Άσκηση 1η:

Δίδεται κύκλος διαμέτρου AB και σημείο του M. Κατασκευάζουμε τον κύκλο $(M,\ MB)$ που επανατέμνει την διάμετρο AB στο σημείο της N και τον κύκλο διαμέτρου AB στο σημείο του P. Να δείξετε ότι: $NP \perp AM$ και $AP = AN$.

Απόδειξη:

Η γωνία $A\hat{M}N = 90°$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.

Οι χορδές MB και MP του κύκλου με διάμετρο AB είναι ίσες. Επομένως:

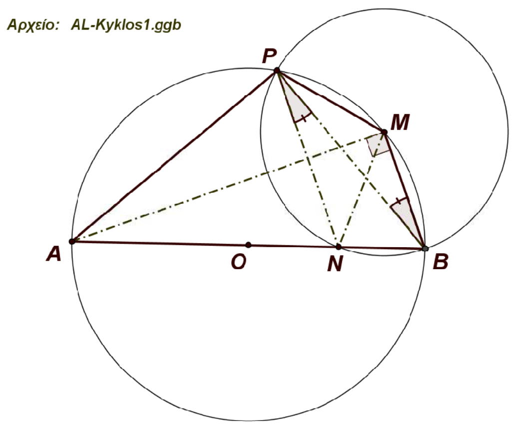
$$M\hat{A}P = M\hat{A}B = B\hat{P}M = M\hat{B}P \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\triangle MNB$ είναι ισοσκελές με $MN = MB \Rightarrow M\hat{N}B = M\hat{B}N \qquad (2).$

Στο τρίγωνο $\triangle MNB$ είναι επίσης:

$$N\hat{M}B + M\hat{N}B + M\hat{B}N = 180° \overset{(1)}{\Rightarrow} N\hat{M}B + 2M\hat{N}B = 180° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow N\hat{M}B = 180° - 2M\hat{B}N \qquad (3).$$



Η γωνία $N\hat{P}B$ είναι εγγεγραμμένη στον κύκλο $(M,\ MB)$ ενώ η $N\hat{M}B$ είναι επίκεντρη του ίδιου κύκλου που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\frown NB$. Επομένως:

$$N\hat{P}B = \frac{N\hat{M}B}{2} \overset{(2)}{=} 90° - M\hat{B}N = M\hat{A}B \overset{(1)}{=} P\hat{B}M \Rightarrow N\hat{P}B = P\hat{B}M \Rightarrow PN \parallel MB \overset{MB \perp MA}{\Rightarrow} PN \perp MA.$$

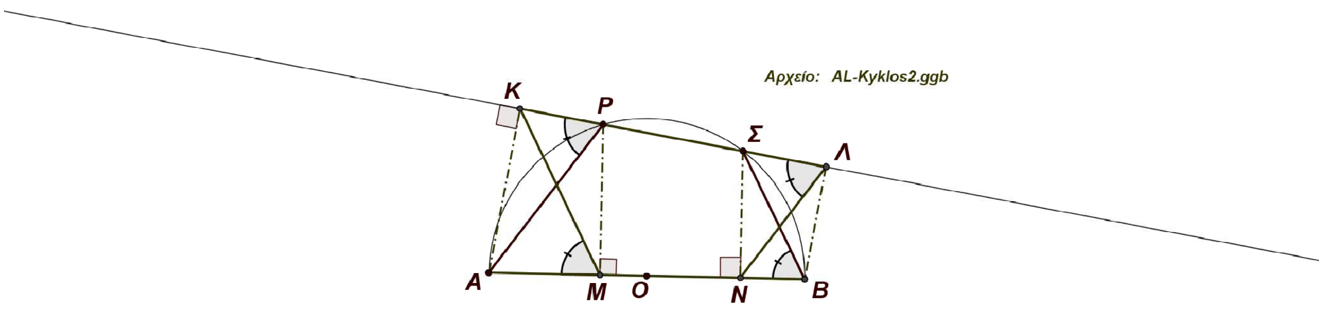
Άσκηση 2η:

Δίδεται ημικύκλιο διαμέτρου AB. Ευθεία (ε) τέμνει το ημικύκλιο στα σημεία P και Σ. Έστω AK, $B\Lambda \perp (\varepsilon)$ και PM, $\Sigma N \perp AB$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $MN\Lambda K$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Απόδειξη:

Το τετράπλευρο $AMPK$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού: $A\widehat{K}P + P\widehat{M}A = 90° + 90° = 180°$. Επομένως: $A\widehat{M}K = A\widehat{P}K$ (1).

Όμοια, το τετράπλευρο $KMN\Lambda$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, οπότε: $A\widehat{P}K = \Sigma\widehat{B}N$ (2).



Αλλά και το τετράπλευρο $\Sigma NB\Lambda$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αφού: $\Sigma\widehat{N}B + B\widehat{\Lambda}\Sigma = 180°$, οπότε:

$$\Sigma\widehat{B}N = N\widehat{\Lambda}\Sigma \qquad (3).$$

Από τις ισότητες (1), (2) και $(3) \Rightarrow A\widehat{M}K = N\widehat{\Lambda}\Sigma$.

Επομένως το τετράπλευρο $MN\Lambda K$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

Άσκηση 3η:

Τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,ρ). Κατασκευάζουμε τα ύψη BP και $\Gamma\Sigma$ του $\triangle AB\Gamma$. Να δείξετε ότι: $OA \perp P\Sigma$.

Απόδειξη:

Άσκηση 4η:

Έστω AM, AN και AP τα ύψη τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ και $MK \perp AB$, $M\Lambda \perp A\Gamma$. Να δείξετε ότι: $NP \parallel K\Lambda$.

Απόδειξη:

Άσκηση 5η:

Έστω τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,ρ). Από τις κορυφές A, B και Γ του $\triangle AB\Gamma$ φέρνουμε παράλληλες προς τις $B\Gamma$, ΓA και AB αντίστοιχα, που επανατέμνουν τον (O,ρ) στα σημεία M, N και P. Δείξτε ότι οι πλευρές του τριγώνου $\triangle MNP$ είναι παράλληλες στις εφαπτόμενες του κύκλου (O,ρ) στα σημεία του A, B και Γ.

Απόδειξη: