητές που έχουν ύψους 174 cm ή αυτοί που έχουν ύψος 182 cm. Μονάδες 6
- γ.** Να εξετάσετε αν είναι εύκολο το συγκεκριμένο Λύκειο να συγκροτήσει ομάδα μπάσκετ, από μαθητές της Γ' Λυκείου, με μέσο όρο ύψους 188 cm Μονάδες 6

Θέμα 4^ο

Δίνεται Ω δειγματικός χώρος με A, B ενδεχόμενα του Ω και η συνάρτηση

$$f(x) = 4x^3 - \frac{13}{2}x^2 + 3x + 2009.$$

- A.** Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Μονάδες 15
- B.** Αν $P(A), P(B)$ οι θέσεις τοπικών ακρότατων της f με $P(A) < P(B)$, τότε:
- α.** Να εξετάσετε αν τα A, B είναι ασυμβίβαστα Μονάδες 4
- β.** Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{12} \leq P(A \cap B) \leq \frac{1}{3}$. Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A, B ισχύει :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Β. Τι ονομάζεται σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ;

Γ. Να χαρακτηρίσετε στην κόλλα σας με Σ (Σωστό) ή Λ (Λάθος) τις παρακάτω προτάσεις:

α. Οι αθροιστικές συχνότητες N_i εκφράζουν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες ή και ίσες με την τιμή x_i

β. Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f έχει στο x_0 τοπικό ακρότατο

γ. Για δυο μή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει :
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

δ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\operatorname{erf} x)' = \frac{1}{\sqrt{\pi} x^2}$

ε. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 . Μονάδες $12 + 3 + 5 \times 2$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$.

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

β. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}{x-3}$

γ. Να βρείτε την παράγωγο συν/ση $f'(x)$ της συν/σης f και τον παράγωγο αριθμό της στο $x_0 = 2$ Μονάδες $3 + 10 + 12$

Θέμα 3^ο

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει στοιχεία για τις απουσίες ενός αριθμού μαθητών το μήνα Μάρτιο:

Επισκέψεις x_i	Αριθμός Μαθητών n_i	Σχετική Συχνότητα $f_i\%$	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική Αθροιστική Συχνότητα F_i	$x_i n_i$
1	6				
2			1		
3				7	
4		1			
5			5		
Σύνολο					

α. Να συμπληρώσετε τα κενά του πίνακα

β. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή του αριθμού των επισκέψεων.

γ. Να βρείτε τη διάμεσο του δείγματος

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + a^2 - 4a$ με $a \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο για κάθε $a \in \mathbb{R}$

β. Για ποιές τιμές του a ισχύει $f_{\max} = 3f_{\min}$

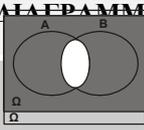
γ. Για ποιά τιμή του x ο ρυθμός μεταβολής της f γίνεται ελάχιστος και ποιός είναι αυτός.

Μονάδες $9 + 8 + 8$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- B. Αν για τα ενδεχόμενα A,B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(A) = 0,6$ και $P(B) = 0,5$ να συμπληρωθεί ο πίνακας

A/A	ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ	ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟ	ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΟΥ
1			0,2
2			
3			
4		$A \cup B$	
5			

Μονάδες 15 +10

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = e^{3x-2} - 9e^{x+8}$.

A. Να βρεθεί η $f'(x)$.

B. Να βρεθεί η $f''(x)$.

Γ. Να δείξετε ότι ισχύει: $3 \cdot f(5) + f''(5) - 4 \cdot f'(5) = 0$.

Μονάδες 10 + 5 +10

Θέμα 3^ο

Δίνονται οι τιμές δέκα προϊόντων σε ευρώ : $5, 3, 2\kappa, 5, 7, \kappa, 2, 6, 9, 4$ με $\kappa > 0$.

A. Αν η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 5$ να βρεθεί το κ και η διάμεσος των παραπάνω τιμών.

B. Αν $\kappa = 3$ να βρεθεί:

α. το εύρος, η διασπορά, η τυπική απόκλιση, (είναι $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (t_i - \bar{x})^2$ ή $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$)

β. ο συντελεστής μεταβολής και να εξεταστεί αν το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ. ο νέος συντελεστής μεταβολής αν οι αρχικές τιμές των προϊόντων αυξηθούν κατά 2 ευρώ.

Μονάδες 5 + 10 + 5 + 5

Θέμα 4^ο

A. Να προσδιορίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε η ευθεία $y = x$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο $M(1, 1)$

B. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 1$ να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Γ. Αν η τιμή του x που η f παρουσιάζει ακρότατο είναι ίση με $P(A)$ και η τιμή του ακρότατου της f είναι ίση με $P(B)$, όπου A, B ενδεχόμενα δειγματικού χώρου Ω πειράματος τύχης ισοπίθανων αποτελεσμάτων, τότε να δείξετε ότι:

α. $P(B') = \frac{1}{4}$, β. A, B όχι ξένα μεταξύ τους.

γ. αν $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$ η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B

είναι $\frac{1}{4}$.

Μονάδες 6 +10 + 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

Α. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x, x^R$, είναι ίση με το ένα δηλαδή $f'(x) = 1$ Μονάδες 15

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω ισότητες:

α. $(c \cdot f(x))' = \dots\dots\dots$

β. Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ , τότε η f είναι..... στο Δ .

γ. Η διάμεσος δείγματος n παρατηρήσεων, οι οποίες έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά, όταν ο n είναι περιττός, ισούται με.....

δ. $(f(x) \cdot g(x))' = \dots\dots\dots$

ε. Ο συντελεστής μεταβλητότητας όταν $\bar{x} > 0$, είναι: $CV = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots}$ Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

α. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ και $g(x) = \frac{\ln x}{x^2}, x > 0$ Μονάδες 10

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης f Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Εξετάσαμε ένα δείγμα 50 οικογενειών ενός χωριού ως προς τον αριθμό των παιδιών που έχουν. Τα αποτελέσματα της έρευνας φαίνονται στον παρακάτω ελλειπή πίνακα.

Αριθμός παιδιών x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική Συχνότητα $f_i \%$	$x_i v_i$
0	10		
1	12		
2			
3	8		
4	6		
5		8	
Σύνολο	50		

α. Να συμπληρώσετε τον παραπάνω πίνακα Μονάδες 13

β. Να βρείτε τη μέση τιμή και τη διάμεσο Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Οι μισθοί των υπαλλήλων μιας εταιρίας ακολουθούν την κανονική κατανομή. Αν το 50 % των μισθών είναι μικρότεροι από 1000 € και το 99,7 % των μισθών βρίσκεται στο διάστημα (700, 1300):

α. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση Μονάδες 10

β. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής και να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές Μονάδες 7

γ. Αν οι μισθοί των υπαλλήλων αυξηθούν κατά 50 €, να υπολογίσετε το νέο συντελεστή μεταβολής Μονάδες 8

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $F(x) = f(x) + g(x)$ να αποδείξετε ότι:
 $F'(x) = f'(x) + g'(x)$ Μονάδες 15
- B. Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις:
- α. $[\eta\mu f(x)]' = \dots\dots\dots$
- β. Αν (ϵ) η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ϵ) είναι:.....
- γ. Ποσοτικές μεταβλητές είναι.....
- δ. Στο κυκλικό διάγραμμα το τόξο ενός κυκλικού τμήματος είναι $\alpha_i = \dots\dots\dots$
- ε. Αν $CV_A < CV_B$ τότε το δείγμα A έχει.....ομοιογένεια από το δείγμα B
Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Τα ημερήσια έξοδα (σε €) διατροφής μιας οικογένειας για τις 20 πρώτες ημέρες ενός μήνα είναι τα εξής:

25, 40, 15, 25, 10, 10, 20, 15, 50, 30

25, 20, 25, 25, 30, 15, 10, 50, 50, 40

- A. Να κατασκευάσετε πίνακα κατανομής συχνοτήτων ($v_i, N_i, f_i, f_i \%, F_i, F_i \%$)
Μονάδες 15
- B. Πόσες μέρες η οικογένεια ξόδεψε λιγότερα από 25 €; Μονάδες 5
- Γ. Πόσες μέρες η οικογένεια ξόδεψε περισσότερα από 30 €; Μονάδες 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 2}$

- A. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$ Μονάδες 5
- B. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ Μονάδες 5
- Γ. Να βρείτε σημείο της $C_f, f(1)$ Μονάδες 8
- Δ. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Ο μέσος χρόνος που χρειάζονται οι μαθητές ενός σχολείου να πάνε από το σπίτι στο σχολείο είναι 10 λεπτά με διακύμανση $s^2 = 4$. Υποθέτοντας ότι έχουμε περίπου κανονική κατανομή, να βρείτε κατά προσέγγιση το ποσοστό των μαθητών που χρειάζονται:

- A. από 6 έως 14 λεπτά Μονάδες 8
- B. το πολύ 8 λεπτά Μονάδες 8
- Γ. τουλάχιστον 12 λεπτά για να πάνε στο σχολείο τους. Μονάδες 9

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Αν A, A' δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , τότε να αποδείξετε ότι ισχύει: $P(A') = 1 - P(A)$ Μονάδες 10
- B.** Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν είναι σωστή ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη:
- α.** Για κάθε θετικό ακέραιο $n \geq 2$, ισχύει: $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- β.** Αν σ' ένα δείγμα μεγέθους n έχουμε k – διαφορετικές παρατηρήσεις ($k \leq n$) x_i , $i = 1, 2, \dots, k$ μιας μεταβλητής X , τότε η σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i δίνεται από τον τύπο:
- $$f_i = \frac{v_i}{n}, i = 1, 2, \dots, k, \text{ όπου } v_i \text{ η συχνότητα της τιμής } x_i$$
- γ.** Αν f_1, f_2, \dots, f_k είναι οι σχετικές συχνότητες των διακεκριμένων (δηλ. διαφορετικών) τιμών x_1, x_2, \dots, x_k μιας μεταβλητής x ενός δείγματος μεγέθους n , τότε ισχύει:
- $$f_1 + f_2 + \dots + f_k = 100$$
- δ.** Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής είναι ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10 %.
- ε.** Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$ Μονάδες 15

Θέμα 2^ο

Η βαθμολογία 6 μαθητών σ' ένα διαγώνισμα ήταν: 5, 9, 9, 11, 11, 15.

- α.** Να υπολογίσετε το εύρος R της βαθμολογίας Μονάδες 3
- β.** Να υπολογίσετε τη διάμεσο δ της βαθμολογίας Μονάδες 4
- γ.** Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} της βαθμολογίας Μονάδες 5
- δ.** Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 της βαθμολογίας Μονάδες 5
- ε.** Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση s της βαθμολογίας Μονάδες 3
- στ.** Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής CV , της βαθμολογίας Μονάδες 5

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον τύπο: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i$

Θέμα 3^ο

Έχουμε 30 σφαίρες μέσα σ' ένα δοχείο, αριθμημένες από το 1 έως το 30. Επιλέγουμε στην τύχη μία σφαίρα. Έστω A το ενδεχόμενο « ο αριθμός της σφαίρας να είναι άρτιος » και B το ενδεχόμενο « ο αριθμός της σφαίρας να είναι πολλαπλάσιο του 5 ». Αν B' είναι το συμπληρωματικό ενδεχόμενο του B , να υπολογίσετε τις πιθανότητες:

- α.** $P(A), P(B)$ Μονάδες 6
- β.** $P(A \cap B)$ Μονάδες 6
- γ.** $P(A \cup B)$ Μονάδες 6
- δ.** $P(A \cup B')$ Μονάδες 7

Θέμα 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4(x - 2)$, $x \in \mathbb{R}$

- α.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $f'(x)$ της $f(x)$ Μονάδες 7
- β.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ Μονάδες 8
- γ.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$.
Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = 2x$
- B. Τι ονομάζεται δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης;
Τι ονομάζεται ενδεχόμενο;
Πότε ένα ενδεχόμενο είναι απλό και πότε σύνθετο;
- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση:
- α. Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y = f(x)$ ως προς x , όταν $x = x_0$
- β. Ισχύει $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- γ. Η τυπική απόκλιση εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.
- δ. Στην κανονική κατανομή το 68% των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$, όπου \bar{x} είναι η μέση τιμή των παρατηρήσεων και s η τυπική τους απόκλιση.
- ε. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.

Μονάδες 10 + 5 + 10

Θέμα 2^ο

Εξετάσαμε τους 20 μαθητές ενός τμήματος της Γ' Λυκείου ως προς τον αριθμό των εκδρομών του Λυκείου στις οποίες συμμετείχαν και πήραμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

1, 0, 3, 4, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 0, 3, 1, 3, 1, 0, 2, 2, 3

- A. Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων
- B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή \bar{x} των παρατηρήσεων.
- Γ. Να βρείτε το ποσοστό των μαθητών που συμμετείχαν σε περισσότερες από 2 εκδρομές

Μονάδες 10 + 10 + 5

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + 2x - 1$ όπου λ πραγματικός αριθμός.

- A. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$, είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 10$, να δείξετε ότι $\lambda = 2$
- B. Για $\lambda = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $K(1, f(1))$.
- Γ. Για $\lambda = 2$ να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

Μονάδες 10 + 10 + 5

Θέμα 4^ο

Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα και η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + \kappa$, $x \in \mathbb{R}$ και $\kappa \in \Omega$. Επιλέγουμε τα ενδεχόμενα:

$A = \{\kappa \in \Omega / \text{ο αριθμός } 6 \text{ είναι η ελάχιστη τιμή της } f\}$

$B = \{\kappa \in \Omega / \text{η } f \text{ δεν έχει πραγματικές ρίζες}\}$

- A. Να βρείτε τα ενδεχόμενα A , B και να εξετάσετε αν είναι ασυμβίβαστα
- B. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$ και $P(B)$
- Γ. Να βρείτε την πιθανότητα: « η f να έχει τουλάχιστον μία πραγματική ρίζα »
- Δ. Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B - A)$ και $P(B \cup A)$

Μονάδες 10 + 5 + 5 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 15

B. Να χαρακτηρίσετε ως σωστές ή λανθασμένες τις παρακάτω προτάσεις:

α. $[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$, β. $P(A) + P(A') = 1$, γ. $CV = \frac{C}{V}$,

δ. Αν $f(x) = e^x$ τότε $f'(x) = \frac{1}{x}$,

ε. Για τις σχετικές συχνότητες f_1, f_2, \dots, f_k των τιμών x_1, x_2, \dots, x_k

Θέμα 2^ο

A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i	$f_i\%$
2	1			
3	4			
4	1			
5				
6	2			
Σύνολο	10			100

Μονάδες 10

B. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή (\bar{x}), τη διάμεσο (δ) και τη διακύμανση (S^2)

Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.

α. Να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$

Μονάδες 5

β. Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 20

Θέμα 4^ο

A. Έστω δύο ενδεχόμενα $A, B \subseteq \Omega$ με $p(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{4}{21}$. Να βρεθούν

οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

α. $A \cup B$

Μονάδες 5

β. Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B

Μονάδες 5

γ. Πραγματοποιείται μόνο το A.

Μονάδες 5

δ. Πραγματοποιείται μόνο το A. ή μόνο το B.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα A και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 10

B. Να συμπληρώσετε τις ακόλουθες σχέσεις:

α. $(c)'$ =

β. $(x^y)'$ =

γ. $(\sqrt{x})'$ =

δ. $(\eta\mu x)'$ =

ε. $(\sigma\upsilon\nu x)'$ =

στ. $\left(\frac{1}{x}\right)'$ =

Μονάδες 6

Γ. Σε κάθε στατιστική παράμετρο της στήλης A να αντιστοιχίσετε το χαρακτηρισμό της που βρίσκεται στη στήλη B.

ΣΤΗΛΗ A	ΣΤΗΛΗ B
1. Μέση τιμή	α. Διασποράς
2. Τυπική απόκλιση	β. Θέσης
3. Συντελεστής μεταβολής	γ. Σχετικής διασποράς
4. Εύρος	
5. Διάμεσος	
6. Διακύμανση	

Μονάδες 9

Θέμα 2^ο

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης:

$$f(x) = 2x^3 - 7x^2 + 4x - 1$$

Μονάδες 25

Θέμα 3^ο

Η τιμή ενός προϊόντος σε Ευρώ μετά από έρευνα που έγινε σε 10 καταστήματα της Αττικής ήταν: 12, 15, 17, 19, 19, 20, 16, 15, 10, 17. Να υπολογίσετε:

α. τη μέση τιμή

Μονάδες 8

β. τη διάμεσο

Μονάδες 8

γ. Ποια θα είναι η νέα μέση τιμή και η νέα διάμεσος, αν οι τιμές του προϊόντος αυξηθούν κατά 20 % σε όλα τα καταστήματα;

Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Το 15 % των μαθητών της Γ' τάξης δεν έχουν φορητό Η/Υ, το 40 % δεν έχουν βίντεο Blue-ray και το 10 % δεν έχουν ούτε φορητό Η/Υ ούτε βίντεο Blue-ray. Επιλέγουμε τυχαία ένα μαθητή. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει και φορητό Η/Υ αι βίντεο Blue-ray.

Μονάδες 25

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

- A.** Σε ένα δείγμα μεγέθους n οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής X είναι t_1, t_2, \dots, t_n . Πώς ορίζεται η μέση τιμή \bar{x} ; Μονάδες 15
- B.** Σε κάθε μία από τις επόμενες προτάσεις να σημειώσετε το Σ (σωστή) ή το Λ (λανθασμένη):
- α.** Η μέση τιμή ενός συνόλου n παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης
- β.** Η διάμεσος ενός δείγματος είναι ένα μέτρο διασποράς
- γ.** Το εύρος είναι ένα μέτρο διασποράς
- δ.** Αν ο συντελεστής μεταβολής $CV \geq 0,10$ τότε το δείγμα τιμών της μεταβλητής είναι ομοιογενές
- ε.** Αν η καμπύλη συχνοτήτων για το χαρακτηριστικό που εξετάζουμε είναι κανονική, τότε το εύρος ισούται περίπου με έξι τυπικές αποκλίσεις ($R \approx 6\sigma$) Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Η επίδοση ενός μαθητή σε πέντε μαθήματα είναι: 12, 10, 16, 18, 14.

- α.** Να βρείτε τη μέση επίδοση Μονάδες 10
- β.** Αν τα μαθήματα είχαν αντίστοιχα συντελεστές στάθμισης 2, 3, 1, 1 και 3 ποια θα ήταν η μέση επίδοση Μονάδες 15

Θέμα 3^ο

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων:

- α.** $f(x) = x^4 + 3x^2$
- β.** $f(x) = 8x^3 - \eta\mu x + 5$
- γ.** $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$
- δ.** $f(x) = e^{3x}$
- ε.** $f(x) = e^x \cdot \ln x$ Μονάδες 25

Θέμα 4^ο

Στο παρακάτω πίνακα δίνεται η κατανομή συχνοτήτων μιας μεταβλητής x ενός δείγματος:

Τιμές x_i	Συχνότητα v_i
8	9
14	15
16	6

- α.** Να βρείτε το μέγεθος n του δείγματος Μονάδες 10
- β.** Να συμπληρώσετε τον πίνακα με τις στήλες των $f_i, f_i \%, N_i, F_i, F_i \%$. Μονάδες 15

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x) = x$, είναι $f'(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 10

B. Για καθεμιά από τις επόμενες προτάσεις να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της και δίπλα την ένδειξη (Σ), αν αυτή είναι σωστή, ή την ένδειξη (Λ), αν αυτή είναι λανθασμένη.

α. Έστω f, g πραγματικές συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , που είναι παραγωγίσιμες σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Τότε ισχύει:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

β. Η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

γ. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $(\eta \mu x)' = -\sigma \nu x$.

δ. Δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$

ε. Έστω x_1, x_2, \dots, x_k οι τιμές μιας μεταβλητής X, που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μέγθους n , $k \leq n$. Για τις αντίστοιχες (απόλυτες) συχνότητες ισχύει: $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$.

Μονάδες 3×5

Θέμα 2^ο

Στο σύλλογο καθηγητών ενός λυκείου το 55% είναι γυναίκες, το 40% των καθηγητών είναι φιλόλογοι και το 30% είναι γυναίκες φιλόλογοι. Επιλέγουμε τυχαία έναν καθηγητή για να εκπροσωπήσει το σύλλογο σε κάποια επιτροπή.

Να υπολογίσετε τις πιθανότητες ο καθηγητής να είναι:

- | | |
|------------------------------|-----------|
| α. γυναίκα ή φιλόλογος | Μονάδες 5 |
| β. γυναίκα και όχι φιλόλογος | Μονάδες 5 |
| γ. άνδρας και φιλόλογος | Μονάδες 7 |
| δ. άνδρας ή φιλόλογος. | Μονάδες 8 |

Θέμα 3^ο

Έστω $a \in \mathbb{R}$. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - ax - 8$ με πεδίο ορισμού το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

A. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$, αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(1, -2)$. Μονάδες 5

B. Αν $a = -4$,

α. να βρεθεί η παράγωγος $f'(x)$. Μονάδες 5

β. να βρεθεί το $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει ακρότατο. Να βρεθεί αν το ακρότατο είναι μέγιστο ή ελάχιστο. Μονάδες 5

γ. να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $A(1, -2)$. Μονάδες 5

Θέμα 4^ο

Ο χρόνος αναμονής των πολιτών μέχρι να εξυπηρετηθούν σε μια δημόσια υπηρεσία ακολουθεί κανονική κατανομή, με μέση τιμή 5 λεπτά και τυπική απόκλιση 1 λεπτό.

A. Να βρείτε πόσο είναι περίπου το ποσοστό των πολιτών που εξυπηρετούνται σε χρόνο

β. από 4 έως 6 λεπτά.

α. από 3 έως 6 λεπτά.

B. Να βρείτε τη διάμεσο και το εύρος της κατανομής του χρόνου αναμονής των πολιτών.

Γ. Να υπολογίσετε το συντελεστή μεταβολής της κατανομής του χρόνου αναμονής.

Μονάδες $10 + 10 + 5$

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για δυο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad \text{Μονάδες 10}$$

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη

α. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ Μονάδες 5

β. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$ Μονάδες 5

γ. Ισχύει $P(A') = 1 - P(A)$ όπου A και A' είναι συμπληρωματικά ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω Μονάδες 5

Θέμα 2^ο

Οι τιμές σε € (ευρώ) 10 προϊόντων ενός «super market» είναι: 4, 10, 6, 11, 12, 7, 5, 3, 8, 14

Να βρεθούν:

α. Η μέση τιμή \bar{x} β. Η διάμεσος δ γ. Το εύρος R δ. Η διακύμανση $s^2 = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2$
Μονάδες 7 + 5 + 5 + 8

Θέμα 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω δίνεται ότι:

$$P(A) = 50\% \quad P(B') = 40\% \quad \text{και} \quad P(A \cap B) = 30\% \quad \text{Να βρεθούν:}$$

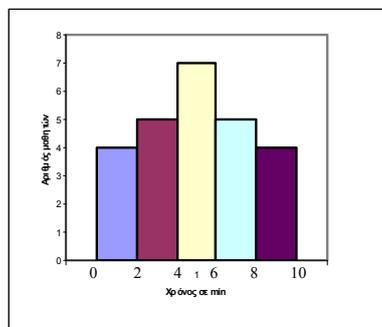
α. Η πιθανότητα P(B) β. Η πιθανότητα P(A ∪ B) γ. Η πιθανότητα P(A - B)

Μονάδες 7 + 8 + 10

Θέμα 4^ο

Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι χρόνοι σε λεπτά που χρειάζονται οι 25 μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου για να πάνε κάποιο πρωί από το σπίτι τους μέχρι το σχολείο

α. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:



	Κέντρο κλάσης x_i	Συχνότητα v_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	N_i	$x_i v_i$
[0, 2)	1				
[2, 4)	3				
[4, 6)	5				
[6, 8)	7				
[8, 10)	9				
ΣΥΝΟΛΟ					

β. Να βρεθεί η μέση τιμή

γ. Πόσοι μαθητές έκαναν περισσότερο από 6 λεπτά για να πάνε από το σπίτι στο σχολείο

δ. Τι ποσοστό μαθητών χρειάστηκαν λιγότερο από 4 λεπτά για να πάνε από το σπίτι στο σχολείο;

Μονάδες 8 + 7 + 5 + 5

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1°

- A.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Μονάδες 10
- B.** Να εξετάσετε τις παρακάτω προτάσεις. Αν κατά τη γνώμη σας είναι σωστές σημειώστε το 'Σ' αλλιώς το 'Λ'.
- α.** Αν f συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, τότε $f(2) = 5$
- β.** Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x
- γ.** Η ομάδα αίματος είναι ποσοτική διακριτή μεταβλητή.
- δ.** Αν $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$, τότε το σημείο (a, ℓ) βρίσκεται πάνω στην καμπύλη της f
- ε.** Αν Ω είναι δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, τότε $P(\Omega) = 1$ Μονάδες 15

Θέμα 2°

- A.** Να υπολογίσετε τα όρια
- α.** $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x^2 - x + 1)$, **β.** $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x^2 - 16)(x^2 - 5x + 6)}{x^2 - 4x}$ Μονάδες 5 + 7
- B.** Να βρείτε την παράγωγο καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις
- α.** $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 5$ **β.** $f(x) = \frac{1 + \eta\mu x}{1 - \sigma\upsilon\nu x}$ Μονάδες 5 + 8

Θέμα 3°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$

- A.** Να βρείτε την παράγωγο $f'(x)$
- B.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Γ.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$. Μονάδες 5 + 10 + 10

Θέμα 4°

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4\sqrt{x+2} - 8}{x^2 - 4}$ και A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης με $P(A \cup B) = 0,6$ και $P(A) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

- α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f(x).
- β.** Να βρείτε η P(A)
- γ.** Αν $P(A) = 0,25$, τότε να αποδείξετε ότι η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B είναι $\frac{7}{20}$.
- δ.** Να δείξετε ότι $P(B) \geq \frac{7}{20}$ Μονάδες 5 + 6 + 7 + 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Δώστε τον ορισμό της συχνότητας n_i μιας τιμής x_i , $0 \leq i \leq n$ ενός δείγματος μεγέθους n .

Μονάδες 5

B. Αν Ω δειγματικός χώρος και A ενδεχόμενο του Ω και A' το συμπληρωματικό του A ως προς Ω να δείξετε $P(A') = 1 - P(A)$

Μονάδες 10

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως σωστές ή λάθος,

α. $P(A) = \frac{\text{Σύνολο ευνοϊκών περιπτώσεων}}{\text{Σύνολο δυνατών περιπτώσεων}} = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$

β. $P(A') = 1 + P(A)$

γ. Αν \bar{x} μέση τιμή και t_1, t_2, \dots, t_n οι τιμές των παρατηρήσεων μιας μεταβλητής X τότε

$$\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + \dots + t_n}{n}$$

δ. Αν $A \subseteq B$ τότε $P(A) > P(B)$

ε. Αν f_i η σχετική συχνότητα και n_i η συχνότητα μιας τιμής x_i ενός δείγματος με n

παρατηρήσεις τότε $f_i = \frac{n_i}{n}$

Μονάδες 10

Θέμα 2^ο

Ένας μαθητής σε πέντε μαθήματα έγραψε τους παρακάτω βαθμούς. 12, 13, 14, 15, 16

α. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών που έγραψε

Μονάδες 13

β. Να βρείτε τη διάμεσο των βαθμών

Μονάδες 12

Θέμα 3^ο

Ένα κουτί περιέχει μπάλες, πέντε κόκκινες, τέσσερις πράσινες και τρεις κίτρινες. Επιλέγουμε τυχαία μια μπάλα. Να βρείτε την πιθανότητα:

α. Η μπάλα να είναι κόκκινη

Μονάδες 13

β. Η μπάλα να είναι πράσινη

Μονάδες 12

Θέμα 4^ο

Οι παρακάτω αριθμοί παρουσιάζουν τις ενδείξεις ενός ζαριού, το οποίο ρίξαμε είκοσι φορές

2 3 6 5 3 1 2 4 5 6 6 2 3 3 4 1 2 4 3 4

A. Να συμπληρώσετε τον πίνακα συχνοτήτων

x_i	n_i
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Μονάδες 13

B. Από τον πίνακα να βρείτε πόσες ρίψεις έχουν ένδειξη

α. μεγαλύτερη του 3

Μονάδες 4

β. μικρότερο ή ίσο του 4

Μονάδες 4

γ. μεγαλύτερο του 3 και μικρότερο του 6

Μονάδες 4

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$ είναι $f'(x) = 0$
Μονάδες 9

B. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές ή λάθος;

α. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sin x$. Είναι $(\sin x)' = \eta \mu x$

β. Η μέση τιμή είναι μέτρο θέσης

γ. Αν ένα δείγμα έχει $CV > 10\%$ τότε είναι ομοιογενές

δ. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f είναι ο παράγωγος αριθμός της f στο x_0 .
Μονάδες 16

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x-2}{x^2-3}$

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
Μονάδες 9

β. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της f ως προς x , όταν $x = 2$
Μονάδες 9

γ. Να βρείτε την εφαπτομένη στην καμπύλη της f στο σημείο της που έχει τεταγμένη $\frac{1}{2}$

Μονάδες 7

Θέμα 3^ο

Το 50 % των παρατηρήσεων μιας κανονικής κατανομής είναι πάνω από 12 και η διασπορά αυτών είναι 9. Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που έχουν τιμή:

α. κάτω από 9
Μονάδες 8

β. τουλάχιστον 18
Μονάδες 8

γ. μεταξύ 9 και 18
Μονάδες 9

Θέμα 4^ο

Σε μια επαρχιακή πόλη με 20000 κατοίκους κυκλοφορούν δύο τοπικές εφημερίδες η A και η B. Μια μέρα αγόρασαν 2000 την εφημερίδα A, 1500 την εφημερίδα B και 250 και τις δύο εφημερίδες. Επιλέγουμε τυχαία ένα κάτοικο. Να βρείτε την πιθανότητα να έχει αγοράσει:

α. μία τουλάχιστον εφημερίδα
Μονάδες 6

β. μία το πολύ εφημερίδα
Μονάδες 6

γ. μόνο την εφημερίδα A
Μονάδες 6

δ. μόνο μία εφημερίδα
Μονάδες 7

ΘΕΜΑΤΑ

Θέμα 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα A και B ισχύει: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ Μονάδες 13

B. Να γράψετε στην κόλα σας τον αριθμό της ερώτησης και να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως «Σωστό» ή «Λάθος»

α. Αν $f'(x_0) = 0$, τότε η f παρουσιάζει στο x_0 ακρότατο

β. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g'(x)$

γ. Κάθε υποσύνολο ενός δειγματικού χώρου Ω ονομάζεται ενδεχόμενο

δ. Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω ισχύει:

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

ε. Για κάθε ενδεχόμενο A ισχύει $0 \leq P(A) \leq 100$

στ. Για το δειγματικό χώρο Ω ισχύει $P(\Omega) = 1$

Θέμα 2^ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 9$

A. Να βρεθεί η παράγωγός της $f'(x)$ Μονάδες 5

B. Να εξεταστεί η συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία Μονάδες 10

Γ. Να βρεθούν τα ακρότατα της f Μονάδες 10

Θέμα 3^ο

Για τα ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω είναι γνωστό ότι:

$$P(A) = 0,5$$

$$P(B) = 0,6 \text{ και}$$

$$P(A \cap B) = 0,2$$

A. Να βρείτε την P(B) Μονάδες 10

B. Να βρείτε την $P(A \cup B)$ Μονάδες 15

Θέμα 4^ο

Δίνονται τα σύνολα: $\Omega = \{\omega \in \mathbb{N} \mid 15 \leq \omega \leq 30\}$. $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 2\}$ και

$B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \text{ πολλαπλάσιο του } 5\}$. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα στοιχείο του Ω , να βρείτε τις

πιθανότητες:

α. να ανήκει στο A Μονάδες 7

β. να μην ανήκει στο B Μονάδες 8

γ. να ανήκει στο A ή στο B Μονάδες 10

