Η έννοια της απολύτου τιμής πραγματικού αριθμού

Ορισμός 1ος: ***Ονομάζουμε απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού x, την οποία συμβολίζουμε με το σύμβολο $|x|$, την απόσταση του σημείου $A(x)$ του άξονα των πραγματικών αριθμών από την αρχή του $O(0)$. Δηλαδή:***

$$|x| = (OA) \geq 0 \quad \text{για κάθε} \;\; x \in IR.$$

Επομένως το εξαγόμενο της απολύτου τιμής οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι αριθμός μη αρνητικός δηλαδή μεγαλύτερος ή ίσος του μηδενός.

Ορισμός 2ος: ***Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού x είναι[1] ο ίδιος αριθμός x, αν αυτός είναι θετικός ή μηδέν (διαφορετικά μη αρνητικός), ή ο αντίθετος του αν ο αριθμός αυτός είναι αρνητικός. Δηλαδή:***

$$|x| = \begin{cases} x & \text{αν} \;\; x \geq 0 \\ -x & \text{αν} \;\; x < 0 \end{cases}.$$

Παράδειγμα: $|+2| = |2| = 2,\quad |-3| = -(-3) = 3,\quad |-\sqrt{2}| = -(-\sqrt{2}) = \sqrt{2},\quad |0| = 0.$

Συνέπειες του ορισμού της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού:

A. $|x| \geq 0,\;\; \text{για κάθε} \;\; x \in IR \qquad (1).$

B. $|-x| = |x|,\;\; \text{για κάθε} \;\; x \in IR \qquad (2).$

C. $|x| \geq x,\;\; \text{για κάθε} \;\; x \in IR \qquad (3).$

Πράγματι, αν $x \geq 0 \Rightarrow |x| = x$. ***Συνεπώς η*** (3) ***ισχύει ως ισότητα, ενώ αν:***

$x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0 > x$, ***οπότε η*** (3) ***ισχύει ως ανισότητα. Άρα η*** (3) ***ισχύει σε κάθε περίπτωση.***

D. $|x| \geq -x,\;\; \text{για κάθε} \;\; x \in IR \qquad (4).$

Γιατί, $\text{αν} \;\; x \geq 0 \Rightarrow |x| = x \geq 0 \geq -x$, ***ενώ αν:*** $x < 0 \Rightarrow |x| = -x > 0 > x.$

---

[1] *Διαφορετικά η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού είναι ο αριθμός αυτός χωρίς το πρόσημο του.*

E. ***Από τις (3) και (4) έχουμε:***

$$\left.\begin{cases}|x|-x\geq 0 & \text{για κάθε } x\in IR\\ \qquad\qquad \text{και} & \\ |x|+x\geq 0 & \text{για κάθε } x\in IR\end{cases}\right\}\Leftrightarrow -|x|\leq x\leq |x| \quad \text{για κάθε } x\in IR \qquad (5).$$

Σημειώνεται ότι:

1. ***<u>Ουδέποτε</u> ισχύει η διπλή ανισότητα:*** $-|x|<x<|x|$.

   (Για την απόδειξη εξετάστε τις περιπτώσεις: $x=0$, $x>0$ και $x<0$).

2. ***Λόγω της (5) η απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού x είναι ο μέγιστος των αριθμών $\{-x \text{ και } x\}$. Γι' αυτό γράφουμε:***

$$|x|=Max\{-x, \quad x\}\geq 0, \quad \text{για κάθε } x\in IR \qquad (6).$$

F. ***Ισχύει:*** $|x|^2=x^2$ ή γενικότερα $|x|^{2n}=x^{2n}$, για κάθε $x\in IR$ και $n\in N$ (7).

Πράγματι,

1. ***Αν*** $x\geq 0\Rightarrow |x|^2=|x||x|=x.x=x^2$ ***ενώ αν:***
2. $x<0\Rightarrow |x|^2=|x||x|=(-x)(-x)=x^2$.
3. ***Γενικότερα, είναι:*** $|x|^{2n}=\left(|x|^2\right)^n=\left(x^2\right)^n=x^{2n}$, για κάθε $x\in IR$ και $n\in N$.

G. ***Είναι επίσης:***

$$|x|^{2n+1}=\left\{\begin{matrix}x^{2n+1} & \text{αν} & x\geq 0\\ & \text{ή} & \\ -x^{2n+1} & \text{αν} & x<0\end{matrix}\right\}, \quad \text{για κάθε } x\in IR \quad \text{και } n\in N \qquad (8).$$

Η απόδειξη της (8) αφήνεται ως άσκηση.

Ιδιότητες των απολύτων τιμών

1. *Η απόλυτη τιμή του γινομένου δύο πραγματικών αριθμών ισούται με το γινόμενο των απολύτων τιμών τους: Δηλαδή:*

$$|\boldsymbol{\alpha\beta}| = |\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|, \quad \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{IR} \qquad (\boldsymbol{I_1}).$$

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:

$$|\boldsymbol{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n}| = |\boldsymbol{\alpha_1}||\boldsymbol{\alpha_2}|\cdots|\boldsymbol{\alpha_n}|, \quad \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon} \quad \boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n} \in \boldsymbol{IR}, \quad \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}^* \qquad (\boldsymbol{I'_1}).$$

2. *Η απόλυτη τιμή του πηλίκου δύο πραγματικών αριθμών ισούται με το πηλίκο των απολύτων τιμών τους: Δηλαδή:*

$$\left|\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}}\right| = \frac{|\boldsymbol{\alpha}|}{|\boldsymbol{\beta}|}, \quad \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{IR}, \quad \boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0} \qquad (\boldsymbol{I_2}).$$

3. *Η απόλυτη τιμή του αθροίσματος δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση του αθροίσματος των απολύτων τιμών τους: Δηλαδή:*

$$|\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|, \quad \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{IR} \qquad (\boldsymbol{I_3}).$$

Γενικότερα αποδεικνύεται ότι:

$$|\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + \boldsymbol{\alpha_n}| = |\boldsymbol{\alpha_1}| + |\boldsymbol{\alpha_2}| + \cdots + |\boldsymbol{\alpha_n}|, \quad \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon} \quad \boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha_n} \in \boldsymbol{IR}, \quad \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}^* \qquad (\boldsymbol{I'_3}).$$

4. *Η απόλυτη τιμή της διαφοράς δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση του αθροίσματος των απολύτων τιμών τους: Δηλαδή:*

$$|\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}| \leq |\boldsymbol{\alpha}| + |\boldsymbol{\beta}|, \quad \boldsymbol{\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon} \quad \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \boldsymbol{IR} \qquad (\boldsymbol{I_4}).$$

5. *Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των απολύτων τιμών δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση της απολύτου τιμής του αθροίσματος τους: Δηλαδή:*

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta|, \quad \text{για κάθε} \quad \alpha, \beta \in IR \qquad (I_5).$$

6. *Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των απολύτων τιμών δύο πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη ή ίση της απολύτου τιμής της διαφοράς τους: Δηλαδή:*

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha - \beta|, \quad \text{για κάθε} \quad \alpha, \beta \in IR \qquad (I_6).$$

7. **Αν $\theta > 0$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:**

$$|x| \leq \theta \Leftrightarrow -\theta \leq x \leq \theta \qquad (I_7),$$
$$|x| \geq \theta \Leftrightarrow x \leq -\theta \quad \text{ή} \quad x \geq \theta \qquad (I_8).$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ:

A. **Αν $\theta > 0$ τότε:** $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \pm\theta$.

B. **Αν $\theta \in IR$ η εξίσωση:** $|x| = |\theta| \Leftrightarrow x = \pm\theta$.

C. **Εφόσον ισχύει**

$$|\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n| = |\alpha_1||\alpha_2| \cdots |\alpha_n|, \quad \text{για κάθε} \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in IR, \quad n \in N^*,$$

για $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \alpha$, *θα είναι:*

$$|\alpha.\alpha \cdots \alpha| = |\alpha||\alpha| \cdots |\alpha| \Rightarrow |\alpha^n| = |\alpha|^n.$$

Συνεπώς: $|\alpha^n| = |\alpha|^n$, **για κάθε** $\alpha \in IR$ **και** $n \in N^*$ $\quad (I_9)$.

D. **Οι ιδιότητες** (I_3), (I_4), (I_5) **και** (I_6) **δεδομένου ότι ισχύει και** $|\alpha| - |\beta| \leq \big||\alpha| - |\beta|\big|$ **συγκεντρωτικά γράφονται:**

$$|\alpha|-|\beta| \leq \big||\alpha|-|\beta|\big| \leq |\alpha \pm \beta| \leq |\alpha|+|\beta|.$$

Ε. ***Υπενθυμίζω επίσης ότι για κάθε*** $\alpha \in IR$ ***είναι:*** $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$.

Εφαρμογές:

1. ***Αν*** $\alpha \in IR$ ***τότε:*** $\big||\alpha|\big| = |\alpha|$.

Πράγματι εφόσον $|\alpha| \geq 0$, ***για κάθε*** $\alpha \in IR$, ***σύμφωνα με τον ορισμό της απολύτου τιμής θα είναι:*** $\big||\alpha|\big| = |\alpha|$.

2. ***Για τους πραγματικούς αριθμούς*** α ***και*** β ***δίδεται ότι:*** $|\alpha|+|\beta|<2$.

Δείξτε ότι θα ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις: $|\alpha|<2$ *και* $|\beta|<2$.

Από την $|\alpha|+|\beta|<2$ ***έχουμε:***

- $\mathbf{2}-|\beta|>|\alpha| \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{2}-|\beta|>0 \Leftrightarrow |\beta|<2$ ***και***
- $\mathbf{2}-|\alpha|>|\beta| \geq \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{2}-|\alpha|>0 \Leftrightarrow |\alpha|<2.$

3. ***Για τους πραγματικούς αριθμούς*** α ***και*** β ***δίδεται ότι:*** $|\alpha\beta|<2$.

Δείξτε ότι θα ισχύει μια τουλάχιστον από τις σχέσεις: $|\alpha|<2$ *και* $|\beta|<2$.

Πράγματι, αν δεν ίσχυε καμία από τις $|\alpha|<2$ *και* $|\beta|<2$ ***θα ήταν:***

$$\left.\begin{cases}|\alpha| \geq 2 \\ \text{και} \\ |\beta| \geq 2\end{cases}\right\} \Rightarrow |\alpha||\beta| \geq 4 \Rightarrow |\alpha\beta| \geq 4 \quad \text{αδύνατον}.$$

Επομένως θα ισχύει μια τουλάχιστον από τις σχέσεις $|\alpha|<2$ *και* $|\beta|<2$.

4. ***Αν*** $\alpha,\beta \in IR^*$, $\alpha|\beta|-\beta|\alpha|=0$ ***δείξτε ότι οι αριθμοί*** α ***και*** β ***είναι ομόσημοι.***

Η σχέση: $\alpha|\beta|-\beta|\alpha|=0 \Leftrightarrow \alpha|\beta|=\beta|\alpha| \overset{\alpha,\beta\neq 0}{\Leftrightarrow}$

$$\frac{|\alpha|}{|\beta|}=\frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|=\frac{\alpha}{\beta} \overset{\alpha,\beta\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\alpha}{\beta}>0 \Leftrightarrow \alpha,\beta \quad \text{ομόσημοι}.$$

Ο μέγιστος και ο ελάχιστος δυο πραγματικών αριθμών

Ορισμός: ***Δοθέντων δύο πραγματικών αριθμών*** α ***και*** β ***με το σύμβολο*** $max\{\alpha,\ \beta\}$ ***συμβολίζουμε τον <u>μη μικρότερο</u> εξ' αυτών, και τον ονομάζουμε μέγιστο των*** α ***και*** β. ***Δηλαδή:***

$$max\{\alpha,\ \beta\} = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha \geq \beta \\ & \acute{\eta} \\ \beta, & \alpha\nu \quad \beta > \alpha \end{cases}$$

Αντίστοιχα, ***με το σύμβολο*** $min\{\alpha,\ \beta\}$ ***συμβολίζουμε τον <u>μη μεγαλύτερο</u> των αριθμών*** α ***και*** β, ***και τον ονομάζουμε ελάχιστο τους. Δηλαδή:***

$$min\{\alpha,\ \beta\} = \begin{cases} \alpha, & \alpha\nu \quad \alpha < \beta \\ & \acute{\eta} \\ \beta, & \alpha\nu \quad \alpha \geq \beta \end{cases}.$$

Παράδειγμα: ***Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς είναι:***

$$max\{1,-1\} = 1,\quad max\{\sqrt{2},\ \sqrt{2}\} = \sqrt{2},\quad min\{0,\ 1\} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad min\{-4,-4\} = -4.$$

Πρόταση: ***Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς*** α ***και*** β ***είναι:***

$$max\{\alpha,\ \beta\} = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad min\{\alpha,\ \beta\} = \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}.$$

Πράγματι:

- ***Αν*** $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta \geq 0 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$

$$\left\{\begin{matrix} max\{\alpha,\ \beta\} = \alpha \\ \kappa\alpha\iota \\ \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \dfrac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2} = \alpha \end{matrix}\right\} \Rightarrow max\{\alpha,\ \beta\} = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}.$$

- ***Αν*** $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha-\beta < 0 \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$

$$\left\{\begin{matrix} max\{\alpha,\ \beta\} = \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \dfrac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2} = \dfrac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2} = \beta \end{matrix}\right\} \Rightarrow max\{\alpha,\ \beta\} = \frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}.$$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς, (να γίνει απόδειξη), διαπιστώνουμε την αλήθεια της:

$$min\{\alpha,\ \beta\} = \frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}.$$

Απόσταση δύο πραγματικών αριθμών:

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

Ορισμός: *Ονομάζουμε απόσταση των αριθμών α, β, που την συμβολίζουμε με $d(\alpha,\beta)$, τον μη αρνητικό αριθμό $|\alpha-\beta|$. Δηλαδή:*

$$d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha,\beta \in IR \qquad (1).$$

Αν θέσουμε $\beta = 0$ στην ισότητα (1) έχουμε:

$$d(\alpha,0) = |\alpha-0| \Rightarrow d(\alpha,0) = |\alpha|, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha \in IR \qquad (1')$$

Επομένως η απόσταση ενός αριθμού από το μηδέν ισούται με την απόλυτη τιμή του[2].

Οι ιδιότητες της απόστασης δύο αριθμών:

1. $d(\alpha,\beta) \geq 0, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha,\beta \in IR.$

   Πράγματι, είναι: $d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta| \geq 0, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha,\beta \in IR.$

2. $d(\alpha,\alpha) = 0, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha \in IR.$ *"Ανακλαστική Ιδιότητα"*

   Σύμφωνα με τον ορισμό $d(\alpha,\alpha) = |\alpha-\alpha| = |0| = 0, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha \in IR.$

3. $d(\alpha,\beta) = d(\beta,\alpha), \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha,\beta \in IR.$ *"Συμμετρική Ιδιότητα"*

   Είναι: $d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta| = |\beta-\alpha| = d(\beta,\alpha), \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha,\beta \in IR.$

4. $d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta) \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad \alpha,\beta,\gamma \in IR.$ *"Μεταβατική Ιδιότητα"*

   Για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β και γ είναι:

$$d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta| = |(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)| \leq |\alpha-\gamma| + |\gamma-\beta| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(\alpha,\beta) \leq |\gamma-\alpha| + |\gamma-\beta| \Rightarrow d(\alpha,\beta) \leq d(\alpha,\gamma) + d(\gamma,\beta).$$

---

[2] *Γι' αυτό και ο ορισμός 1 της απολύτου τιμής.*