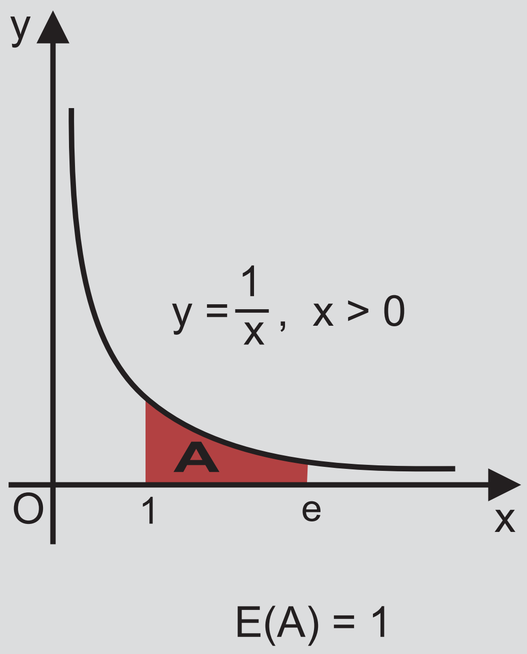
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

ΜΑΡΤΙΟΣ 1997
ΤΕΥΧΟΣ 1
ΔΡΧ. 1.000

ΠΕΡΙΟΔΙΚΗ ΕΚΔΟΣΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΟΥ ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΟΣ ΤΡΙΚΑΛΩΝ ΤΗΣ Ε.Μ.Ε.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ"
Χ. ΒΑΦΕΙΑΔΗΣ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΠΕΡΙΟΔΙΚΟ : ***μαθηματική*** **ΕΚΦΡΑΣΗ**

ετήσια έκδοση μαθηματικών
του Παραρτήματος Τρικάλων
της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας (Ε.Μ.Ε.)

ΤΕΥΧΟΣ 1^{o} ΜΑΡΤΙΟΣ 1997

Γι' αυτό το τεύχος συνεργάστηκαν οι μαθηματικοί :

Δήμος Γιώργος Δ.
Ζανταρίδης Νίκος
Μάντζιος Άρης
Μητσιάδης Γιώργος
Μήτσιος Γιώργος
Μπάλιας Στέφανος
Μπουνάκης Δημήτρης
Ντρίζος Δημήτρης
Πατήλας Χρήστος Δ.

Υπεύθυνος της έκδοσης του 1ου τεύχους
(από τη Δ.Ε. του Παραρτήματος της Ε.Μ.Ε.):
Ντρίζος Δημήτρης

Εκδότης : **Βαφειάδης Χάρης**

Διεύθυνση του περιοδικού :
Καποδιστρίου 1 (Πλατεία
Παλαιού Δεσποτικού)
42 100, Τρίκαλα
Τηλ.-FAX : (0431) 75950

Το περιοδικό διατίθεται από τα βιβλιοπωλεία.
Τιμή τεύχους : 1.000 δρχ.

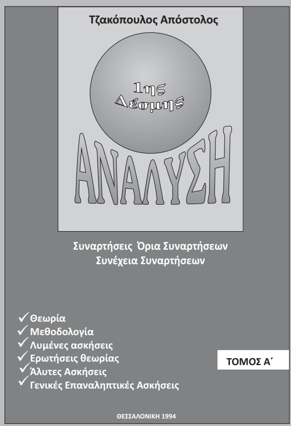
Ηλεκτρονική στοιχειοθεσία, σχήματα, σελιδοποίηση :
Ρίζος Γιώργος
Παλαιολόγου 73,
49 100, Κέρκυρα
Τηλ. (0661) 33243

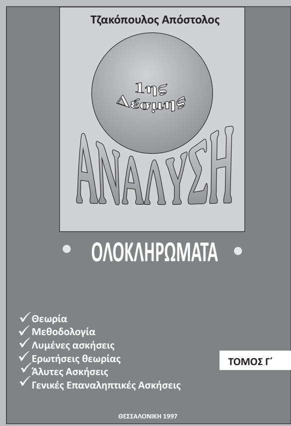
Κεντρική διάθεση : **Βιβλιοπωλείο**
"ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ"
Χάρης Βαφειάδης
Δέλιου 4, 54 621, Θεσσαλονίκη
Τηλ. (031) 263163,
FAX (031) 240595

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Τζακόπουλος Απόστολος

τρίτομη Ανάλυση ...





... για τον μαθητή

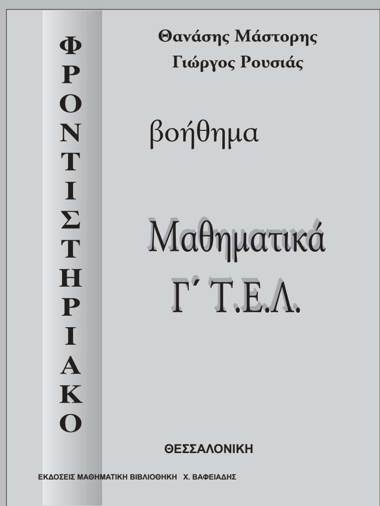
κέντρικη διάθεση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χάρης Βαφειάδης

Θ. Μάστορης
Γ. Ρουσιάς

φροντιστηριακό βοήθημα
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ Τ.Ε.Λ.

το αρτιότερο βοήθημα για τις εισαγωγικές εξετάσεις που για πρώτη φορά θα δώσουν οι τελειόφοιτοι των Τ.Ε.Λ.



εκδόσεις - κέντρικη διάθεση

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ Χάρης Βαφειάδης

Σημείωμα της μαθηματικής ΕΚΦΡΑΣΗΣ

Φίλε αναγνώστη,

Κρατάς στα χέρια σου το $1^{ο}$ τεύχος ενός περιοδικού - θα λέγαμε την πρώτη προσπάθεια έντυπης συλλογικής έκφρασης μαθηματικών του Παραρτήματος Τρικάλων της "Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας" και άλλων φίλων συνεργατών.

Η ιδέα για το φτιάξιμο του περιοδικού αυτού δεν είναι χτεσινή. Κατά διαστήματα προηγήθηκαν αρκετές συζητήσεις μεταξύ φίλων - μελών του Παραρτήματός μας και επισημάνθηκαν οι ουσιαστικές δυσκολίες μια τέτοιας τολμηρής πρωτοβουλίας. Η διαμόρφωση και ο συντονισμός κάθε φοράς της ύλης του, το γράψιμο καλών άρθρων και η έλλειψη μιας σταθερής ομάδας συνεργατών ήταν πράγματι σημαντικά προβλήματα.

Στόχος μας είναι η εξέλιξη αυτής της πρώτης και συγχρόνως πειραματικής μας προσπάθειας να οδηγήσει σε μια σταθερή περιοδική έκδοση με ενδιαφέροντα θέματα γύρω από τα Μαθηματικά και τα νέα ρεύματα που αναπτύσσονται στον τομέα της Μαθηματικής Παιδείας και Εκπαίδευσης.

Μέσα από τις στήλες αυτού του περιοδικού επιδιώκουμε με ανιδιοτέλεια τη δημιουργία ενός βήματος για όλους τους μαθηματικούς που θα έχουν να καταθέσουν κάθε φορά μια εργασία τους, μια καινούρια άποψη, έναν προβληματισμό τους, μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση. Η ανάλυση Μαθηματικών εννοιών, οι διδακτικές προσεγγίσεις κάποιων ενοτήτων και οι εφαρμογές των Μαθηματικών στις άλλες επιστήμες, επιθυμούμε να είναι στο επίκεντρο του περιοδικού.

Θα είμαστε επίσης ανοιχτοί ως περιοδικό και σε εργασίες μαθητών με το ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τα μαθηματικά. Όμως, δεν μπορούμε να παραβλέψουμε και το ρόλο των κάθε λογής εξετάσεων που καλούνται να αντιμετωπίσουν οι μαθητές. Θα είμαστε κοντά στη δικαιολογημένη αγωνία τους για την επιτυχία τους σ’ αυτές. Έτσι η άσκηση και το πρόβλημα θα έχουν το δικό τους σημαντικό χώρο.

Ακούγεται τελευταία από αρκετούς αναγνώστες, πως όλα πλέον είναι αντιγραφές και βελτιωμένες επαναδιατυπώσεις θεμάτων και ιδεών, που έχουν δει και ξαναδεί εδώ και κει. Έτσι πράγματι είναι. Αυτό αποτελεί κοινή διαπίστωση. Βέβαια υπάρχουν και εξαιρέσεις και αλίμονο αν δεν υπήρχαν. Γεγονός είναι πάντως ότι βαρεθήκαμε τα ίδια και τα ίδια. Αναζητούμε σε κάθε βιβλίο ή περιοδικό εκείνη την καινούρια ιδέα που πάει πέρα από τα τετριμμένα και χιλιοειπωμένα. Στοχεύουμε λοιπόν ως περιοδικό να κινηθούμε και προς την κατεύθυνση τέτοιων αναζητήσεων. Από την άλλη όμως μεριά, δεν μπορεί να απορρίψει κανείς και κάτι το κλασσικό και συγχρόνως όμορφο, απλά επειδή κάπου έχει ξαναδημοσιευτεί. Σε τέτοιες περιπτώσεις θα παραθέτουμε οπωσδήποτε βιβλιογραφία, κάτι που όχι μόνο συνιστά εντιμότητα και σεβασμό στον όποιον αναγνώστη, αλλά ίσως κάποιες φορές τον διευκολύνει κιόλας.

Η δημιουργία του περιοδικού μας και κυρίως η συνέχιση της έκδοσής του με μόνιμες στήλες και συνεργάτες έχουν ανάγκη από τη δική σου στήριξη και τη δική σου συμπαράσταση. Θέλουμε να δείτε με κατανόηση και καλοπροαίρετη κριτική αυτή μας την προσπάθεια. Άλλωστε το κάθε τι σήμερα είναι επιτακτική ανάγκη να κρίνεται στην ουσία του, όμως χωρίς μικρότητες, γιατί τότε μόνο το προχώρημά μας μπορεί να γίνει πάνω σε πιο στέρεες βάσεις.

Τέλος, από τη θέση αυτή επιθυμούμε να ευχαριστήσουμε θερμά :

Τις εκδόσεις "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ" του συνάδελφου μαθηματικού Χάρη Βαφειάδη, που ανέλαβαν το οικονομικό κόστος της έκδοσης αυτού του τεύχους.

Και τον συνάδελφο Γιώργο Ρίζο, που με ιδιαίτερο ζήλο συνέβαλλε στην άρτια εμφάνιση του περιοδικού μας, επιμελήθηκε τη στοιχειοθεσία, τα σχήματα και την τελική μορφοποίηση όλων των κειμένων του περιοδικού μας.

ΔΙΑΔΩΣΤΕ ΤΗ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ

Η ΑΣΚΗΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

Μία προσέγγιση στην αντιμετώπιση απρόβλεπτων θεμάτων.

Δημήτρης Ντρίζος

Πολλές φορές ακούμε από καλούς, κυρίως, μαθητές την έκφραση :

«Τις **ασκήσεις** τις αντιμετωπίζω πιο εύκολα· τα **προβλήματα** όμως με δυσκολεύουν». Δεν θα επιχειρήσουμε εδώ να δώσουμε αυστηρούς τυπικούς ορισμούς στις έννοιες άσκηση και πρόβλημα. Η πολυπλοκότητα και η ποικιλομορφία αυτών των εννοιών κάνει αρκετά δύσκολη τη διατύπωση απόλυτων ορισμών τους. Άλλωστε, πιστεύουμε πως μια φορμαλιστική προσέγγισή τους δε θα βοηθούσε και πολύ στη διερεύνηση κάποιων δομικών χαρακτηριστικών τους στοιχείων.

Ο μαθητής τις περισσότερες φορές που καλείται να αντιμετωπίσει ένα **μαθηματικό θέμα,** διαισθητικά και με ευδιάκριτους γι' αυτόν όρους, μπορεί και κάνει το διαχωρισμό, αν το θέμα αποτελεί άσκηση ή πρόβλημα. ΄Ετσι λοιπόν, χαρακτηρίζει ως ασκήσεις τα θέματα στα οποία του ζητείται για παράδειγμα η επίλυση μιας συγκεκριμένης απλής εξίσωσης ή ανίσωσης. Η απόδειξη κάποιων σχέσεων, όπως μιας ισότητας ή μιας ανισότητας, όταν του δίνουν την τυπική τους μορφή, συνιστούν ασκήσεις. Θέματα επίσης στα οποία καλείται να υπολογίσει αποστάσεις, εμβαδά και όγκους, τα χαρακτηρίζει πάλι ως ασκήσεις. Το ίδιο και τα θέματα κάποιων απλών γεωμετρικών κατασκευών με τη χρήση οργάνων που δεν απαιτούν συνήθως τη χάραξη βοηθητικών γραμμών.

Ποια θέματα χαρακτηρίζει ως προβλήματα ;

Εκείνα στα οποία περιγράφεται συνήθως μια πραγματική κατάσταση με στοιχεία και όρους παρμένα τις περισσότερες φορές από τον φυσικό κόσμο που μας περιβάλλει, τον μακρόκοσμο και τον μικρόκοσμο.

Επίσης θέματα που η σύνθεση τους βασίζεται σε στοιχεία από τη ζωή και την εμπειρία μας.

Ως προβλήματα χαρακτηρίζει επίσης κάποιες διανοητικές κατασκευές με μαθηματική δομή, όπου μετά από την παράθεση επαρκών πληροφοριών (δεδομένα) του ζητείται ο προσδιορισμός κάποιων αγνώστων στοιχείων. Επισημαίνουμε ότι η έννοια πρόβλημα σε τούτο το άρθρο μας ενδιαφέρει, όταν οριοθετείται σύμφωνα με τα προηγούμενα· και μπορούμε να το προσεγγίσουμε και να το επιλύσουμε με μαθηματικούς όρους. Παρενθετικά, αναφέρουμε ότι η φυσική θέση του προβλήματος είναι πριν από την ανάπτυξη της Θεωρίας, αυτό δε που ακολουθεί την ανάπτυξη της Θεωρίας είναι η άσκηση.

Η φυσική θέση του προβλήματος είναι πριν από την ανάπτυξη της Θεωρίας, αυτό δε που ακολουθεί την ανάπτυξη της Θεωρίας είναι η άσκηση.

Για την επίλυση ενός προβλήματος, το κυριότερο και συγχρόνως το πιο σοβαρό μέλημα του μαθητή – λύτη είναι κατ' αρχήν η **μοντελοποίηση (μαθηματικοποίηση)** του προβλήματος, η δημιουργία δηλαδή μιας **συσχέτισης** φτιαγμένης με τυπικά μαθηματικά σύμβολα που να αποδίδει τη διαδικασία που περιγράφεται λεκτικά στο πρόβλημα. Τη συσχέτιση αυτή, που μπορεί να είναι για παράδειγμα μια τυπική εξίσωση ή μια συνάρτηση ανάμεσα στα διάφορα μεγέθη του προβλήματος, τη λέμε **μαθηματικό μοντέλο** του προβλήματος. Το στάδιο αυτό του περάσματος από τη λεκτική απόδοση στο αντίστοιχο μαθηματικό μοντέλο είναι τις περισσότερες φορές μια αρκετά επίπονη εργασία για το μαθητή. Τονίζουμε εδώ ότι η διαδικασία της μοντελοποίησης ξεκινά μετά από την πλήρη κατανόηση του προβλήματος σε όλες τις λεπτομέρειες του από τον υποψήφιο λύτη.

Είδη ασκήσεων και προβλημάτων

Γύρω από τις έννοιες άσκηση και πρόβλημα έχει αναπτυχθεί τα τελευταία χρόνια μια αρκετά ενδιαφέρουσα βιβλιογραφία. Συναντά κανείς εκεί μια κατηγοριοποίηση (ομαδοποίηση σύμφωνα με κάποια κοινά χαρακτηριστικά) και στις ασκήσεις και στα προβλήματα. Έχουμε τη γνώμη πως η ένταξη μιας άσκησης ή ενός προβλήματος σε μια κατηγορία Α΄ και όχι σε μια άλλη Β΄ δεν μπορεί να γίνει πάντα με έναν απόλυτο τρόπο.

Αρκετές φορές τα όρια ανάμεσα σε κάποιες καθαρά φορμαλιστικές κατηγορίες δεν είναι τόσο σαφή και ευδιάκριτα. Έτσι ένας τέτοιος πολυσχιδής διαχωρισμός τους κινείται καθαρά (και μόνο) στο θεωρητικό χώρο της Διδακτικής των Μαθηματικών.

Η προσπάθεια τώρα ορισμένων για διαρκή κατακερματισμό και κατηγοριοποίηση, ακόμα και σε θέματα που αφορούν το ίδιο γνωστικό αντικείμενο, με σκοπό τη δημιουργία «μεθοδολογιών» επίλυσης ασκήσεων και προβλημάτων, τελικά δεν οδηγεί, πιστεύουμε, σε ασφαλή και θετικά αποτελέσματα για τους μαθητές - υποψήφιους λύτες. Τα Μαθηματικά δεν είναι σε καμία περίπτωση –ούτε θα μπορούσαν να είναι– μόνο ένα σύνολο από διάφορες τεχνικές επίλυσης.

Για το λόγο αυτό **θα επιχειρήσουμε παρακάτω την περιγραφή μόνο δύο θεμελιωδών ομάδων για τις ασκήσεις και τα προβλήματα**, που θεωρούμε ότι η ύπαρξή τους είναι αυτονόητη από κάθε μαθητή.

Κατ' αρχήν υπάρχουν ασκήσεις και προβλήματα που ένας σχετικά καλός μαθητής ακολουθώντας έναν **αλγόριθμο**, δηλαδή μια γνωστή του από πριν διαδικασία, καταλήγει – εύκολα ή τέλος πάντων χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία– στη λύση του θέματος. Πρόκειται, συνήθως, για θέματα ρουτίνας, για θέματα δηλαδή εφαρμογής τύπων ή θεωρημάτων ή συνδυασμού ορισμών και κάποιων μαθηματικών προτάσεων που τις περισσότερες φορές, το τονίζουμε ξανά, ο καλός μαθητής τα αντιμετωπίζει με σχετική ευκολία και αυτό, γιατί έχει ξανά αντιμετωπίσει παρόμοια θέματα. Έχει έτσι μια μέθοδο και ακολουθεί κάποια συγκεκριμένα βήματα.

Τι γίνεται όμως, όταν διαβάζοντας και ξαναδιαβάζοντας την άσκηση ή το πρόβλημα, διαπιστώνει ότι βρίσκεται μπροστά σε κάτι «τελείως καινούριο» ; Όταν δε του θυμίζει τίποτα, δε μοιάζει καθόλου με άλλα θέματα που έχει μέχρι τώρα αντιμετωπίσει ;

Αναρωτιέται τότε : «Από που πρέπει να ξεκινήσω ; », «σε ποιες προτάσεις, σε ποια θεωρήματα α-κουμπάει το θέμα αυτό ; ».

Αυτό το θέμα είναι μια **«απρόβλεπτη κατάσταση»**˙ ας πούμε ένα **«πρωτότυπο»** πρόβλημα.

Εδώ ο μαθητής καλείται να κάνει τις προσωπικές του παρεμβάσεις και να επινοήσει τη στρατηγική που θα τον οδηγήσει στη διαμόρφωση του κατάλληλου συλλογισμού ή στη σύλληψη της ιδέας εκείνης που θα τον πάει –τελικά– στη λύση. Μπροστά σε τέτοια απρόβλεπτα προβλήματα ο μαθητής κινητοποιεί στην κυριολεξία το «οπλοστάσιο» των γνώσεών του. Διαβάζει και ξαναδιαβάζει προσεκτικά το θέμα του˙ πρώτα φράση – φράση και έπειτα στην ολότητά του. Μπαίνει μέσα σε αυτό και επισημαίνει τα **δεδομένα** και τα **ζητούμενα**˙ το κατανοεί πλήρως. Έπειτα, μοντελοποιεί το θέμα του, αν πρόκειται για πρόβλημα˙ φέρνει στο μυαλό του θεωρήματα και προτάσεις και κάνει συνδυασμούς, που πιστεύει ότι θα τον οδηγήσουν ολοένα σε κάτι πιο γνωστό˙ χωρίζει το πρόβλημά του σε άλλα επιμέρους μικρότερα προβλήματα και προσπαθεί να τ' αντιμετωπίσει ένα – ένα˙ του έρχονται ιδέες, τις δοκιμάζει και προχωρά βήμα – βήμα. Για την περίπτωση, η **δοκιμή** είναι ένα από τα σπουδαιότερα όπλα του μαθητή – λύτη. Βλέπετε, δεν υπάρχει εδώ αλγόριθμος, οπότε οι δοκιμές του είναι τελείως απαραίτητες.

Στην αγωνιώδη και επίπονη αυτή πορεία αναζήτησης της λύσης ο μαθητής –δηλαδή το μυαλό του– περνά από διάφορες φάσεις. Μερικές φορές για παράδειγμα δεν του έρχονται άλλες ιδέες, πέρα από αυτές που ήδη δοκίμασε προς στιγμήν αναποτελεσματικά. Ή, από την άλλη μεριά, έχει σημειώσει αρκετές ιδέες του χωρίς να μπορεί να εντοπίσει την κατάλληλη (την κρίσιμη) για τη λύση. Μερικές φορές προχωρώντας πάνω σε μια «καινούρια» ιδέα βλέπει να ανακυκλώνεται γύρω από τα ίδια. Οι δοκιμές του δεν έχουν αποτέλεσμα, φέρνει διαρκώς γύρω από τις ίδιες ιδέες και τελικά απογοητεύεται.

Εδώ προτείνουμε τα εξής
στο μαθητή – λύτη :

Αν το θέμα ανήκει σε διαγωνισμό με συγκεκριμένη χρονική διάρκεια, να σταματήσει να ασχολείται πλέον με αυτό και να καταπιαστεί με άλλα θέματα του διαγωνισμού που τα βρίσκει πιο εύκολα και προς το τέλος να ξαναγυρίσει πάλι στο θέμα που τόσο έντονα τον απασχόλησε· να διαβάσει πάλι από την αρχή, πολύ προσεκτικά και χωρίς ένταση τούτη τη φορά, την εκφώνηση του θέματος. Πιθανόν, τώρα, να δει κάτι που προηγούμενα δεν είχε παρατηρήσει· κάτι που δεν το συνέδεε κατάλληλα με τα άλλα δεδομένα· να εντοπίσει εκείνη τη φράση κλειδί πίσω από την οποία βρίσκεται **η κρίσιμη ιδέα για τη λύση**. Κάποτε αυτές οι ιδέες έρχονται τελείως ξαφνικά (ενορατική σύλληψη). Γρήγορα τότε διατυπώνει τους συλλογισμούς που δίνουν με πληρότητα τη λύση στο θέμα. Η αίσθηση της ανακάλυψης και η χαρά της λύσης, που με τόσο πάθος αναζήτησε, είναι στο σημείο αυτό απερίγραπτη.

Θέλουμε τώρα να επισημάνουμε πως ένα πρόβλημα ή μία άσκηση που αποτελεί απρόβλεπτη κατάσταση για έναν Α΄ λύτη, ίσως το ίδιο πρόβλημα να αποτελεί θέμα ρουτίνας για ένα Β΄ λύτη. Αυτό σχετίζεται με την ηλικία και τη προσωπικότητα του λύτη, την εμπειρία του, τη διορατικότητα, τη γενικότερη κατάρτισή του και όχι μόνο.

Η ενασχόληση – προπόνηση με πολλά απρόβλεπτα προβλήματα οδηγεί σε μια εξοικείωση των μαθητών με τέτοιου είδους θέματα. Ανοίγονται έτσι νέοι ορίζοντες στη σκέψη· το μυαλό του λύτη πηγαίνει ευκολότερα στα απρόσμενα σημεία – κλειδιά του προβλήματος και βρίσκει έτσι διεξόδους εκεί που ο αμύητος λύτης σηκώνει συνήθως τα χέρια ψηλά. Στο σημείο αυτό έρχεται η ερώτηση : «Δεν είναι αρκετή η ιδιαίτερη κλίση ενός παιδιού προς τα Μαθηματικά για να αντιμετωπίζει επιτυχώς τέτοια προβλήματα ;». Απαντάμε πως μάλλον όχι· χρειάζεται και η προπόνηση για την οποία προηγουμένως κάναμε λόγο.

Μερικές ακόμα προτάσεις

Κατ' αρχήν, η εξοικείωση των μαθητών με τέτοια θέματα θα πρέπει να γίνεται από μικρή ηλικία.

Επιπλέον ο εμπλουτισμός του σχολικού προγράμματος με κατάλληλα προβλήματα που κινούν το ενδιαφέρον των μαθητών για δημιουργική αναζήτηση, συνιστά ένα σπουδαίο όρο για την εξοικείωση αυτή. Επίσης **η διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων** πρέπει να ενταχτεί στα Προγράμματα των Μαθηματικών και η παρουσίαση από τους διδάσκοντες προβλημάτων – απρόβλεπτων καταστάσεων να γίνεται συχνά, με κατάλληλο όμως τρόπο και σε αρμονία πάντα με το υπόλοιπο μέρος της γνωστής μας συμβατικής διδασκαλίας. Τέλος, η οργάνωση και λειτουργία σοβαρών σεμιναριακών προγραμμάτων για τους διδάσκοντες με θέμα τη διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων κρίνεται ως απολύτως απαραίτητη.

> ***Η διδασκαλία της επίλυσης απρόβλεπτων προβλημάτων πρέπει να ενταχτεί στα Προγράμματα των Μαθηματικών.***

Πρωτότυπα προβλήματα και μέτριοι μαθητές

Από πολλούς συναδέλφους μαθηματικούς τίθεται το εύλογο ερώτημα : Σε διαγωνισμούς που περιλαμβάνουν και πρωτότυπα θέματα (όπως αυτά περιγράφηκαν και αναλύθηκαν προηγουμένως), υπάρχει λόγος να παίρνουν μέρος όλοι οι μαθητές, ανεξάρτητα από τη σχολική βαθμολογία τους στα Μαθηματικά ; Τι θα μπορούσαν να παρουσιάσουν, για παράδειγμα, μέτριοι μαθητές σε τέτοιους διαγωνισμούς ;

Κατ’ αρχήν ξεκαθαρίζουμε ότι οι σχολικοί χαρακτηρισμοί της επίδοσης των μαθητών προκύπτουν (κυρίως) σε συνάρτηση με τη συγκρότησή τους πάνω σε προκαθορισμένη ύλη, δηλαδή αν –και κατά πόσο– είναι συμβατοί σε θέματα που κυριαρχεί ο αλγόριθμος και η τυπική θεωρητική κατάρτιση. Κάποιες ενδεχομένως εξαιρέσεις μπορεί να υπάρχουν, για να επιβεβαιώνουν πάλι τον κανόνα.

Λέμε εδώ πως υπήρξαν (και υπάρχουν) σοβαρά παραδείγματα τέτοιων μέτριων μαθητών που μπροστά σε πρωτότυπα θέματα βρίσκουν γρήγορα διεξόδους και δίνουν λύσεις, μερικές φορές με έναν υπέροχο –και ίσως όχι αναμενόμενο– τρόπο. Φυσικά πρέπει να παραδεχτούμε ότι οι περιπτώσεις τέτοιων μαθητών είναι πολύ λίγες και να επισημάνουμε ότι το φυσικό τους χάρισμα είναι η ανεπτυγμένη διαισθητική τους σκέψη, που οδηγεί στην ξαφνική (συνήθως) σύλληψη της αλήθειας. Οι μαθητές αυτοί δεν μπορούν συνήθως να παρουσιάσουν το γνωστό μας τυποποιημένο και καλαίσθητο μαθηματικό κείμενο. Τις περισσότερες φορές, ενώ συλλαμβάνουν την κρίσιμη ιδέα που οδηγεί στη λύση, «μπλοκάρουν», όταν από ένα σημείο και μετά η λύση του προβλήματος απαιτεί οργανωμένη γνώση ορισμών, μαθηματικών προτάσεων, τύπων και μεθόδων (διαδικασιών) απόδειξης. Κάποιοι από σας –συνάδελφοι μαθηματικοί– θα έχετε, πιστεύω, παραδείγματα μαθητών σας –μέτριων και αφανών κατά τα άλλα– που διακρίθηκαν σε διαδοχικούς διαγωνισμούς της Ε.Μ.Ε. Οι μαθητές αυτοί χωρίς συστηματική μελέτη, μάλλον θα αποτύγχαναν σε διαγωνισμούς τύπου Γενικών (Πανελλαδικών) Εξετάσεων, όπου εξετάζεται κυρίως η συγκρότηση του μαθητή περί τα αλγοριθμικά μαθηματικά και η συστηματική κατανόηση διαφόρων εννοιών. Όμως είναι περίπου βέβαιο ότι μπορεί να διαπρέψουν σε άλλους τομείς (π.χ. εμπόριο), όπου χρειάζεται κυρίως διορατικότητα, εφευρετικότητα, όχι τυποποιημένη σκέψη και γοργή σύλληψη της καλύτερης επιλογής ανάμεσα σε ένα πλή-θος προτεινομένων.

Εξαμηνιαίο Περιοδικό
Μαθηματική Παιδεία
... για τον καθηγητή

Αξιοσημείωτες Αλγεβρικές Ανισοταυτότητες και Εφαρμογές τους

Δημήτρης Μπουνάκης

Από την Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου είναι λίγο ή πολύ γνωστές στους μαθητές, κυρίως από ασκήσεις, οι παρακάτω απλές ανισοταυτότητες :

Για κάθε α, β, κ, λ, $\theta \in \mathbb{R}$ ισχύουν :

Α.	**$\alpha^2+\beta^2 \geq 2\alpha\beta$**	Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν α = β.
Β.	**$2\cdot(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2$**	Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν α = β.
Γ.	**$(\kappa^2+\lambda^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2) \geq (\kappa\alpha+\lambda\beta)^2$** **Ταυτότητα Lagrange**	Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν κβ = λα.
Δ.	**Αν θ > 0, τότε** $\theta+\frac{1}{\theta}\geq 2,\ \theta+\frac{\kappa^2}{\theta}\geq 2\kappa$	Η ισότητα ισχύει αντίστοιχα για θ = 1, θ = κ.
Ε.	**Αν α, β ≥ 0, τότε α+β ≥** $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν αβ = 0.

Οι «αθώες» αυτές ανισοταυτότητες (οι Δ και Ε υπό συνθήκη) είναι χρήσιμες στην αντιμετώπιση πολλών προβλημάτων, κυρίως με (ολικά) ακρότατα συναρτήσεων.

Βέβαια δεν δίνουν μία γενική μέθοδο εύρεσης ακρότατων, όπως η παράγωγος, αφού εφαρμόζονται σε ειδικής μορφής συναρτήσεις, όμως με κατάλληλη εφαρμογή τους μπορούν να εφαρμοστούν σε ένα μεγάλο πλήθος συναρτήσεων και μάλιστα σε συναρτήσεις που εμφανίζονται συχνά σε προβλήματα διαφόρων Μαθηματικών κλάδων.

Τις ανισοταυτότητες αυτές είναι αναγκαίο και χρήσιμο να τις έχει υπόψη του ο υποψήφιος της 1ης και της 4ης Δέσμης, όχι μόνο γιατί αποτελούν μέρος της βασικής Μαθηματικής υποδομής που πρέπει να διαθέτει, αλλά και γιατί μπορούν να τον απαλλάξουν από χρονοβόρες διαδικασίες εύρεσης ακρότατων (παραγώγιση, μονοτονία κλ.π.), καθώς και να πετύχει αποδείξεις διαφόρων σχέσεων με απλό και κομψό τρόπο.

Από τις ανισοταυτότητες αυτές ο υποψήφιος μπορεί να επικαλείται, όταν τις εφαρμόζει, την Α και τη Δ (για κ = 1), που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο της Α΄ Λυκείου ως εφαρμογές, ενώ τις υπόλοιπες πρέπει να τις αποδεικνύει.

Πιστεύουμε όμως ότι η χρησιμότητά τους είναι πολλαπλάσια του κόστους απόδειξής τους, το οποίο άλλωστε είναι μικρό, αφού οι αποδείξεις τους είναι αρκετά απλές και σύντομες. Οι ενδεικτικές εφαρμογές που ακολουθούν πιστεύω ότι θα ενισχύσουν τον ισχυρισμό αυτό.

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1

Έστω η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \dfrac{12x}{9+x^2}$

α. Να δειχτεί ότι είναι φραγμένη.

β. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της.

Λύση :

α. Η f έχει Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$, γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $9+x^2 > 0$.

Αρκεί, σύμφωνα με σχετική πρόταση του σχολικού βιβλίου, να υπάρχει κ > 0, ώστε :

$$|f(x)| \le \kappa, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Εφαρμόζουμε την ανισοταυτότητα Α με $\alpha = 3$, $\beta = |x|$ και έχουμε :

$$3^2+|x|^2 \ge 6|x| \iff \frac{|x|}{9+x^2} \le \frac{1}{6} \iff \frac{|12x|}{9+x^2} \le 2$$

Άρα $|f(x)| \le 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η f είναι φραγμένη ($\kappa = 2 > 0$).

β. Η ισότητα στη σχέση $|f(x)| \le 2$ ισχύει, λόγω των παραπάνω ισοδυναμιών και της ανισοταυτότητας Α, όταν και μόνο όταν $3 = |x| \Leftrightarrow x = \pm 3$.

Είναι $|f(x)| \le 2 \Leftrightarrow -2 \le f(x) \le 2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(3) = 2$, $f(-3) = -2$.

Άρα η f έχει μέγιστη τιμή 2 για $x = 3$ και ελάχιστη τιμή -2 για $x = -3$.

2

Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και θ η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $Μ(2α, 8α^2)$, $α > 0$, με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο η αρχή των αξόνων. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της εφθ, όταν το α μεταβάλλεται ($α > 0$).

Από θέμα 1ης Δέσμης, Γενικές εξετάσεις 1994

Λύση :

Σύμφωνα με σχετικό τύπο της Αναλυτικής Γεωμετρίας βρίσκουμε :

$$εφθ = \frac{4α}{1+32α^2}, \quad α > 0.$$

Από την ανισοταυτότητα Α (με $α = 1$, $β = α\sqrt{32}$), έχουμε :

$$1+32α^2 = 1+\left(α\sqrt{32}\right)^2 \ge 2α\sqrt{32} = 8α\sqrt{2}, \text{ οπότε } \frac{4α}{1+32α^2} \le \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν $1 = α\sqrt{32}$ ή $α = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Άρα η μέγιστη τιμή της εφθ είναι $\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $α = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

3

Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της συνάρτησης :

$$g(x) = \frac{θ}{|x|+\sqrt{θ^2 - x^2}}, \quad θ > 0 \text{ (σταθερά)}.$$

Λύση :

Η g έχει Πεδίο Ορισμού το διάστημα [–θ, θ]. Επειδή ο αριθμητής είναι σταθερός, αρκεί να βρούμε αντίστοιχα τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του παρανομαστή.

$$\text{Θέτουμε : } h(x) = |x| + \sqrt{\theta^2 - x^2}\ ,\ x \in [-\theta, \theta].$$

Από την ανισοταυτότητα Β με $\alpha = |x|$, $\beta = \sqrt{\theta^2 - x^2}$ έχουμε :

$$2(x^2+\theta^2-x^2) \geq \left(|x| + \sqrt{\theta^2 - x^2}\right)^2 \quad \text{ή} \quad 0 < h(x) \leq \theta\sqrt{2} \quad \text{ή}$$

$$\frac{1}{h(x)} \geq \frac{1}{\theta\sqrt{2}} \text{ ή } g(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}\text{, για } x \in [-\theta, \theta].$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν :

$$|x| = \sqrt{\theta^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = \theta^2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\theta}{\sqrt{2}} \in [-\theta, \theta].$$

Είναι $g\ \pm\frac{\theta}{\sqrt{2}}\ = \frac{\theta\sqrt{2}}{2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Άρα η ελάχιστη τιμή της g(x) είναι $\frac{\sqrt{2}}{2}$ για $x = \pm\frac{\theta}{\sqrt{2}}$.

Για την εύρεση της ελάχιστης τιμής της h(x) χρησιμοποιούμε την ανισοταυτότητα Ε και παίρνουμε :

$$|x| + \sqrt{\theta^2 - x^2} \geq \sqrt{x^2 + \theta^2 - x^2} = \theta \text{ ή } h(x) \geq \theta \text{ ή } \frac{1}{h(x)} \leq \frac{1}{\theta} \text{ ή } g(x) \leq 1,\ x \in [-\theta, \theta].$$

Η ισότητα ισχύει όταν $|x| \cdot \sqrt{\theta^2 - x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \pm\theta$.

Πράγματι $g(0) = g(\pm\theta) = 1$.

Άρα η g έχει μέγιστη τιμή 1 για $x = 0$ ή $x = \theta$ ή $x = -\theta$.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ :

Λαμβάνοντας υπόψη ότι η g είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [–θ, θ], ουσιαστικά δείξαμε ότι η g έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1$.

4

Από όλες τις ευθείες :

$$(\alpha+2)\cdot x+(1–2\alpha)\cdot y+3\alpha–4 = 0,\ \alpha\in \mathbb{R}$$

να βρεθεί αυτή που απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων.

Λύση :

Αρκεί να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης :

$$d(\alpha) = \frac{|3\alpha-4|}{\sqrt{(2+\alpha)^2+(1-2\alpha)^2}},\ \alpha\in \mathbb{R}.$$

Σκεπτόμενοι να χρησιμοποιήσουμε την ανισοταυτότητα Γ :

$$(\kappa^2+\lambda^2)\cdot\big((2+\alpha)^2+(1–2\alpha)^2\big) \geq \big(\kappa\cdot(2+\alpha)+\lambda\cdot(1–2\alpha)\big)^2$$

αναζητάμε κ, $\lambda \in \mathbb{R}$ με :

$$\kappa\cdot(2+\alpha)+\lambda\cdot(1–2\alpha) = 3\alpha–4 \ \text{ ή }\ (\kappa–2\lambda)\cdot\alpha+(2\kappa+\lambda) = 3\alpha–4.$$

Αρκεί προς τούτο $2\kappa+\lambda = –4$ και $\kappa–2\lambda = 3$, οπότε $\kappa = –1$, $\lambda = –2$.

Έτσι έχουμε :

$$[(–1)^2+(–2)^2]\cdot[(2+\alpha)^2+(1–2\alpha)^2] \geq (–2–\alpha–2+4\alpha)^2 \quad \text{ή}$$

$$5[(2+\alpha)^2+(1–2\alpha)^2] \geq (3\alpha–4)^2 \quad \text{ή} \quad d(\alpha) \leq \sqrt{5}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν $\kappa\cdot(1–2\alpha) = \lambda\cdot (2+\alpha) \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{4}$.

Άρα η μέγιστη απόσταση είναι $\sqrt{5}$ και η ζητούμενη ευθεία προκύπτει για $\alpha = -\frac{3}{4}$ και είναι $x + 2y – 5 = 0$.

5

Από όλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}(t) = \begin{pmatrix} t^2-2t+1 \\ t^2-6t+9 \end{pmatrix}$, $t\in \mathbb{R}$

να βρεθεί αυτό με το μικρότερο μήκος.

Λύση :

Πρέπει να βρούμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης :

$$f(\mathrm{t}) = (\vec{\alpha}(\mathrm{t})(= \sqrt{(\mathrm{t}-1)^4 + (\mathrm{t}-3)^4}\,,\ \mathrm{t} \in \mathrm{IR}\,.$$

Με διπλή εφαρμογή της ανισοταυτότητας Β πρώτα για $\alpha = (\mathrm{t}-1)^2$, $\beta = (3-\mathrm{t})^2$ και μετά για $\alpha = \mathrm{t}-1$, $\beta = 3-\mathrm{t}$, έχουμε :

$$2\ \left((\mathrm{t}-1)^2\right)^2 + \left((3-\mathrm{t})^2\right)^2\ \ \geq \left((\mathrm{t}-1)^2 + (3-\mathrm{t})^2\right)^2 \geq\ \frac{1}{2}(\mathrm{t}-1+3-\mathrm{t})^2\ {}^2\ .$$

Άρα $2\ (\mathrm{t}-1)^4 + (3-\mathrm{t})^4\ \ \geq 4$ ή $f(\mathrm{t}) \geq \sqrt{2}$.

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν :

$$(\mathrm{t}-1)^2 = (3-\mathrm{t})^2 \quad \text{και} \quad \mathrm{t}-1 = 3-\mathrm{t}, \ \text{ δηλαδή όταν } \mathrm{t} = 2.$$

Άρα το ζητούμενο διάνυσμα είναι το $\vec{\alpha}(2) = \begin{matrix}1\\1\end{matrix}$.

6	Έστω $\Omega = \{1, 2, 3\}$ ένας δειγματικός χώρος και $\alpha = P(1)$, $\beta = P(2)$ και $\gamma = P(3)$ οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του με $\alpha\cdot\beta\cdot\gamma \neq 0$. **α.** Να αποδειχτεί ότι $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{4}{\gamma} \geq 16$. **β.** Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{4}{\gamma} = 16$, να βρεθούν οι α, β, γ.

Λύση :

α. Επειδή $1 = \alpha+\beta+\gamma$, α, β, γ θετικοί, έχουμε :

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{4}{\gamma} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta} + \frac{4(\alpha+\beta+\gamma)}{\gamma} =$$

$$= 6 + \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}\right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{4\alpha}{\gamma}\right) + \left(\frac{\gamma}{\beta} + \frac{4\beta}{\gamma}\right) \geq 6 + 2 + 4 + 4 = 16,$$

σύμφωνα με τις ανισοταυτότητες Δ.

β. Από τα παραπάνω έχουμε :

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{4}{\gamma} = 16 \Leftrightarrow \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{4\alpha}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{4\beta}{\gamma} = 2 + 4 + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^2 + \alpha^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + \frac{\gamma^2 + 4\alpha^2 - 4\alpha\gamma}{\alpha\gamma} + \frac{\gamma^2 + 4\beta^2 - 4\beta\gamma}{\beta\gamma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta - \alpha)^2}{\alpha\beta} + \frac{(\gamma - 2\alpha)^2}{\alpha\gamma} + \frac{(\gamma - 2\beta)^2}{\beta\gamma} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ και } \gamma = 2\alpha = 2\beta, (\alpha\beta, \alpha\gamma, \beta\gamma > 0).$$

Επειδή και α+β+γ = 1, προκύπτει $\alpha = \beta = \frac{1}{4}, \gamma = \frac{1}{2}$.

7	Από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς $z = \sqrt[4]{x+3} + i \cdot \sqrt[4]{5-x}$, $-3 \leq x \leq 5$, να βρεθεί αυτός του οποίου η εικόνα απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου.

Λύση :

Αρκεί να βρούμε τη μέγιστη τιμή από τις αποστάσεις (μέτρα) :

$$|z| = \sqrt{\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}}, \ x \in [-3, 5].$$

Από την ανισοταυτότητα Β έχουμε :

$$2\left[\left(\sqrt{x+3}\right)^2 + \left(\sqrt{5-x}\right)^2\right] \geq \left(\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}\right)^2 \Leftrightarrow 16 \geq |z|^4 \Leftrightarrow |z| \leq 2, \ x \in [-3, 5].$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν(από τη Β) :

$$\sqrt{x+3} = \sqrt{5-x} \Leftrightarrow x+3 = 5-x \Leftrightarrow x = 1 \in [-3, 5].$$

Άρα η μέγιστη απόσταση είναι 2 και ο ζητούμενος μιγαδικός είναι ο $z = \sqrt{2} + i \cdot \sqrt{2}$.

Άσκηση : Με τη βοήθεια της ανισοταυτότητας Ε να βρείτε ποιοι από τους παραπάνω μιγαδικούς απέχουν λιγότερο από την αρχή των αξόνων.

Απάντηση : $\left(\sqrt[4]{8}, i\cdot\sqrt[4]{8}\right)$.

8	Έστω z, ω μιγαδικοί με $\left(3|z|-4|w|\right)=10$. Να αποδειχτεί ότι $|z|^2+|w|^2 > 4$.

Λύση :

Από την ανισοταυτότητα Γ έχουμε :

$$\left(3^2+(-4)^2\right)\cdot\left(|z|^2+|w|^2\right)\geq\left(3|z|-4|w|\right)^2 \text{ ή}$$

$$25\left(|z|^2+|w|^2\right)\geq 100 \text{ ή } |z|^2+|w|^2\geq 4.$$

Η ισότητα ισχύει όταν $3|w| = -4|z| \Leftrightarrow z = w = 0$, άτοπο, λόγω της υπόθεσης, άρα δεν ισχύει η ισότητα. Επομένως $|z|^2+|w|^2 > 4$.

9	Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $$f(x) = 2+|x^2-3x+2|+\frac{9}{|x^2-3x+2|+1}$$

Λύση :

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $1+|x^2-3x+2| > 0$, οπότε η f έχει Πεδίο Ορισμού το $\mathbb{R}$ και από την ανισοταυτότητα Δ (για κ = 3) έχουμε :

$$1+|x^2-3x+2|+\frac{9}{|x^2-3x+2|+1}\geq 6 \quad \text{ή} \quad f(x)\geq 7,\ x\in\mathbb{R}.$$

Η ισότητα ισχύει όταν και μόνο όταν :

$$1+|x^2-3x+2| = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-3x+2 = \pm 2.$$

Η εξίσωση $x^2-3x+2 = 2$ έχει τις λύσεις 0, 3, ενώ η $x^2-3x+2 = -2$ είναι αδύνατη.

Άρα η f έχει ελάχιστη τιμή 7, για $x = 0$ ή $x = 3$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης :

$$f(t) = \frac{t}{4+t^2}.$$

Απ. $\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$

2. Να αποδειχτεί ότι οι ευθείες :

$$\alpha x+(\alpha-2)y+7\alpha-6 = 0,\ \alpha\in\mathbb{R}$$

διέρχονται από ένα σημείο και στη συνέχεια να βρεθεί ποια από όλες απέχει περισσότερο από την αρχή των αξόνων.

Απ. $4x+3y+25 = 0$

3. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή των συναρτήσεων :

$$f(x) = x+\sqrt{4-x^2},\ \ g(x) = |x|\cdot\sqrt{4-x^2}$$

Απ. $\sqrt{8}$, 2

4. Από όλους τους μιγαδικούς αριθμούς :

$$z = x+\frac{1}{1-x}+i\cdot\left(1+x+\frac{1}{1-x}\right),\ \ x\neq 1,$$

να βρεθεί αυτός με το μικρότερο μέτρο.

Απ. $-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{1}{2}$

5. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος, A ένα ενδεχόμενό του και $\alpha = P(A)$, $\beta = P(A')$, $\alpha\cdot\beta\neq 0$.

α. Να αποδειχτεί ότι : $4\alpha\cdot\beta\leq 1$, $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\geq 4$.

β. Αν $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=4$, να βρεθούν οι α, β.

γ. Να αποδειχτεί ότι $\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)^2\geq\frac{25}{2}$. Πότε ισχύει η ισότητα ;

6. **α.** Αν $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$, να αποδειχτεί ότι $(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\cdot\beta$.

β. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\nu\in\mathbb{N}^*$, να δειχτεί ότι :

$$(e^{-x}+1)\cdot(7-e^{-x})\leq 16,\ \ 2x^{\nu}-x^{2\nu}\leq 1.$$

7. Έστω α, β θετικοί αριθμοί. Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = \alpha\cdot\eta\mu x+\beta\cdot\sigma\upsilon\nu x,\quad g(x) = \alpha x+\beta\cdot\sqrt{1-x^2}$$

έχουν την ίδια μέγιστη τιμή.

8. **α.** Έστω α, $\beta\in\mathbb{R}$ όχι και οι δύο μηδέν με $\alpha\cdot\beta \geq 0$.

Να αποδειχτεί ότι : $1 \leq \dfrac{(\alpha+\beta(}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \leq \sqrt{2}$. Πότε ισχύουν οι ισότητες ;

β. Απ' όλες τις ευθείες $\alpha x+\beta y+\alpha+\beta = 0$, $|\alpha|+|\beta| > 0$, $\alpha\cdot\beta \geq 0$, α, $\beta\in\mathbb{R}$, να βρεθούν αυτές που απέχουν περισσότερο, λιγότερο από το σημείο (1, 1).

γ. Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης :

$$g(t) = \frac{2t^2-2t+1}{\sqrt{t^4+(t-1)^4}},\ t\in\mathbb{R}.$$

9. Αν α, $\beta\in\mathbb{R}^+$ και x, $y\in\mathbb{R}_+^*$ να αποδείξετε ότι :

$$\left(\alpha\frac{x}{y}+\beta\right)^2 + \left(\alpha\frac{y}{x}+\beta\right)^2 \geq 2(\alpha+\beta)^2$$

Θέμα Μαθηματικού Διαγωνισμού Ε.Μ.Ε. Ευκλείδης 1995

ΑΠΑΡΑΙΤΗΤΑ ΒΟΗΘΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ Α΄ ΔΕΣΜΗΣ ΚΑΙ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ

ΔΗΜΗΤΡΗ ΜΠΟΥΝΑΚΗ

- ***ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΚΑΙ ΓΕΝΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ***
- ***ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ***
- ***ΘΕΜΑΤΑ ΑΝΑΛΥΣΗΣ (I, II)***

ΠΑΡΑΓΓΕΛΙΕΣ ΤΗΛ. (081)252140 ΚΑΙ ΣΤΑ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ

— *Ας παρατηρήσουμε λίγο το σχήμα της άσκησης. Τι αποδείξαμε στο (ii) ;*

— Ότι Μ μέσο της ΒΓ.

— *Δηλαδή για το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, η ΑΜ τι είναι ;*

— Διάμεσος.

— *... και με τι αποδείξαμε ότι είναι ίσο το ΑΜ ;*

— Με το ΜΒ και το ΜΓ, δηλαδή με το $\frac{ΒΓ}{2}$!!

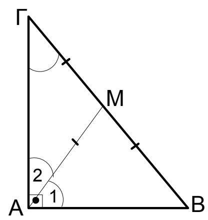
— *Άρα στην άσκησή μας, τι σχέση έχει η διάμεσος με την υποτείνουσα;*

— Η διάμεσος είναι το μισό της υποτείνουσας.

— *Λέτε να συμβαίνει αυτό σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ; Ας προβληματιστούμε. Και πρώτα απ' όλα, ποιο είναι το* ***πρόβλημα*** *μας ;*

— Θα εξετάσουμε αν σε ένα τυχαίο ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος προς την υποτείνουσα είναι το μισό της υποτείνουσας.

— *Ας κάνουμε λοιπόν ένα καινούριο σχήμα, ξεκαθαρίζοντας ποιο είναι το ζητούμενο και ποια η υπόθεση.*



Υπόθεση	$\hat{Α} = 90°$, ΜΒ = ΜΓ
Ζητούμενο	ΑΜ = $\frac{ΒΓ}{2}$ = ΜΒ = ΜΓ → **Στόχος !!**

— *Τι κοιτάμε πρώτα σε μία άσκηση ;*

— Το ζητούμενο !!

— *Γιατί ;*

— Γιατί αυτό μας δείχνει το δρόμο (τρόπο) για να προχωρήσουμε.

— *Κι' αν αυτό δεν μας δείχνει άμεσα τίποτα, τι κάνουμε ; Πως αντλούμε άλλες πληροφορίες ;*

— **Κάνουμε ανάλυση στο πρόβλημα**. Θεωρούμε δηλαδή ότι συμβαίνει το ζητούμενο κι έτσι παρατηρούμε τι στοιχεία εμφανίζονται !!

— *Ας το κάνουμε αυτό λοιπόν ...*
Ας θεωρήσουμε ότι ισχύει :
ΑΜ = ΜΒ και ΑΜ = ΜΓ.
Τι θα έλεγα τότε ;

— ΑΜ = ΜΒ και ΑΜ = ΜΓ

$\downarrow$ $\downarrow$

ΑΜΒ και ΑΜΓ
ισοσκελές ισοσκελές

$\downarrow$ $\downarrow$

$\hat{A}_1 = \hat{B}$ και $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$

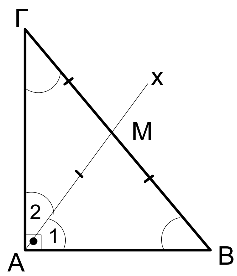
— *Παρακάτω ...*

— *Τι παθαίνει δηλαδή η ορθή γωνία από τη διάμεσο ;*

— Χωρίζεται σε δύο γωνίες, αντίστοιχα ίσες με τις $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

— *Άρα η ανάλυση που κάναμε μας οδηγεί στη σκέψη να χωρίσουμε την* $\hat{A}$ *με μια ημιευθεία σε δύο γωνίες ίσες αντίστοιχα με τις* $\hat{B}$ *êáé* $\hat{\Gamma}$. *Πριν το κάνουμε αυτό σ' ένα σχήμα, ας σκεφτούμε αν είναι δυνατό.*

— Είναι !
Γιατί $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ οξείες (μικρότερες της ορθής).



— *Ωραία ! Έχουμε φέρει τώρα την Αx που τέμνει τη ΒΓ στο Μ, ώστε* $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$. Ας παρατηρήσουμε τώρα τι σχέση έχουν οι γωνίες $\hat{A}_1$ και $\hat{A}_2$.

— Έχουν άθροισμα 90°, δηλαδή $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90°$, (1).

— *Άθροισμα 90°... , άθροισμα 90°... Μας θυμίζει τίποτα αυτό ; Υπάρχουν άλλες τέτοιες γωνίες στο σχήμα ;*

— Υπάρχουν οι $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$, αφού $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$, (2)

— *Τότε οι σχέσεις (1) και (2) τι μας δίνουν ;*

— $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$ δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{B}$ αφού $\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$.

— *Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν έχουμε :*
Φέρνοντας την ΑΜ ώστε :

$$\hat{A}_2 = \hat{\Gamma} \quad \textit{τότε} \quad \hat{A}_1 = \hat{B}.$$

Τι σημαίνουν αυτά ;

$\hat{A}_2 = \hat{\Gamma}$	$\hat{A}_1 = \hat{B}$.
↓	↓
Το ΜΑΓ είναι ισοσκελές	Το ΜΑΒ είναι ισοσκελές
↓	↓
ΜΑ = ΜΓ	ΜΑ = ΜΒ

— *Και από εδώ ;*

— ΜΑ = ΜΒ = ΜΓ, δηλαδή το ζητούμενο.

— ***Μπράβο παιδιά !!*** *Πάρα πολύ ωραία !!*

— *Ας μας πει τώρα κάποιος, τι αποδείξαμε.*

— Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, η διάμεσος προς την υποτείνουσα ισούται με το μισό της υποτείνουσας.

— *Ας επισημάνουμε τώρα και τα εξής :*

1. *Για ποια διάμεσο μιλάμε ;*

— Μόνο για τη διάμεσο προς την υποτείνουσα.

2. *Αν σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, φέρω τη διάμεσο προς την υποτείνουσα, τι εμφανίζονται τότε στο σχήμα ;*

— Δύο ισοσκελή τρίγωνα, το ΜΑΓ και το ΜΑΒ.

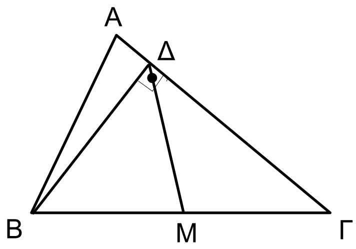
— *Για τις γωνίες στο Α, τι μπορούμε αν πούμε ;*

— Η μία είναι ίση με τη $\hat{B}$ και η άλλη με τη $\hat{\Gamma}$.

— *Μπράβο ! Τώρα αν ζωγραφίσετε ένα τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ, φέρετε το ύψος ΒΔ και ονομάσετε Μ το μέσο της ΒΓ, μπορείτε να διακρίνετε τα στοιχεία του θεωρήματος ;*

— Το τρίγωνο ΔΒΓ είναι ορθογώνιο, η ΔΜ διάμεσος προς την υποτείνουσα.

Άρα : $\Delta M = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma$.



— *Για προσπαθήστε τώρα στα τετράδιά σας να λύσετε την εξής εφαρμογή :*
"Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ και ΒΔ, ΓΕ τα ύψη. Αν Μ το μέσο της ΒΓ, αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές".

— *Παιδιά, ξαναγυρίζουμε στο θεώρημα. Έχουμε αποδείξει ότι :*

*"**Αν** ΑΒΓ ορθογώνιο στην $\hat{A}$,*

***τότε** η διάμεσος ΑΜ = $\frac{\text{ÂÃ}}{2}$ ".*

— *Τι μας θυμίζει η έκφραση : "αν... τότε ..." ;*

— Μία συνεπαγωγή.

— *Μπορείτε να μου γράψετε με τη μορφή μιας συνεπαγωγής το θεώρημα ;*

— $\hat{A} = 90° \Rightarrow \mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$.

— *Πάρα πολύ ωραία ! Μήπως μπορείτε τώρα να μου γράψετε την αντίστροφη συνεπαγωγή και να τη διατυπώσετε με λόγια ;*

— $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \hat{A} = 90°$ ή

"Αν σε ένα τρίγωνο μία διάμεσος είναι το μισό της πλευράς στη οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στην κορυφή, από την οποία φέρνουμε τη διάμεσο".

— *Μπράβο ! Πάρα πολύ ωραία !*
Έχοντας δηλαδή σαν ***υπόθεση*** *:*
ΑΜ διάμεσος και

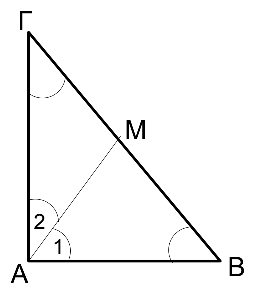
$$AM = MB = M\Gamma,$$

θα αποδείξω ότι :

$$\hat{A} = 90^{o} \longrightarrow \textbf{Στόχος}.$$

Πως δουλεύουμε γενικά στα αντίστροφα ;

— Με απαγωγή σε άτοπο ή χρησιμοποιώντας παρόμοιες σχέσεις με αντίστροφη σειρά.



— *Έχουμε στόχο την $\hat{A}$, που αν την κοιτάξω στο σχήμα, βλέπω να αποτελείται από δύο γωνίες :*

$$\hat{A}_1 \text{ êáé } \hat{A}_2$$

— *Πάω τώρα στην υπόθεση :*

$$MA = MB \qquad MA = M\Gamma$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$;\,; \qquad\qquad ;\,;$$

— ΜΑ = ΜΒ　　ΜΑ = ΜΓ
↓　　↓
ΜΑΒ　　ΜΑΓ
ισοσκελές　　ισοσκελές
↓　　↓

$$\hat{A}_1 = \hat{B},\ (1) \quad \text{και} \quad \hat{A}_2 = \hat{\Gamma},\ (2)$$

— *... και αφού με ενδιαφέρουν γωνίες*

— *... και πρέπει να εμφανίσω το στόχο μου, δηλαδή τη γωνία $\hat{A}$, τι πρέπει να κάνω τις σχέσεις (1) και (2) ;*

— Να τις προσθέσω κατά μέλη.

— *Μπράβο ! Πολύ ωραία ! Ας το κάνουμε αυτό :* $\hat{A}_1+\hat{A}_2=\hat{B}+\hat{\Gamma}$

δηλαδή $\hat{A}=\hat{B}+\hat{\Gamma}$, *(3).*

Εγώ όμως θέλω να υπολογίσω την $\hat{A}$ *σε μοίρες... μοίρες ; Όταν σε τυχαίο τρίγωνο ακούω για μοίρες, τι μου έρχεται στο μυαλό ;*

— $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180°$.

— *Κι απ' αυτές τις τρεις γωνίες, εμένα μου χρειάζεται η* $\hat{A}$. *Άρα, λόγω της σχέσης (3), παίρνω :*

$$\hat{A}+\hat{A}=180° \Leftrightarrow$$

$$2\hat{A}=180° \Leftrightarrow \hat{A}=90° !!$$

Ουσιαστικά το αντίστροφο αποτελεί έναν ακόμα τρόπο για να δείχνουμε ότι ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο ! Ξέρετε άλλους τρόπους; Θέλω να το σκεφτείτε για το άλλο μάθημα.

— *Τώρα θά'θελα κάποιος να μου γράψει με μία σχέση το ευθύ και το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος.*

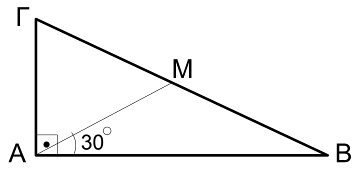
— $\hat{A}=90° \Leftrightarrow \mu_\alpha=\dfrac{\alpha}{2}$

— *Και πως διαβάζεται αυτό ;*

— Ένα τρίγωνο είναι ορθογώνιο **αν και μόνο αν** μία διάμεσός του είναι το μισό της πλευράς που αντιστοιχεί.

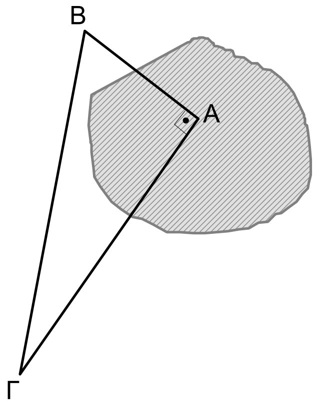
— *Πάρα πολύ ωραία παιδιά. Ευχαριστώ για το ενδιαφέρον σας και τη συνεργασία. Πιστεύω να μη σας κούρασα ! Στο σπίτι σας, θα ήθελα να προσπαθήσετε να λύσετε τις ασκήσεις της φωτοτυπημένης σελίδας, που θα σας δώσω αμέσως.*

1. Στο διπλανό σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και η $M\hat{A}\Gamma = 30°$. Υπολογίστε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.



2. Έστω τρίγωνο ΑΗΓ και Μ μέσο της ΑΓ. Αν $HM = \frac{A\Gamma}{2}$, τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΗΓ και γιατί ; Κάντε ένα σχήμα.

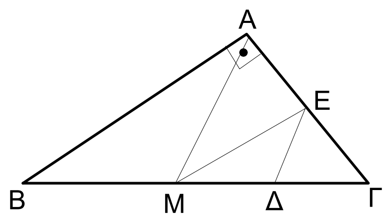
3. Σε μία λίμνη υπάρχει ένας βράχος Α, ενώ για τα σημεία Β, Γ έξω από τη λίμνη, ισχύει ότι $B\hat{A}\Gamma = 30°$ και ΒΓ = 100 m.



i. Σε ποιο σημείο πρέπει να σταθεί ένας μαθητής Μ για να βρει εύκολα την απόστασή του από το βράχο και πόση θα είναι αυτή ;

ii. Αν η γωνία $A\hat{B}\Gamma = 60°$, ποιο σημείο είναι πιο κοντά στο βράχο, το Β ή αυτό που βρήκατε στο ερώτημα (i) και γιατί ;

4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα πάρκο σχήματος ορθογωνίου τριγώνου με ΒΓ = 8 Km. Έστω Μ το μέσο της ΒΓ και Δ το μέσο της ΜΓ, ενώ ο δρόμος ΜΕ // ΒΑ.



Ένας δρομέας x_1 τρέχει τη διαδρομή Α, ενώ ένας άλλος x_2 τη διαδρομή από το Ε στο Δ και ξανά στο Ε. Ποιος κάνει περισσότερα Km και γιατί ;

5. Από την κορυφή Α ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρνω ευθεία (ε) // ΒΓ. Αποδείξτε ότι η ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζει η (ε) με τη διάμεσο ΑΜ.