Γενικά Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας Α΄ Λυκείου (Λυμένα - Άλυτα)

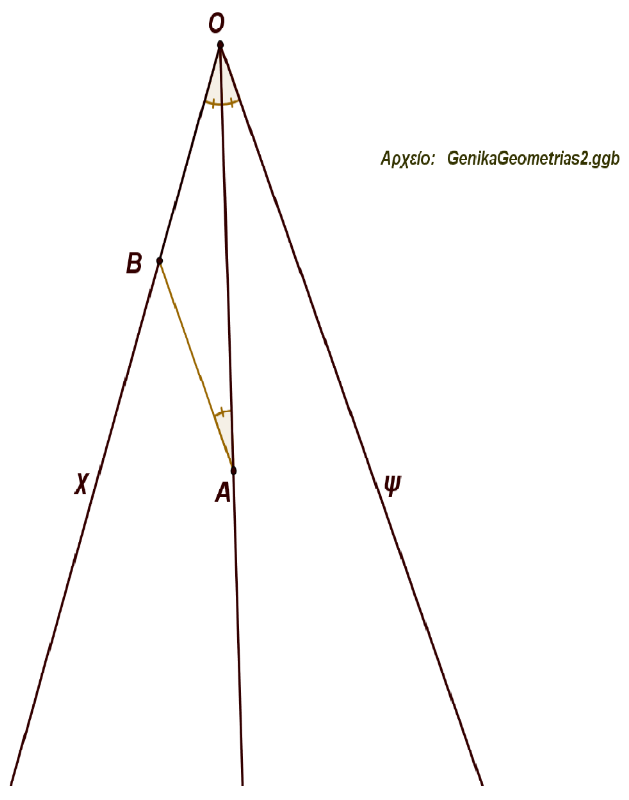
Θέμα 1ο:

Δίδονται γωνία $x\widehat{O}\psi$, η διχοτόμος της $O\omega$ και σημείο A της $O\omega$. Από το A κατασκευάζουμε ημιευθεία $A\alpha \parallel O\psi$ που ας υποθέσουμε ότι τέμνει την Ox στο σημείο της B.

Δείξτε ότι το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισοσκελές.

Απόδειξη:

Είναι φανερό ότι: $B\widehat{O}A = A\widehat{O}\psi \overset{AB \parallel O\psi}{=} O\widehat{A}B$.



Επομένως το τρίγωνο $\triangle OAB$ ισοσκελές με $OB = AB$.

Θέμα 2ο:

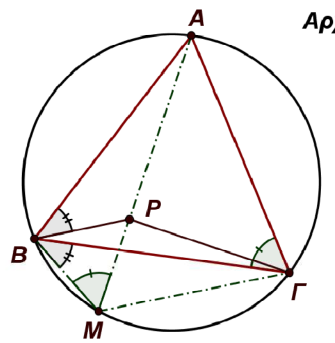
Ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O,\ \rho)$. Αν M τυχαίο σημείο του ελάσσονος τόξου $\frown B\Gamma$ να δείξετε ότι:

$$MA = MB + M\Gamma.$$

Απόδειξη:

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $(O,\ \rho)$ με πλευρές $AB = B\Gamma = \Gamma A = \alpha$.

Θεωρούμε σημείο P του τμήματος MA έτσι ώστε να είναι: $MP = MB \quad (1)$.



Είναι: $\{MB = MP \quad \kappa\alpha\iota \quad B\widehat{M}P = B\widehat{\Gamma}A = 60^\circ\}$. Επομένως το τρίγωνο $\triangle BMP$ είναι ισόπλευρο με $MB = MP = BP \quad (2)$.

Είναι επίσης: $\{A\widehat{B}P = M\widehat{B}\Gamma = 60^\circ - P\widehat{B}\Gamma \quad \kappa\alpha\iota \quad B\widehat{A}P = B\widehat{\Gamma}M \quad (3).\}$

Συνεπώς τα τρίγωνα $\triangle ABP$ και $\triangle BM\Gamma$ είναι ίσα, αφού:

$$\{AB = B\Gamma, \quad A\widehat{B}P = M\widehat{B}\Gamma \quad \kappa\alpha\iota \quad B\widehat{A}P = B\widehat{\Gamma}M\}.$$

Άρα θα είναι και $AP = M\Gamma \quad (4)$.

Επομένως: $MA = MP + PA \overset{(2,4)}{=} MB + M\Gamma$.

Θέμα

Ισοσκελούς τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) $οι\ διαγώνιες\ του\ τέμνονται\ κάθετα\ στο\ Ο$. Δείξτε ότι το εμβαδόν του δίδεται από την ισότητα.

$$(ΑΒΓΔ) = d^2, \quad όπου\ d\ \ είναι\ το\ ύψος\ του.$$

<<πολύ ωραία>>

Θέμα

Δίδεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Έστω $Ρ = Συμ_{ΔΒ}Α$. Να δείξετε ότι:

- $Δ\widehat{Ρ}Β = 90°\ \ και$
- **Το τετράπλευρο $ΒΔΡΓ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**

Θέμα

Δίδεται τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ($ΑΒ \parallel ΓΔ$) $με\ ΑΒ = ΑΜ\ όπου\ Μ\ το\ μέσον\ της\ ΒΓ$. Η παράλληλη από το $Δ$ $στην\ ΒΓ\ τέμνει\ την\ ΑΜ\ στο\ σημείο\ Ρ$. Δείξτε ότι:

- **Το τετράπλευρο $ΜΓΔΡ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.**
- **Αν $ΑΒ = 2ΓΔ \Rightarrow Ρ\ μέσο\ ΑΜ$.**

Θέμα

Δίδεται τρίγωνο $\triangle ΑΒΓ$ $και\ το\ ύψος\ του\ ΑΔ$ για το οποίο είναι $ΑΔ = ΒΓ$. Στο ημιεπίπεδο της $ΒΓ$ στο οποίο ανήκει το $Α$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα: $ΒΔΕΖ\ \ και\ \ ΔΓΗΘ$. Να δείξετε ότι τα τμήματα $ΓΖ\ \ και\ \ ΒΗ$ είναι ύψη του $\triangle ΑΒΓ$.

για το ορθόκεντρο

Θέμα

Δίδεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$. Η διχοτόμος της γωνίας του $\widehat{A}$ τέμνει την $\boldsymbol{B\Delta}$ στο σημείο $\boldsymbol{K}$ και την $\boldsymbol{B\Gamma}$ στο $\boldsymbol{M}$. Η παράλληλη από το σημείο $\boldsymbol{K}$ στην $\boldsymbol{AB}$ τέμνει την $\boldsymbol{A\Gamma}$ στο σημείο $\boldsymbol{N}$. Να δείξετε ότι:

- **Το τετράπλευρο $\boldsymbol{ABNK}$ είναι ισοσκελές τραπέζιο**
- $\boldsymbol{BN \perp AM}$ **και** $\boldsymbol{MN \perp B\Delta}$.

Θέμα

Δίδεται τετράγωνο $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$. Ευθύγραμμο τμήμα $\boldsymbol{K\Lambda}$ έχει τα άκρα του στις πλευρές $\boldsymbol{AB}$ και $\boldsymbol{\Gamma\Delta}$ του $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$. Ευθύγραμμο τμήμα $\boldsymbol{MN \perp K\Lambda}$ έχει τα άκρα του πάνω στις πλευρές $\boldsymbol{A\Delta}$ και $\boldsymbol{B\Gamma}$ του τετραγώνου $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$. Να δείξετε ότι: $\boldsymbol{K\Lambda = MN}$.

Θέμα

Δίδεται τραπέζιο $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$ $\left(\boldsymbol{AB /\!/ \Gamma\Delta,\ (AB) < (\Gamma\Delta)}\right)$ και η διάμεσος του $\boldsymbol{MN}$. Αν $\boldsymbol{A\Gamma \cap B\Delta = \{O\}}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{(ABNM)}{(MN\Gamma\Delta)} > \frac{(OAB)}{(O\Gamma\Delta)}.$$

Θέμα

Έστω παραλληλόγραμμο $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$ και $\boldsymbol{M,\ N,\ P}$ και $\boldsymbol{\Sigma}$ τα μέσα των πλευρών του $\boldsymbol{AB, B\Gamma, \Gamma\Delta}$ και $\boldsymbol{\Delta A}$ αντίστοιχα.

Αν $\boldsymbol{\Delta M \cap A\Gamma = \{E\}}$, $\boldsymbol{\Gamma M \cap B\Delta = \{Z\}}$, $\boldsymbol{AP \cap \Delta B = \{\Theta\}}$ και $\boldsymbol{BP \cap A\Gamma = \{H\}}$ να δείξετε ότι:

- $\boldsymbol{EZ /\!/ AB}$

- ***Το σχήμα $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές και οι διαγώνιες είναι το ένα τρίτο των πλευρών και των διαγωνίων του $ΑΒΓΔ$.***
- ***Οι ευθείες $ΒΣ$ και $ΓΣ$ διέρχονται από τα σημεία $Ε$ και $Θ$, αντίστοιχα. Όμοια, οι ευθείες $ΑΝ$ και $ΔΝ$ διέρχονται από τα σημεία $Ζ$ και $Η$, αντίστοιχα.***

<u>Θέμα</u>

Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και σημείο $Μ$ της πλευράς του $ΔΑ$. Η παράλληλη από το $Μ$ στην $ΒΔ$ τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο $Ρ$. Αν οι διαγώνιες $ΑΓ$ και $ΒΔ$ του $ΑΒΓΔ$ τέμνονται στο $Ο$ ενώ η $ΜΟ$ τέμνει την $ΒΓ$ στο $Ν$, να δείξετε ότι:

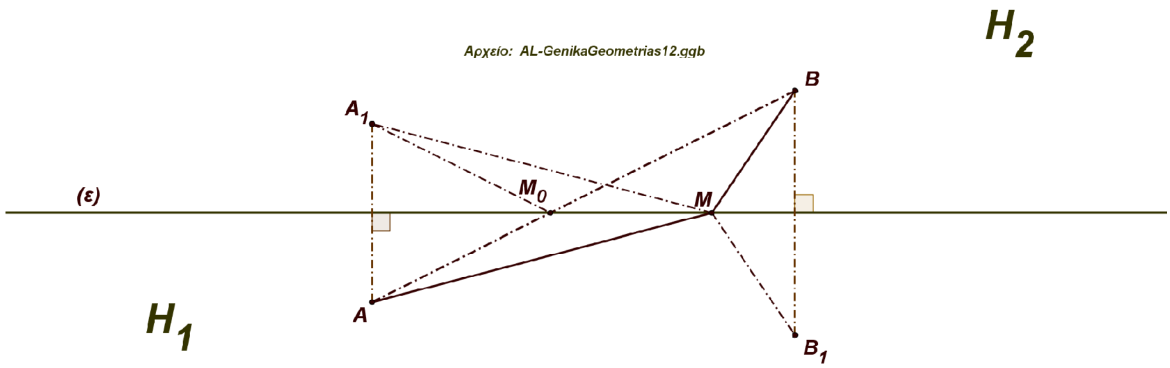
- $ΡΝ \parallel ΑΓ$
- $(ΜΡΝ) = (ΜΡΔ) + (ΝΡΓ)$.

Θέμα

Δίδεται ευθεία (ε). Στα αντικείμενα ημιεπίπεδα H_1 και H_2 της ευθείας (ε) θεωρούμε σταθερά σημεία A και B, αντίστοιχα. Να βρείτε σημείο $M \in (\varepsilon)$ έτσι ώστε η διαδρομή AMB να είναι ελαχίστη.

Λύση:

Έστω M τυχαίο σημείο της ευθείας (ε). Τότε το μήκος της διαδρομής AMB είναι:



$$l = AM + MB.$$

Κατασκευάζουμε τα συμμετρικά A_1 και B_1 των σημείων A και B, ως προς την ευθεία (ε). Είναι τότε:

$$MA = MA_1 \quad \text{και} \quad MB = MB_1 \qquad (1).$$

Γενικά τα σημεία A, M και B είναι μη συνευθειακά. Άρα από το $\triangle AMB$ έχουμε:

$$l = AM + MB \geq AB \qquad (2).$$

Η ισότητα στην ισότητα (2) ισχύει όταν το σημείο $M \equiv M_0$.

Συνεπώς η ελαχίστη τιμή της διαδρομής AMB είναι: $l_{min} = AB$ και επιτυγχάνεται όταν το σημείο M ταυτιστεί με την τομή της ευθείας (ε) και της AB.

Θέμα

Στο εσωτερικό κυρτής γωνίας $x\widehat{O}y$ θεωρούμε τα σταθερά σημεία A και B. Να βρείτε σημεία $M \in Ox$ και $N \in Oy$ έτσι ώστε η διαδρομή $AMNB$ να είναι ελαχίστη.

Θέμα

Δίδεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ πλευράς $(AB) = \alpha$ και σημείο M της διαγωνίου του $ΒΔ$. Να δείξετε ότι:

a) Η κάθετος από το M στην AB, η κάθετος από το B στην AM και η κάθετος από το $Δ$ στην $MΓ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο $Σ$.

b) Να προσδιορίσετε το είδος των τετραπλεύρων $ΑΜΣΔ$ και $ΒΜΣΓ$.

c) Να υπολογίσετε συναρτήσει της πλευράς του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ το άθροισμα:

$$S = (AM) + (MΣ) + (ΣΔ), \quad όταν\ το\ σημείο\ M\ ταυτίζεται:$$

- ***Με το σημείο B.***
- ***Με το σημείο $Δ$***
- ***Με το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραγώνου $ΑΒΓΔ$.***

Θέμα

Δίδεται τετράγωνο $ΑΒΓΔ$ και εσωτερικό σημείο M της πλευράς του $ΓΔ$. Προεκτείνουμε την $ΔΓ$, προς το μέρος του $Γ$, κατά τμήμα $ΓN = ΔM$. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο $ΓNPΣ$ στο ημιεπίπεδο ακμής $ΔΓ$ στο οποίο ανήκει και το τετράγωνο $ΑΒΓΔ$. Προεκτείνουμε την $ΓB$, προς το μέρος του B, κατά τμήμα $BT = ΔM$.

Να δείξετε ότι το σχήμα $AMPT$ είναι τετράγωνο.

Θέμα

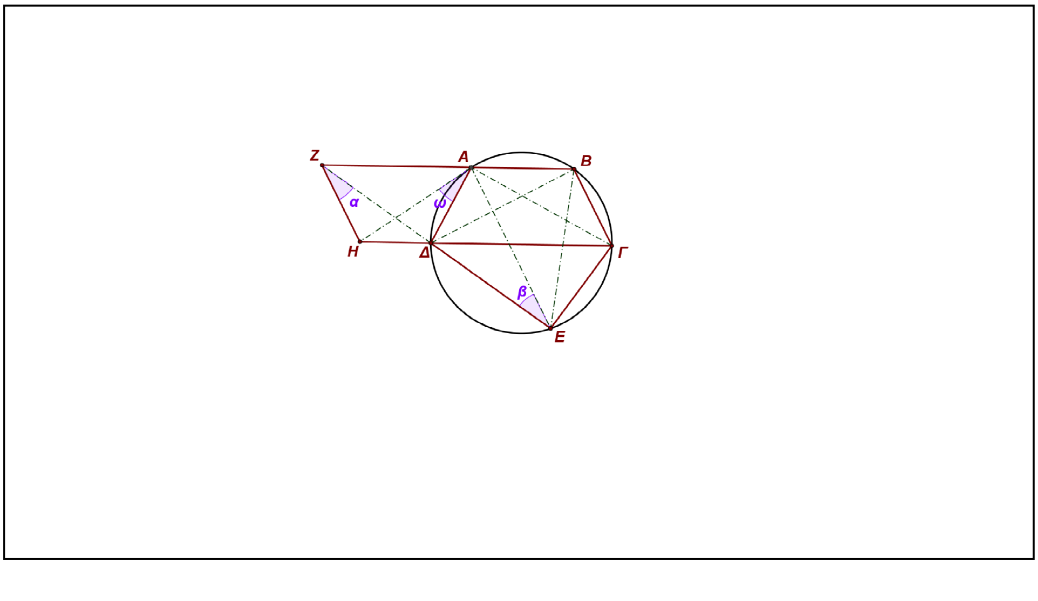
Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ δίδονται: $\widehat{A} = \widehat{Δ} = 90°$, $ΑΔ = ΔΓ$, $Ε$ μέσον $ΑΔ$ και $ΕΒ \perp ΕΓ$. Να δείξετε ότι: $ΑΔ = 4ΑΒ$, $8(ΑΒΓΔ) = 5.ΑΔ^2$

Θέμα

Τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με βάσεις $ΑΒ /\!/ ΓΔ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η παράλληλη από το $Α$ στην $ΒΓ$ επανατέμνει τον κύκλο στο σημείο $Ε$. Η $ΕΔ$ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Ζ$. Η παράλληλη από το $Ζ$ στην $ΒΓ$ τέμνει την προέκταση της $ΓΔ$ στο $Η$. Να δείξετε ότι η ευθεία $ΑΗ$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.

Λ ύ σ η:

Το τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ ως εγγράψιμο σε κύκλο είναι ισοσκελές. Επομένως $ΑΔ = ΒΓ$ (1).



Το τετράπλευρο $ΖΒΓΗ$ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. Επομένως $ΖΗ = ΒΓ$ (2). Από τις (1) και (2) έχουμε: $ΑΔ = ΖΗ$ (3).

Το τετράπλευρο $ΑΔΗΖ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, αφού: $ΑΖ \parallel ΔΗ$ και $ΑΔ = ΖΗ$. Επομένως είναι εγγράψιμο σε κύκλο και συνεπώς $Δ\hat{Α}Η = Δ\hat{Ζ}Η \quad (4)$.

Είναι όμως: $ΖΗ \parallel ΒΓ,\ ΑΕ \parallel ΒΓ \Rightarrow ΖΗ \parallel ΑΕ \Rightarrow Δ\hat{Ζ}Η = Δ\hat{Ε}Α \quad (5)$.

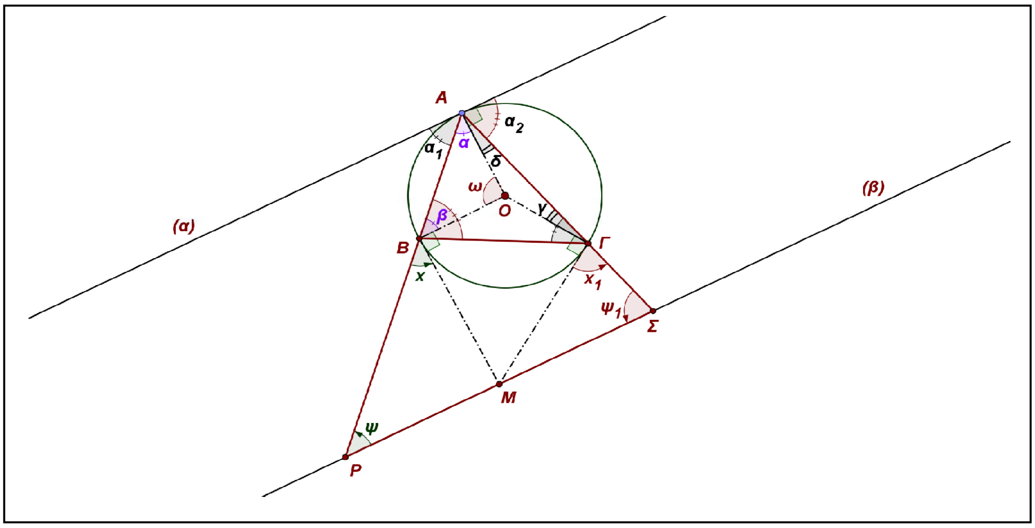
Από τις ισότητες (4) και (5) έχουμε: $Δ\hat{Α}Η = Δ\hat{Ε}Α$, που σημαίνει ότι η ευθεία $ΑΗ$ εφάπτεται του περιγεγραμμένου κύκλου του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ στο σημείο του $Α$.

Θέμα 18ο

Τρίγωνο $\triangle ΑΒΓ$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου $Ο$. Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία του $Β$ και $Γ$ τέμνονται στο σημείο $Μ$. Έστω $(α)$ η εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου του $\triangle ΑΒΓ$ στο σημείο του $Α$ και ευθεία $(β) \parallel (α)$ που διέρχεται από το $Μ$. Αν η ευθεία $(β)$ τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Ρ$ και $Σ$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι: Τα τρίγωνα $\triangle ΡΒΜ$ και $\triangle ΣΓΜ$ είναι ισοσκελή και το σημείο $Μ$ είναι μέσον του $ΡΣ$.

Λ ύ σ η:

Είναι: $$\left\{\begin{matrix} \hat{ω} = 2Α\hat{Γ}Β = 2\hat{Γ} \quad \ll εγγεγραμένη - επίκεντρη\ στο\ \frown ΑΒ \gg \\ και \\ \hat{α} = \hat{β} = 90° - Α\hat{Γ}Β \quad \ll αφού\ ΟΑ = ΟΒ\ \ και\ \ \hat{α} + \hat{β} + \hat{ω} = 180° \gg \end{matrix}\right\} \quad (1).$$



και $\left.\begin{cases} \widehat{\alpha}_1 = A\widehat{\Gamma}B \ \ll \text{γωνία από χορδή και εφαπτομένη} \gg \\ \widehat{\alpha}_1 = \widehat{\psi} \ \ll \alpha \,/\!/\, \beta \gg \end{cases}\right\} \Rightarrow \widehat{\psi} = A\widehat{\Gamma}B \quad (2).$

Αλλά $A\widehat{B}P = 180° \Rightarrow \widehat{\beta} + \widehat{x} = 90° \Rightarrow \widehat{x} = 90° - \widehat{\beta} \overset{(1)}{\Rightarrow} \widehat{x} = A\widehat{\Gamma}B \quad (3).$

Από τις (2) *και* (3) *έχουμε:* $\widehat{x} = \widehat{\psi} \Leftrightarrow MB = MP \quad (4).$

Όμοια, αποδεικνύουμε ότι: $\widehat{x}_1 = \widehat{\psi}_1 \Leftrightarrow M\Gamma = M\Sigma \quad (5).$

Επειδή όμως $MB = M\Gamma \overset{(4,5)}{\Rightarrow} MP = M\Sigma,$ *δηλαδή το* M *είναι μέσον του* $P\Sigma$.