

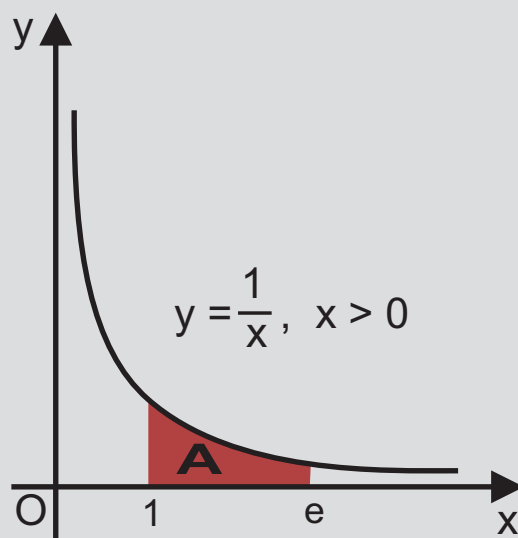
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ

# ΕΚΦΡΑΣΗ

ΜΑΡΤΙΟΣ 1997  
ΤΕΥΧΟΣ 1  
ΔΡΧ. 1.000

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ  
ΤΟΥ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ ΤΡΙΚΑΛΩΝ ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.

- Η άσκηση και το πρόβλημα.
- Αξιοσημείωτες Αλγεβρικές  
Ανισοταυτότητες και Εφαρμογές τους.
- Ένα μάθημα Γεωμετρίας με τη  
μορφή της καθοδηγούμενης  
αυτενέργειας (ερωτοαποκρίσεις).
- Παραμετρικές εξισώσεις γραμμής.
- Όριο συνάρτησης με τη βοήθεια  
ανισοτήτων.
- Η έννοια της εφαπτομένης γραφικής  
παράστασης συνάρτησης.
- Μιγαδική έκφραση της εξίσωσης  
μιας ευθείας γραμμής.
- Το Θεώρημα Μέσης Τιμής και  
οι εφαρμογές του.
- Απόδειξη ανισοτήτων ... με ισότητες.
- Οι συναρτήσεις :  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$   
και μία προσέγγιση της  $\ln x$  ως εμβαδού.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ"  
Χ. ΒΑΦΕΙΑΔΗΣ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ



**ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ : μαθηματική ΕΚΦΡΑΣΗ**

ετήσια έκδοση μαθηματικών  
του Παραρτήματος Τρικάλων  
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.)

**1 1997**

Γ' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι μαθηματικοί :

**Δήμος Γιώργος Δ.  
Ζανταρίδης Νίκος  
Μάντζιος Άρης  
Μητσιάδης Γιώργος  
Μήτσιος Γιώργος  
Μπάλιας Στέφανος  
Μπουνάκης Δημήτρης  
Ντρίζος Δημήτρης  
Πατήλας Χρήστος Δ.**

Υπεύθυνος της έκδοσης του 1ου τεύχους  
(από τη Δ.Ε. του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε.):

**Ντρίζος Δημήτρης**

Εκδότης : **Βαφειάδης Χάρης**

Διεύθυνση του περιοδικού :

Καποδιστριαύ 1 (Πλατεία  
Παλαιού Δεσποτικού)  
42 100, Τρίκαλα  
Τηλ.-FAX : (0431) 75950

Το περιοδικό διατίθεται από τα βιβλιοπωλεία.

Τιμή τεύχους : 1.000 δρχ.

Ηλεκτρονική στοιχειοθεσία, σχήματα, σελιδοποίηση :

**Ρίζος Γιώργος**  
Παλαιολόγου 73,  
49 100, Κέρκυρα  
Τηλ. (0661) 33243

Κεντρική διάθεση : **Βιβλιοπωλείο**

**"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ"**  
**Χάρης Βαφειάδης**  
Δέλιου 4, 54 621, Θεσσαλονίκη  
Τηλ. (031) 263163,  
FAX (031) 240595



**Π Ε Ρ Ι Ε Χ Ο Μ Ε Ν Α**

**3** Σημείωμα της μαθηματικής ΕΚΦΡΑΣΗΣ

**5** Η άσκηση και το πρόβλημα.

**Δημήτρης Ντρίζος**

**12** Αξιοσημείωτες Αλγεβρικές Ανισοτήτες και Εφαρμογές τους.

**Δημήτρης Μπουνάκης,  
Ηράκλειο Κορίθης**

**22** Ένα μάθημα Γεωμετρίας με τη μορφή της καθοδηγούμενης αυτενέργειας (ερωτοαποκρίσεις).

**Άρης Μάντζιος**

**30** Παραμετρικές εξισώσεις γραμμής

**Γιώργος Μητσιάδης**

**42** Όριο συνάρτησης με τη βοήθεια ανισοτήτων.

**Νίκος Ζανταρίδης, Έδεσσα**

**51** Η έννοια της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης.

**Στέφανος Μπάλιας**

**60** Μιγαδική έκφραση της εξίσωσης μιας ευθείας γραμμής.

**Χρήστος Δ. Πατήλας**

**66** Το Θεώρημα Μέσης Τιμής και οι εφαρμογές του.

**Γιώργος Μήτσιος**

**81** Απόδειξη ανισοτήτων ... με ισότητες.

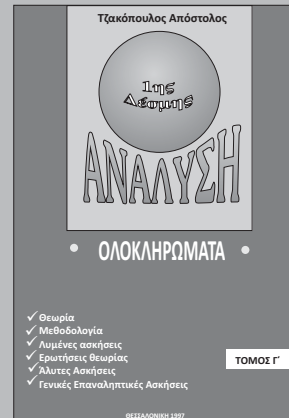
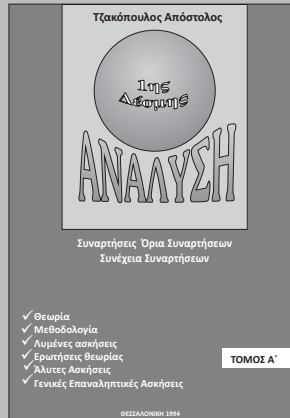
**Γιώργος Δ. Δήμος**

**89** Οι συναρτήσεις :  $y = e^x$ ,  $y = \ln x$  και μία προσέγγιση της  $\ln x$  ως εμβαδού.

**Δημήτρης Ντρίζος**

# Τζακόπουλος Απόστολος

## τρίτομη Ανάλυση ...



... για τον μαθητή

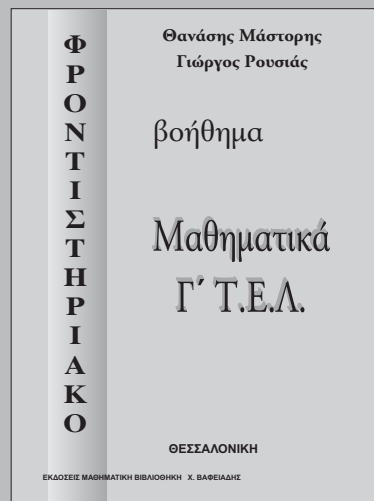
κέντρικη διάθεση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χάρης Βαφειάδης

Θ. Μάστορης  
Γ. Ρουσιάς

φροντιστηριακό βοήθημα  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' Τ.Ε.Λ.

το αριότερο βοήθημα για τις  
εισαγωγικές εξετάσεις που για  
πρώτη φορά θα δώσουν οι  
τελειόφοιτοι των Τ.Ε.Λ.



εκδόσεις - κέντρικη διάθεση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χάρης Βαφειάδης

## Σημείωμα της μαθηματικής ΕΚΦΡΑΣΗΣ

Φίλε αναγνώστη,

Κρατάς στα χέρια σου το 1<sup>ο</sup> τεύχος ενός περιοδικού - θα λέγαμε την πρώτη προσπάθεια έντυπης συλλογικής έκφρασης μαθηματικών του Παραρτήματος Τριγάλων της "Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας" και άλλων φίλων συνεργατών.

Η ιδέα για το φτιάξιμο του περιοδικού αυτού δεν είναι χτεσινή. Κατά διαστήματα προηγήθηκαν αρκετές συζητήσεις μεταξύ φίλων - μελών του Παραρτήματός μας και επισημάνθηκαν οι ουσιαστικές δυσκολίες μια τέτοιας τολμηρής πρωτοβουλίας. Η διαμόρφωση και ο συντονισμός κάθε φοράς της ύλης του, το γράψιμο καλών άρθρων και η έλλειψη μιας σταθερής ομάδας συνεργατών ήταν πράγματι σημαντικά προβλήματα.

Στόχος μας είναι η εξέλιξη αυτής της πρώτης και συγχρόνως πειραματικής μας προσπάθειας να οδηγήσει σε μια σταθερή περιοδική έκδοση με ενδιαφέροντα θέματα γύρω από τα Μαθηματικά και τα νέα ρεύματα που αναπτύσσονται στον τομέα της Μαθηματικής Παιδείας και Εκπαίδευσης.

Μέσα από τις στήλες αυτού του περιοδικού επιδιώκουμε με ανιδιοτέλεια τη δημιουργία ενός βήματος για όλους τους μαθηματικούς που θα έχουν να καταθέσουν κάθε φορά μια εργασία τους, μια καινούρια άποψη, έναν προβληματισμό τους, μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση. Η ανάλυση Μαθηματικών εννοιών, οι διδακτικές προσεγγίσεις κάποιων ενοτήτων και οι εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες, επιθυμούμε να είναι στο επίκεντρο του περιοδικού.

Θα είμαστε επίσης ανοιχτοί ως περιοδικό και σε εργασίες μαθητών με το ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Όμως, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε και το ρόλο των κάθε λογής εξετάσεων που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές. Θα είμαστε κοντά στη δικαιολογημένη αγωνία τους για την επιτυχία τους σ' αυτές. Έτσι η άσκηση και το πρόβλημα θα έχουν το δικό τους σημαντικό χώρο.

Ακούγεται τελευταία από αρκετούς αναγνώστες, πως όλα πλέον είναι αντιγραφές και βελτιωμένες επαναδιατυπώσεις θεμάτων και ιδεών, που έχουν δει και ξαναδεί εδώ και κει. Έτσι πράγματι είναι. Αυτό αποτελεί κοινή διαπίστωση. Βέβαια υπάρχουν και εξαιρέσεις και αλίμονο αν δεν υπήρχαν. Γεγονός είναι πάντως ότι βαρεθήκαμε τα ίδια και τα ίδια. Αναζητούμε σε κάθε βιβλίο ή περιοδικό εκείνη την καινούρια ιδέα που πάει πέρα από τα τετριμμένα και χλιοειπωμένα. Στοχεύουμε λοιπόν ως περιοδικό να κινηθούμε και προς την κατεύθυνση τέτοιων αναζητήσεων. Από την άλλη όμως μεριά, δεν μπορεί να απορρίψει κανείς και κάτι το κλασσικό και συγχρόνως όμορφο, απλά επειδή κάπου έχει ξαναδημοσιευτεί. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα παραθέτουμε οπωσδήποτε βιβλιογραφία, κάτι που όχι μόνο συνιστά εντιμότητα και σεβασμό στον όποιον αναγνώστη, αλλά ίσως κάποιες φορές τον διευκολύνει κιόλας.

Η δημιουργία του περιοδικού μας και κυρίως η συνέχιση της έκδοσής του με μόνιμες στήλες και συνεργάτες έχουν ανάγκη από τη δική σου στήριξη και τη δική σου συμπαράσταση. Θέλουμε να δείτε με κατανόηση και καλοπροαίρετη κριτική αυτή μας την προσπάθεια. Άλλωστε το κάθε τι σήμερα είναι επιτακτική ανάγκη να κρίνεται στην ουσία του, όμως χωρίς μικρότητες, γιατί τότε μόνο το προχώρημά μας μπορεί να γίνει πάνω σε πιο στέρεες βάσεις.

Τέλος, από τη θέση αυτή επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε θερμά :

Τις εκδόσεις "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ" του συνάδελφου μαθηματικού Χάρη Βαφειάδη, που ανέλαβαν το οικονομικό κόστος της έκδοσης αυτού του τεύχους.

Και τον συνάδελφο Γιώργο Ρίζο, που με ιδιαίτερο ζήλο συνέβαλλε στην άρτια εμφάνιση του περιοδικού μας, επιμελήθηκε τη στοιχειοθεσία, τα σχήματα και την τελική μορφοποίηση όλων των κειμένων του περιοδικού μας.

**ΔΙΑΔΩΣΤΕ ΤΗ**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ**

# Η ΑΣΚΗΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μία προσέγγιση  
στην αντιμετώπιση  
απρόβλεπτων θεμάτων.

*Δημήτρης Ντρούζος*

**Π**ολλές φορές ακούμε από κα-  
λούς, κυρίως, μαθητές την  
έκφραση :

«Τις **ασκήσεις** τις αντιμετωπίζω  
πιο εύκολα· τα **προβλήματα** όμως με  
δυσκολεύουν». Δεν θα επιχειρήσου-  
με εδώ να δώσουμε αυστηρούς τυπι-  
κούς ορισμούς στις έννοιες άσκηση  
και πρόβλημα. Η πολυπλοκότητα  
και η ποικιλομορφία αυτών των εν-  
νοιών κάνει αρκετά δύσκολη τη δια-  
τύπωση απόλυτων ορισμών τους.  
Άλλωστε, πιστεύουμε πως μια φορ-  
μαλιστική προσέγγισή τους δε θα  
βοηθούσε και πολύ στη διερεύνηση  
κάποιων δομικών χαρακτηριστικών  
τους στοιχείων.

Ο μαθητής τις περισσότερες φο-  
ρές που καλείται να αντιμετωπίσει  
ένα **μαθηματικό θέμα**, διαισθητικά  
και με ευδιάκριτους γι' αυτόν όρους,  
μπορεί και κάνει το διαχωρισμό, αν  
το θέμα αποτελεί άσκηση ή πρόβλη-  
μα. Έτσι λοιπόν, χαρακτηρίζει ως  
ασκήσεις τα θέματα στα οποία του  
ζητείται για παράδειγμα η επίλυση  
μιας συγκεκριμένης απλής εξίσωσης  
ή ανίσωσης. Η απόδειξη κάποιων  
σχέσεων, όπως μιας ισότητας ή μιας  
ανισότητας, όταν του δίνουν την τυ-  
πική τους μορφή, συνιστούν ασκή-  
σεις. Θέματα επίσης στα οποία κα-  
λείται να υπολογίσει αποστάσεις,  
εμβαδά και όγκους, τα χαρακτηρίζει  
πάλι ως ασκήσεις. Το ίδιο και τα  
θέματα κάποιων απλών γεωμετρι-  
κών κατασκευών με τη χρήση οργά-  
νων που δεν απαιτούν συνήθως τη  
χάραξη βοηθητικών γραμμών.

Ποια θέματα χαρακτηρίζει ως  
προβλήματα ;

Εκείνα στα οποία περιγράφεται  
συνήθως μια πραγματική κατάσταση  
με στοιχεία και όρους παρμένα τις  
περισσότερες φορές από τον φυσικό  
κόσμο που μας περιβάλλει, τον μα-  
κρόκοσμο και τον μικρόκοσμο.

Επίσης θέματα που η σύνθεση τους βασίζεται σε στοιχεία από τη ζωή και την εμπειρία μας.

Ως προβλήματα χαρακτηρίζει επίσης κάποιες διανοητικές κατασκευές με μαθηματική δομή, όπου μετά από την παράθεση επαρκών πληροφοριών (δεδομένα) του ζητείται ο προσδιορισμός κάποιων αγνώστων στοιχείων. Επισημαίνουμε ότι η έννοια πρόβλημα σε τούτο το άρθρο μας ενδιαφέρει, όταν οριοθετείται σύμφωνα με τα προηγούμενα: και μπορούμε να το προσεγγίσουμε και να το επιλύσουμε με μαθηματικούς όρους. Παρενθετικά, αναφέρουμε ότι η φυσική θέση του προβλήματος είναι πριν από την ανάπτυξη της Θεωρίας, αυτό δε που ακολουθεί την ανάπτυξη της Θεωρίας είναι η άσκηση.

Για την επίλυση ενός προβλήματος, το κυριότερο και συγχρόνως το πιο σοβαρό μέλημα του μαθητή – λύτη είναι κατ' αρχήν η **μοντελοποίηση (μαθηματικοποίηση)** του προβλήματος, η δημιουργία δηλαδή

μιας **συσχέτισης** φτιαγμένης με τυπικά μαθηματικά σύμβολα που να αποδίδει τη διαδικασία που περιγράφεται λεκτικά στο πρόβλημα. Τη συσχέτιση αυτή, που μπορεί να είναι για παράδειγμα μια τυπική εξίσωση ή μια συνάρτηση ανάμεσα στα διάφορα μεγέθη του προβλήματος, τη λέμε **μαθηματικό μοντέλο** του προβλήματος. Το στάδιο αυτό του περάσματος από τη λεκτική απόδοση στο αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο είναι τις περισσότερες φορές μια

αρκετά επίπονη εργασία για το μαθητή. Τονίζουμε εδώ ότι η διαδικασία της μοντελοποίησης ξεκινά μετά από την πλήρη κατανόηση του προβλήματος σε όλες τις λεπτομέρειες του από τον υποψήφιο λύτη.

*Η φυσική θέση του προβλήματος είναι πριν από την ανάπτυξη της Θεωρίας, αυτό δε που ακολουθεί την ανάπτυξη της Θεωρίας είναι η άσκηση.*

### Είδη ασκήσεων και προβλημάτων

Γύρω από τις έννοιες άσκηση και πρόβλημα έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια μια αρκετά ενδιαφέρουσα βιβλιογραφία. Συναντά κανείς εκεί μια κατηγοριοποίηση

(ομαδοποίηση σύμφωνα με κάποια κοινά χαρακτηριστικά) και στις ασκήσεις και στα προβλήματα. Έχουμε τη γνώμη πως η ένταξη μιας άσκησης ή ενός προβλήματος σε μια κατηγορία Α' και όχι σε μια άλλη Β' δεν μπορεί να γίνει πάντα με έναν απόλυτο τρόπο.

Αρκετές φορές τα όρια ανάμεσα σε κάποιες καθαρά φορμαλιστικές κατηγορίες δεν είναι τόσο σαφή και ευδιάκριτα. Έτσι ένας τέτοιος πολυσχιδής διαχωρισμός τους κινείται καθαρά (και μόνο) στο θεωρητικό χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Η προσπάθεια τώρα ορισμένων για διαρκή κατακερματισμό και κατηγοριοποίηση, ακόμα και σε θέματα που αφορούν το ίδιο γνωστικό αντικείμενο, με σκοπό τη δημιουργία «μεθοδολογιών» επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων, τελικά δεν οδηγεί, πιστεύουμε, σε ασφαλή και θετικά αποτελέσματα για τους μαθητές - υποψήφιους λύτες. Τα Μαθηματικά δεν είναι σε καμία περίπτωση –ούτε θα μπορούσαν να είναι– μόνο ένα σύνολο από διάφορες τεχνικές επίλυσης.

Για το λόγο αυτό **θα επιχειρήσουμε παρακάτω την περιγραφή μόνο δύο θεμελιωδών ομάδων για τις ασκήσεις και τα προβλήματα**, που θεωρούμε ότι η ύπαρξή τους είναι αυτονόητη από κάθε μαθητή.

Κατ' αρχήν υπάρχουν ασκήσεις και προβλήματα που ένας σχετικά καλός μαθητής ακολουθώντας έναν **αλγόριθμο**, δηλαδή μια γνωστή του από πριν διαδικασία, καταλήγει – εύκολα ή τέλος πάντων χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία– στη λύση του θέματος. Πρόκειται, συνήθως, για θέματα ρουτίνας, για θέματα δηλαδή εφαρμογής τύπων ή θεωρημάτων ή συνδυασμού ορισμών και κάποιων μαθηματικών προτάσεων που τις περισσότερες φορές, το τονίζουμε ξανά, ο καλός μαθητής τα αντιμετωπίζει με σχετική ευκολία και αυτό, γιατί έχει ξανά αντιμετωπίσει παρόμοια θέματα. Έχει έτσι μια μέθοδο και ακολουθεί κάποια συγκεκριμένα βήματα.

Τι γίνεται όμως, όταν διαβάζοντας και ξαναδιαβάζοντας την άσκηση ή το πρόβλημα, διαπιστώνει ότι βρίσκεται μπροστά σε κάτι «τελείως καινούριο» ; Όταν δε του θυμίζει τίποτα, δε μοιάζει καθόλου με



άλλα θέματα που έχει μέχρι τώρα αντιμετωπίσει ;

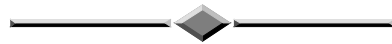
Αναρωπιέται τότε : «Από που πρέπει να ξεκινήσω ; », «σε ποιες προτάσεις, σε ποια θεωρήματα ακουμπάει το θέμα αυτό ; ».

Αυτό το θέμα είναι μια «**απρόβλεπτη κατάσταση**»· ας πούμε ένα «**πρωτότυπο**» πρόβλημα.

Εδώ ο μαθητής καλείται να κάνει τις προσωπικές του παρεμβάσεις και να επινοήσει τη στρατηγική που θα τον οδηγήσει στη διαμόρφωση του κατάλληλου συλλογισμού ή στη σύλληψη της ιδέας εκείνης που θα τον πάει –τελικά– στη λύση. Μπροστά σε τέτοια απρόβλεπτα προβλήματα ο μαθητής κινητοποιεί στην κυριολεξία το «οπλοστάσιο» των γνώσεών του. Διαβάζει και ξαναδιαβάζει προσεκτικά το θέμα του· πρώτα φράση – φράση και έπειτα στην ολότητά του. Μπαίνει μέσα σε αυτό και επισημαίνει τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**· το κατανοεί πλήρως. Έπειτα, μοντελοποιεί το θέμα του, αν πρόκειται για πρόβλημα· φέρνει στο μυαλό του θεωρήματα και προτάσεις και κάνει συνδυασμούς, που πιστεύει ότι θα τον οδηγήσουν ολοένα σε κάτι πιο γνωστό·

χωρίζει το πρόβλημά του σε άλλα επιμέρους μικρότερα προβλήματα και προσπαθεί να τ' αντιμετωπίσει ένα – ένα· του έρχονται ιδέες, τις δοκιμάζει και προχωρά βήμα – βήμα. Για την περίπτωση, η **δοκιμή** είναι ένα από τα σπουδαιότερα όπλα του μαθητή – λύτη. Βλέπετε, δεν υπάρχει εδώ αλγόριθμος, οπότε οι δοκιμές του είναι τελείως απαραίτητες.

Στην αγωνιώδη και επίπονη αυτή πορεία αναζήτησης της λύσης ο μαθητής –δηλαδή το μυαλό του– περνά από διάφορες φάσεις. Μερικές φορές για παράδειγμα δεν του έρχονται άλλες ιδέες, πέρα από αυτές που ήδη δοκίμασε προς στιγμής αναποτελεσματικά. Ή, από την άλλη μεριά, έχει σημειώσει αρκετές ιδέες του χωρίς να μπορεί να εντοπίσει την κατάλληλη (την κρίσιμη) για τη λύση. Μερικές φορές προχωρώντας πάνω σε μια «καινούρια» ιδέα βλέπει να ανακινώνεται γύρω από τα ίδια. Οι δοκιμές του δεν έχουν αποτέλεσμα, φέρνει διαρκώς γύρω από τις ίδιες ιδέες και τελικά απογοητεύεται.



**Εδώ προτείνουμε τα εξής  
στο μαθητή – λύτη :**

**Α**ν το θέμα ανήκει σε διαγωνισμό με συγκεκριμένη χρονική διάρκεια, να σταματήσει να ασχολείται πλέον με αυτό και να καταπιαστεί με άλλα θέματα του διαγωνισμού που τα βρίσκει πιο εύκολα και προς το τέλος να ξαναγυρίσει πάλι στο θέμα που τόσο έντονα τον απασχόλησε· να διαβάσει πάλι από την αρχή, πολύ προσεκτικά και χωρίς ένταση τούτη τη φορά, την εκφώνηση του θέματος. Πιθανόν, τώρα, να δει κάτι που προηγούμενα δεν είχε παρατηρήσει· κάτι που δεν του συνέδεε κατάλληλα με τα άλλα δεδομένα· να εντοπίσει εκείνη τη φράση κλειδί πίσω από την οποία βρίσκεται **η κρίσιμη ιδέα για τη λύση**. Κάποτε αυτές οι ιδέες έρχονται τελείως ξαφνικά (ενορατική σύλληψη). Γρήγορα τότε διατυπώνει τους συλλογισμούς που δίνουν με πληρότητα τη λύση στο θέμα. Η αίσθηση της ανακάλυψης και η χαρά της λύσης, που με τόσο πάθος αναζήτησε, είναι στο σημείο αυτό απερίγραπτη.

Θέλουμε τώρα να επισημάνουμε πως ένα πρόβλημα ή μία άσκηση που αποτελεί απρόβλεπτη κατάστα-

ση για έναν Α' λύτη, ίσως το ίδιο πρόβλημα να αποτελεί θέμα ρουτίνας για ένα Β' λύτη. Αυτό σχετίζεται με την ηλικία και τη προσωπικότητα του λύτη, την εμπειρία του, τη διορατικότητα, τη γενικότερη κατάρτισή του και όχι μόνο.

Η ενασχόληση – προπόνηση με πολλά απρόβλεπτα προβλήματα οδηγεί σε μια εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους θέματα. Ανοίγονται έτσι νέοι ορίζοντες στη σκέψη· το μυαλό του λύτη πηγαίνει ευκολότερα στα απρόσμενα σημεία – κλειδιά του προβλήματος και βρίσκει έτσι διεξόδους εκεί που ο αμύητος λύτης σηκώνει συνήθως τα χέρια ψηλά. Στο σημείο αυτό έρχεται η ερώτηση : «Δεν είναι αρακετή η ιδιαίτερη κλίση ενός παιδιού προς τα Μαθηματικά για να αντιμετωπίζει επιτυχώς τέτοια προβλήματα ;». Απαντάμε πως μάλλον όχι· χρειάζεται και η προπόνηση για την οποία προηγούμενος κάναμε λόγο.



**Μερικές ακόμα προτάσεις**

**Κ**ατ' αρχήν, η εξοικείωση των μαθητών με τέτοια θέματα θα πρέπει να γίνεται από μικρή ηλικία.

Επιπλέον ο εμπλουτισμός του σχολικού προγράμματος με κατάλληλα προβλήματα που κινούν το ενδιαφέρον των μαθητών για δημιουργική αναζήτηση, συνιστά ένα σπουδαίο όρο για την εξοικείωση αυτή. Επίσης **η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων** πρέπει να ενταχτεί στα Προγράμματα των Μαθηματικών και η παρουσίαση από τους διδάσκοντες προβλημάτων – απρόβλεπτων καταστάσεων να γίνεται συχνά, με κατάλληλο όμως τρόπο και σε αρμονία πάντα με το υπόλοιπο μέρος της γνωστής μας συμβατικής διδασκαλίας. Τέλος, η οργάνωση και λειτουργία σοβαρών σεμιναριακών προγραμμάτων για τους διδάσκοντες με θέμα τη διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων κρίνεται ως απολύτως απαραίτητη.



### **Πρωτότυπα προβλήματα και μέτριοι μαθητές**

**Α**πό πολλούς συναδέλφους μαθηματικούς τίθεται το εύλογο ερώτημα : Σε διαγωνισμούς που πε-

ριλαμβάνουν και πρωτότυπα θέματα (όπως αυτά περιγράφηκαν και αναλύθηκαν προηγουμένως), υπάρχει λόγος να παίρνουν μέρος όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα από τη σχολική βαθμολογία τους στα Μαθηματικά ; Τι θα μπορούσαν να παρουσιάσουν, για παράδειγμα, μέτριοι μαθητές σε τέτοιους διαγωνισμούς ;

Κατ' αρχήν ξεκαθαρίζουμε ότι οι σχολικοί χαρακτηρισμοί της επίδοσης των μαθητών προκύπτουν (κυρίως) σε συνάρτηση με τη συγκρότησή τους πάνω σε προκαθορισμένη ύλη, δηλαδή αν –και κατά

πόσο– είναι συμβατοί σε θέματα που κυριαρχεί ο αλγόριθμος και η τυπική θεωρητική κατάρτιση. Κάποιες ενδε-

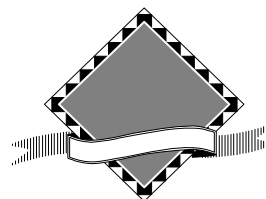
χομένως εξαιρέσεις μπορεί να υπάρχουν, για να επιβεβαιώνουν πάλι τον κανόνα.

Λέμε εδώ πως υπήρξαν (και υπάρχουν) σοβαρά παραδείγματα τέτοιων μέτριων μαθητών που μπροστά σε πρωτότυπα θέματα βρίσκουν γρήγορα διεξόδους και δίνουν λύσεις, μερικές φορές με έναν υπέροχο –και ίσως όχι αναμενόμε-

***Η διδασκαλία της επίλυσης απρόβλεπτων προβλημάτων πρέπει να ενταχτεί στα Προγράμματα των Μαθηματικών.***

νο- τρόπο. Φυσικά πρέπει να παραδεχτούμε ότι οι περιπτώσεις τέτοιων μαθητών είναι πολύ λίγες και να επισημάνουμε ότι το φυσικό τους χάρισμα είναι η ανεπτυγμένη διαισθητική τους σκέψη, που οδηγεί στην ξαφνική (συνήθως) σύλληψη της αλήθειας. Οι μαθητές αυτοί δεν μπορούν συνήθως να παρουσιάσουν το γνωστό μας τυποποιημένο και καλαισθητό μαθηματικό κείμενο. Τις περισσότερες φορές, ενώ συλλαμβάνουν την κρίσιμη ιδέα που οδηγεί στη λύση, «μπλοκάρουν», όταν από ένα σημείο και μετά η λύση του προβλήματος απαιτεί οργανωμένη γνώση ορισμών, μαθηματικών προτάσεων, τύπων και μεθόδων (διαδικασιών) απόδειξης. Κάποιοι από σας –συνάδελφοι μαθηματικοί– θα έχετε, πιστεύω, παραδείγματα μαθητών σας –μέτρων και αφανών κατά τα άλλα– που διακρίθηκαν σε

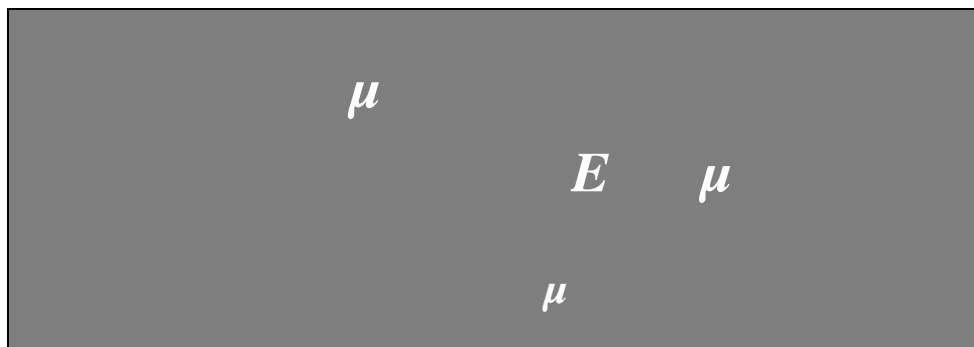
διαδοχικούς διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε. Οι μαθητές αυτοί χωρίς συστηματική μελέτη, μάλλον θα αποτύγχαναν σε διαγωνισμούς τύπου Γενικών (Πανελλαδικών) Εξετάσεων, όπου εξετάζεται κυρίως η συγκρότηση του μαθητή περί τα αλγοριθμικά μαθηματικά και η συστηματική κατανόηση διαφόρων εννοιών. Όμως είναι περίπου βέβαιο ότι μπορεί να διαπρέψουν σε άλλους τομείς (π.χ. εμπόριο), όπου χρειάζεται κυρίως διορατικότητα, εφευρετικότητα, όχι τυποποιημένη σκέψη και γοργή σύλληψη της καλύτερης επιλογής ανάμεσα σε ένα πλήθος προτεινομένων.



Εξαμηνιαίο Περιοδικό

**Μαθηματική Παιδεία**

... για τον καθηγητή



$\mu$  ,  
 , , , ,  $\in \mathbb{R}$  :

•	$a^2 + b^2 \geq 2ab$	$\mu = 1$
•	$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2$	$\mu = 1$
•	$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ Lagrange	$\mu = 1$
•	$e > 0, e + \frac{1}{e} \geq 2, e + \frac{e^2}{e} \geq 2e$	$\mu = 1, \mu = 1$
•	$a, b \geq 0, a + b \geq \sqrt{a^2 + b^2}$	$\mu = 0$

« » ( )  $\mu$   
 $\mu$  ,  $\mu$  ( ) -  
 .  
 $\mu$   $\mu$   $\mu$  ,  $\mu$   $\mu$   $\mu$  -  
 $\mu$   $\mu$   $\mu$   $\mu$  -  
 $\mu$   $\mu$   $\mu$   $\mu$  -

$1 - \frac{4}{\mu}, \mu, \mu$   
 $\mu$  . .),  $\mu$   
 $\mu$  .  
 $\mu$  , ( $= 1$ ),  $\mu$  ,  
 $\mu$  ,  $\mu$  .  
 $\mu$   $\mu$   $\mu$   $\mu$  -  
 $\mu$  ,  $\mu$  ,  
 $\mu$  .  $\mu$  .

1

$f : f(x) = \frac{12x}{9+x^2}$

$\mu$  .  
 $\mu$  . ( $\mu$ )  $\mu$  .

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \Rightarrow 9+x^2 > 0.$   
 $\mu$  ,  $\mu$   $\mu$  ,  $> 0,$   
 $\mu$  :  
 $|f(x)| \leq \mu, x \in \mathbb{R}.$   
 $\mu = 3, \mu = |x| \mu :$   
 $3^2+|x|^2 \geq 6|x| \Leftrightarrow \frac{|x|}{9+x^2} \leq \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{|12x|}{9+x^2} \leq 2$   
 $|f(x)| \leq 2, x \in \mathbb{R}, f \mu (\mu = 2 > 0).$

$|f(x)| \leq 2, \quad \mu$   
 $3 = |x| \Leftrightarrow x = \pm 3.$   
 $|f(x)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq f(x) \leq 2, x \in \mathbb{R} \quad f(3) = 2, f(-3) = -2.$   
 $f \quad \mu \quad \mu \quad 2 \quad x = 3 \quad \mu \quad -2 \quad x = -3.$

<b>2</b>	$f(x) = 2x^2, x \in \mathbb{R}$ $8^2), \quad \mu > 0, \mu$ $( > 0).$ <div style="text-align: right;"><b>1994</b></div>
----------	---

$\mu \quad \mu \quad \mu \quad \mu :$   
 $= \frac{4}{1+32^2}, > 0.$   
 $(\mu = 1, = \sqrt{32}), \quad \mu :$   
 $1+32^2 = 1 + (\sqrt{32})^2 \geq 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}, \quad \frac{4}{1+32^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$   
 $\mu \quad 1 = \sqrt{32} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$   
 $\mu \quad \mu \quad \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}, \quad = \frac{\sqrt{2}}{8}.$

<b>3</b>	$\mu \quad \mu \quad :$ $g(x) = \frac{1}{ x  + \sqrt{2-x^2}}, > 0( \quad ).$
----------	---

$g(x) = |x| + \sqrt{2-x^2}$ ,  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .  
 $g(x) = |x| + \sqrt{2-x^2}$ ,  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .  
 $g(x) = |x| + \sqrt{2-x^2}$ ,  $x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ .

$$g(x) = |x| + \sqrt{2-x^2}, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$g(x) = |x| + \sqrt{2-x^2}, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$2(x^2 + 2 - x^2) \geq (|x| + \sqrt{2-x^2})^2 \quad 0 < h(x) \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{h(x)} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad g(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$|x| = \sqrt{2-x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$g\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$g(x) = 1$

$$|x| + \sqrt{2-x^2} \geq \sqrt{x^2 + 2 - x^2} = \sqrt{2} \quad h(x) \geq \frac{1}{h(x)} \leq \frac{1}{g(x)} \leq 1, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}].$$

$$|x| \cdot \sqrt{2-x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad x = \pm \sqrt{2}.$$

$$g(0) = g(\pm \sqrt{2}) = 1.$$

$$g(x) = 1 \quad x = 0 \quad x = \pm \sqrt{2}.$$

$g(x) = 1$

$g(x) = 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = \pm \sqrt{2}$ .

$$g(x) = 1, x = 0, x = \pm \sqrt{2}.$$



**4**

$$: \\ (x+2) \cdot x + (1-2y) \cdot y + 3x - 4 = 0, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

:

$$\mu \quad \mu \quad :$$

$$d(\mu) = \frac{|3x - 4|}{\sqrt{(x+2)^2 + (1-2y)^2}}, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\mu \quad \mu \quad \mu \quad :$$

$$(\mu^2 + 2^2) \cdot ((x+2)^2 + (1-2y)^2) \geq (x \cdot (x+2) + y \cdot (1-2y))^2$$

$$\mu, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad \mu :$$

$$x \cdot (x+2) + y \cdot (1-2y) = 3x - 4 \quad (-2y) \cdot (x+2) + (1-2y) = 3x - 4.$$

$$x + 2 = -4 \quad -2y = 3, \quad x = -1, \quad y = -2.$$

$$\mu :$$

$$[(-1)^2 + (-2)^2] \cdot [(x+2)^2 + (1-2y)^2] \geq (-2 - (-2) + 4)^2$$

$$5[(x+2)^2 + (1-2y)^2] \geq (3-4)^2 \quad d(\mu) \leq \sqrt{5}.$$

$$\mu \quad (1-2y) = x \cdot (x+2) \Leftrightarrow y = -\frac{3}{4}.$$

$$\mu \quad \sqrt{5} \quad \mu \\ = -\frac{3}{4} \quad x + 2y - 5 = 0.$$

**5**

$$\mu \quad r(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 2t + 1 \\ t^2 - 6t + 9 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\mu \quad \mu \quad \mu \quad .$$

:

$\mu$   $\mu$  :

$$f(t) = \sqrt{(t-1)^4 + (t-3)^4}, t \in \mathbb{R}.$$

$$= (3-t)^2 \quad \mu \quad = t-1, \quad = 3-t, \quad \mu : \quad = (t-1)^2,$$

$$2 \left( (t-1)^2 \right)^2 + \left( (3-t)^2 \right)^2 \geq \left( (t-1)^2 + (3-t)^2 \right)^2 \geq \frac{1}{2} (t-1+3-t)^2 \cdot 2.$$

$$2 \left( (t-1)^4 + (3-t)^4 \right) \geq 4 \quad f(t) \geq \sqrt{2}.$$

$\mu$  :

$$(t-1)^2 = (3-t)^2 \quad t-1 = 3-t, \quad t = 2.$$

$$\mu \quad \mu \quad f(2) = \frac{1}{1}.$$

6

$\mu = \{1, 2, 3\}$   $\mu = (1),$

$\mu = (2) \quad \mu = (3)$   $\mu$

$\mu \cdot \mu \neq 0.$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{4}{1} \geq 16.$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{4}{1} = 16, \quad , , .$

:

$\cdot \quad 1 = + + , , , \quad , \quad \mu :$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{4}{1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{4}{1} + \frac{4(1+1)}{1} =$$

$$= 6 + \frac{4}{\mu} + \frac{4}{\mu} \geq 6 + 2 + 4 + 4 = 16,$$

$$\mu \quad \mu \quad .$$

$$\cdot \quad \mu :$$

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \frac{4}{\mu} = 16 \Leftrightarrow \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} + \frac{4}{\mu} = 2 + 4 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1^2 + 1^2 - 2}{\mu} + \frac{2^2 + 4^2 - 4}{\mu} + \frac{2^2 + 4^2 - 4}{\mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-1)^2}{\mu} + \frac{(2-4)^2}{\mu} + \frac{(2-4)^2}{\mu} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{0}{\mu} + \frac{4}{\mu} + \frac{4}{\mu} = 8 \cdot \frac{1}{\mu} = 8 \cdot \frac{1}{\mu} = 8 \cdot \frac{1}{\mu} > 0.$$

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu} = 1, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}.$$

7

$$z = \sqrt{x+3} + i \cdot \sqrt{5-x}, \quad -3 \leq x \leq 5,$$

$$\mu \quad .$$

:

$$\mu \quad \mu \quad \mu \quad (\mu \quad ) :$$

$$|z| = \sqrt{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}, \quad x \in [-3, 5].$$

$$\mu :$$

$$2(\sqrt{x+3})^2 + (\sqrt{5-x})^2 \geq (\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x})^2 \Leftrightarrow 16 \geq |z|^4 \Leftrightarrow |z| \leq 2, \quad x \in [-3, 5].$$

$$\mu \quad ( \quad ) :$$

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow x+3 = 5-x \Leftrightarrow x = 1 \in [-3, 5].$$

$$z = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}.$$

:

 $\mu$ :  $(\sqrt[4]{8}, i \cdot \sqrt[4]{8})$ .**8**

$z, \mu \quad \mu \quad (3|z| - 4|w|) = 10.$   
 $|z|^2 + |w|^2 > 4.$

:

 $\mu$  :

$$(3^2 + (-4)^2) \cdot (|z|^2 + |w|^2) \geq (3|z| - 4|w|)^2$$

$$25(|z|^2 + |w|^2) \geq 100 \quad |z|^2 + |w|^2 \geq 4.$$

$$3|w| = -4|z| \Leftrightarrow z = w = 0, \quad ,$$

$$\mu \quad |z|^2 + |w|^2 > 4.$$

**9** $\mu$ 

$$f(x) = 2 + |x^2 - 3x + 2| + \frac{9}{|x^2 - 3x + 2| + 1}$$

:

$$x \in \mathbb{R} \quad 1 + |x^2 - 3x + 2| > 0, \quad f \quad \mu \quad \mathbb{R}$$

$$( \quad = 3) \quad \mu :$$

$$1 + |x^2 - 3x + 2| + \frac{9}{|x^2 - 3x + 2| + 1} \geq 6 \quad f(x) \geq 7, \quad x \in \mathbb{R}.$$

 $\mu$  :

$$1 + |x^2 - 3x + 2| = 3 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = \pm 2.$$

$$x^2 - 3x + 2 = 2 \quad 0, 3, \quad x^2 - 3x + 2 = -2 \quad -$$

$$f \quad \mu \quad 7, \quad x = 0 \quad x = 3.$$

1.  $\mu$   $\mu$  :  
 $f(t) = \frac{t}{4+t^2}$ .  $\cdot \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$
2. :  
 $x+(-2)y+7-6=0, \in \mathbb{R}$   
 $\mu$   
 $\cdot 4x+3y+25=0$
3.  $\mu$   $\mu$  :  
 $f(x) = x + \sqrt{4-x^2}, g(x) = |x| \cdot \sqrt{4-x^2}$   
 $\cdot \sqrt{8}, 2$
4.  $\mu$   $\mu$  :  
 $z = x + \frac{1}{1-x} + i \cdot \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}$ ,  $x \neq 1$ ,  
 $\mu$   $\mu$   $\mu$  .  $\cdot -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$
5.  $\mu$  ,  $\mu$  = ( ), =  
 ( ),  $\cdot \neq 0$ .  
 $: 4 \cdot \leq 1, \frac{1}{-} + \frac{1}{-} \geq 4$ .  
 $\frac{1}{-} + \frac{1}{-} = 4$ , , .  
 $+ \frac{1}{-}^2 + \frac{1}{-}^2 \geq \frac{25}{2}$ . ;
6. ,  $\in \mathbb{R}$ ,  $(+)^2 \geq 4 \cdot$ .  
 $x \in \mathbb{R}, \in^*$ , :  
 $(e^{-x}+1) \cdot (7-e^{-x}) \leq 16, 2x - x^2 \leq 1$ .

7. ,  $\mu$  .

$$f(x) = \mu x + \dots, \quad g(x) = x + \sqrt{1-x^2}$$

8. ,  $\in \mathbb{R}$   $\mu$   $\mu$   $\geq 0$ .

$$: 1 \leq \frac{(\dots) + (\dots)}{\sqrt{\dots^2 + \dots^2}} \leq \sqrt{2} . ;$$

· ,

$$x + y + \dots = 0,$$

$$|x| + |y| > 0, \dots \geq 0,$$

· ,  $\in \mathbb{R}$ ,

· ,

$$(1, 1).$$

·  $\mu$

$$\mu$$

·

$$g(t) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{\sqrt{t^4 + (t-1)^4}}, t \in \mathbb{R}.$$

9. ,  $\in \mathbb{R}^+$   $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

:

$$\frac{x}{y} + \dots^2 + \frac{y}{x} + \dots^2 \geq 2(\dots + \dots)^2$$

$$\mu \quad \mu$$

$$\mu \quad \dots$$

1995



**ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ  
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ Α΄ ΛΕΣΜΗΣ  
ΚΑΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ**

**ΔΗΜΗΤΡΗ ΜΠΟΥΝΑΚΗ**

• **ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ  
ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

• **ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ  
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ  
ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ**

• **ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ (I, II)**

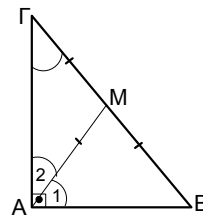
**ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΕΣ ΤΗΛ. (081)252140  
ΚΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ**



- Ας παρατηρήσουμε λίγο το σχήμα της άσκησης. Τι αποδείξαμε στο (ii) ;
- Δηλαδή για το ορθογώνιο τρίγωνο  $ABΓ$ , η  $AM$  τι είναι ;
- ... και με τι αποδείξαμε ότι είναι ίσο το  $AM$  ;
- Άρα στην άσκησή μας, τι σχέση έχει η διάμεσος με την υποτείνουσα;
- Λέτε να συμβαίνει αυτό σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ; Ας προβληματιστούμε. Και πρώτα απ' όλα, ποιο είναι το  $\mu$  μας ;

$$\frac{\mu}{2} !!$$

- Ας κάνουμε λοιπόν ένα καινούριο σχήμα, ξεκαθαρίζοντας ποιο είναι το ζητούμενο και ποια η υπόθεση.



$\mu$	$\hat{A} = 90^\circ,$	$=$
$\mu$	$= \frac{\mu}{2} =$	$= \rightarrow \mu !!$

- Τι κοιτάμε πρώτα σε μία άσκηση ;
- Γιατί ;
- Κι' αν αυτό δεν μας δείχνει άμεσα τίποτα, τι κάνουμε ; Πως αντλούμε άλλες πληροφορίες ;

- $\mu !!$
- $\mu \mu$
- $( \quad ) \mu .$
- $\mu \mu \mu -$
- $\mu \mu \mu -$
- $\mu \mu \mu -$
- $\mu \mu \mu !!$



— Ας το κάνουμε αυτό λοιπόν ...

Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει :

$$AM = MB \text{ και } AM = MG.$$

Τι θα έλεγα τότε ;

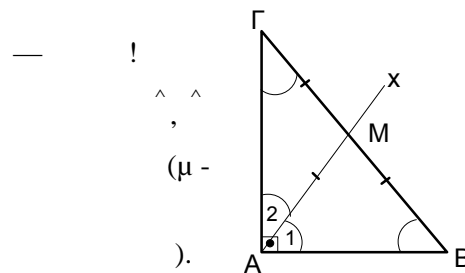
$$\begin{matrix} = & = \\ \downarrow & \downarrow \end{matrix}$$

— Παρακάτω ...

— Τι παθαίνει δηλαδή η ορθή γωνία από τη διάμεσο ;

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow \\ \hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha} & \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \\ \mu & \mu \end{matrix} \quad , \quad -$$

— Άρα η ανάλυση που κάναμε μας οδηγεί στη σκέψη να χωρίσουμε την  $\hat{A}$  με μια ημιευθεία σε δύο γωνίες ίσες αντίστοιχα με τις  $\hat{\alpha}$   $\hat{\alpha}$ . Πριν το κάνουμε αυτό σ' ένα σχήμα, ας σκεφτούμε αν είναι δυνατό.



— Ωραία ! Έχουμε φέρει τώρα την Ax που τέμνει τη BG στο M, ώστε

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \quad \mu$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}_2.$$

$$\begin{matrix} \mu & 90^\circ, \\ \hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = 90^\circ, & (1). \end{matrix}$$

— Άθροισμα 90°... , άθροισμα 90°...  
Μας θυμίζει τίποτα αυτό ; Υπάρχουν άλλες τέτοιες γωνίες στο σχήμα ;

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90^\circ, (2)$$

— Τότε οι σχέσεις (1) και (2) τι μας δίνουν ;

$$\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha} \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\beta} .$$

— Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν έχουμε :

Φέρνοντας την AM ώστε :

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \quad \text{τότε} \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta} .$$

Τι σημαίνουν αυτά ;

$$\hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} \quad \hat{\alpha}_1 = \hat{\beta} .$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$= \quad =$$

— Και από εδώ ;

$$= \quad = \quad , \quad -$$

$$\mu .$$

— **!! Πάρα πολύ ωραία !!**

— Ας μας πει τώρα κάποιος, τι αποδείξαμε.

$$= \quad ,$$

$$\mu \quad \mu \quad \mu \quad -$$

— Ας επιστημόνουμε τώρα και τα εξής :

1. Για ποια διάμεσο μιλάμε ;

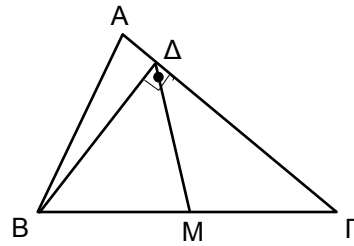
$$= \quad \mu$$

2. Αν σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, φέρω τη διάμεσο προς την υποτείνουσα, τι εμφανίζονται τότε στο σχήμα ;

$$= \quad ,$$

- Για τις γωνίες στο  $A$ , τι μπορούμε να πούμε ;
- Μπράβο ! Τώρα αν ζωγραφίσετε ένα τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , φέρετε το ύψος  $B\Delta$  και ονομάσετε  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ , μπορείτε να διακρίνετε τα στοιχεία του θεωρήματος ;

$$\mu = \frac{a}{2} = \frac{b}{2} = \frac{c}{2}$$



- Για προσπαθήστε τώρα στα τετράδιά σας να λύσετε την εξής εφαρμογή :

"... , ... μ , ..."

- Παιδιά, ξαναγυρίζουμε στο θεώρημα. Έχουμε αποδείξει ότι :

"  $AB\Gamma$  ορθογώνιο στην  $\hat{A}$  ,  
 η διάμεσος  $AM = \frac{\hat{A}\tilde{A}}{2}$  "

- Τι μας θυμίζει η έκφραση :

"αν... τότε ..." ;

- Μπορείτε να μου γράψετε με τη μορφή μιας συνεπαγωγής το θεώρημα ;

—  $\hat{A} = 90^\circ \Rightarrow \mu = \frac{a}{2}$

- Πάρα πολύ ωραία ! Μήπως μπορείτε τώρα να μου γράψετε την αντίστροφη συνεπαγωγή και να τη διατυπώσετε με λόγια ;

—  $\mu = \frac{a}{2} \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$   
 " ... μ μ "

- Μπράβο ! Πάρα πολύ ωραία !  
Έχοντας δηλαδή σαν :
- $AM$  διάμεσος και
- $AM = MB = MG$ ,
- θα αποδείξω ότι :

$$\hat{\alpha} = 90^\circ \rightarrow$$

Πως δουλεύουμε γενικά στα αντί-στροφα ;

- Έχουμε στόχο την  $\hat{\alpha}$ , που αν την κοιτάξω στο σχήμα, βλέπω να αποτελείται από δύο γωνίες :

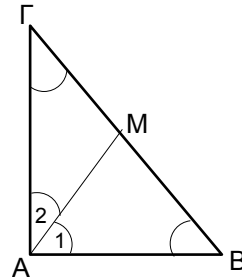
$$\hat{\alpha}_1 \hat{e} \hat{\alpha}_2$$

- Πάω τώρα στην υπόθεση :
- $MA = MB$        $MA = MG$
- $\downarrow$                        $\downarrow$
- $;;$                        $;;$

- ... και αφού με ενδιαφέρουν γωνίες
- ... και πρέπει να εμφανίσω το στόχο μου, δηλαδή τη γωνία  $\hat{\alpha}$ , τι πρέπει να κάνω τις σχέσεις (1) και (2) ;

μ "

μ μ μ



= =  
↓ ↓

$$\hat{\alpha}_1 = \hat{\alpha}, (1) \quad \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha}, (2)$$

μ

— Μπράβο ! Πολύ ωραία ! Ας το κά-  
νουμε αυτό :  $\hat{\alpha}_1 + \hat{\alpha}_2 = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}$

$$\text{δηλαδή } \hat{\alpha} = \hat{\alpha} + \hat{\alpha}, (3).$$

Εγώ όμως θέλω να υπολογίσω την  
 $\hat{\alpha}$  σε μοίρες... μοίρες ; Όταν σε τυ-  
χαίο τρίγωνο ακούω για μοίρες, τι  
μου έρχεται στο μυαλό ;

— Κι απ' αυτές τις τρεις γωνίες, εμέ-  
να μου χρειάζεται η  $\hat{\alpha}$ . Άρα, λόγω  
της σχέσης (3), παίρνω :

$$\hat{\alpha} + \hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow$$

$$2\hat{\alpha} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\alpha} = 90^\circ !!$$

Ουσιαστικά το αντίστροφο αποτε-  
λεί έναν ακόμα τρόπο για να δεί-  
χνουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορ-  
θογώνιο ! Ξέρετε άλλους τρόπους;  
Θέλω να το σκεφτείτε για το άλλο  
μάθημα.

— Τώρα θά'θελα κάποιος να μου  
γράψει με μία σχέση το ευθύ και το  
αντίστροφο του παραπάνω θεωρή-  
ματος.

— Και πως διαβάζεται αυτό ;

$$\text{— } \hat{\alpha} + \hat{\alpha} + \hat{\alpha} = 180^\circ.$$

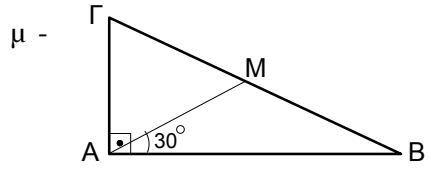
$$\text{— } \hat{\alpha} = 90^\circ \Leftrightarrow \mu = \frac{1}{2}$$

—

$$\begin{array}{cccc} \mu & \mu & \mu & - \\ & \mu & & - \\ & & & . \end{array}$$

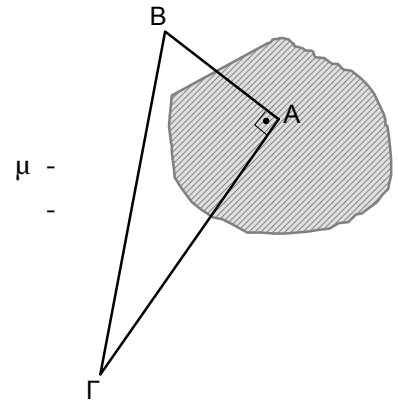
— Πάρα πολύ ωραία παιδιά. Ευχαριστώ για το ενδιαφέρον σας και τη συνεργα-  
σία. Πιστεύω να μη σας κούρασα ! Στο σπίτι σας, θα ήθελα να προσπαθήσετε να  
λύσετε τις ασκήσεις της φωτοτυπημένης σελίδας, που θα σας δώσω αμέσως.

1.  $\hat{A} = 30^\circ$ .



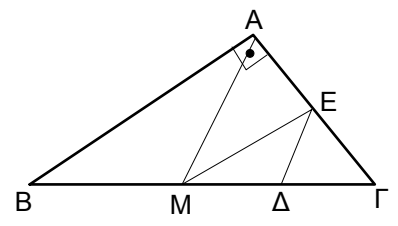
2.  $\mu = \frac{\mu}{2}$  ;  $\mu$  .

3.  $\hat{A} = 30^\circ = 100 \text{ m}$ .



i.  $\hat{A} = 60^\circ$  ;  $\mu$  (i) ;

4.  $\mu = 8 \text{ Km}$  ;  $\mu$  ;  $x_1$  ;  $x_2$  Km ;



5. ( ) // .  $\mu$  ;  $\mu$  ; ( )  $\mu$  .